

УДК539.3

к.т.н., доцент Станкевич А.М., Тімофєєв А.С.,  
Київський національний університет будівництва і архітектури**РОЗРАХУНОК ТОВСТИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ МЕТОДОМ  
«ПРЯМИХ» ПРИ ДІЇ СТАТИЧНИХ ТА ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

*Інженерна практика потребує більш уточнених розрахунків елементів конструкцій, що мають вигляд товстих консольних пластин змінної товщини. Наприклад, для визначення напружень в двотаврах монорейок при дії динамічних навантажень від коліс самохідного візка кран-балки. Раніше розрахунки виконувались для полицок як для пластин постійної товщини при зосереджених навантаженнях. Тому в процесі проектування врахування дійсної геометрії полицок і їх роботи в двотаврових балках при динамічних навантаженнях також є актуальним.*

*Ключові слова: товсті пластини, змінна товщина, метод «прямих», статичні навантаження, динамічні навантаження.*

Розрахунок полицок двотаврових балок може бути здійснений за допомогою теорії пружності [1]. Алгоритм, що наведений нижче дозволяє визначити напружено-деформований стан полка балки із застосуванням рівнянь плоскої задачі (плоска деформація). Для зниження вимірності пропонується в комбінації з методом прямих використовувати проєкційний метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова.

Полка балки розглядається як товста пластина у декартовій системі координат (рис.1). Граничні умови, що моделюються пружними в'язями з заданими коефіцієнтами жорсткості приймаються по контурних поверхнях пластин [2] (рис.1-4).

З урахуванням такого закріплення складаються диференціальні рівняння в частинних похідних, які за допомогою методу прямих зводяться до звичайних диференціальних рівнянь.

Розв'язок отримується як проєкції шуканої функції на півпростір кусково-лінійних фінітних базисних функцій. По змінних ці функції мають задовольнити граничні та початкові умови, з урахуванням динамічної рівноваги пластин.

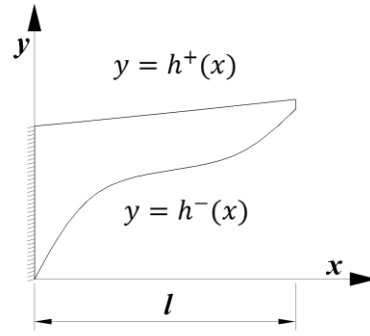


Рис. 1.

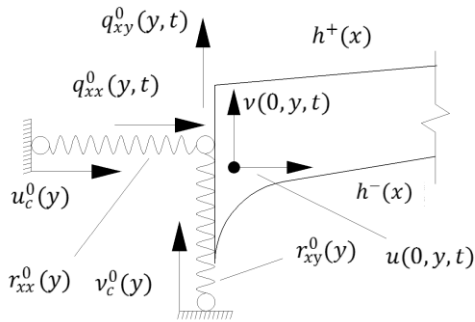


Рис. 2.

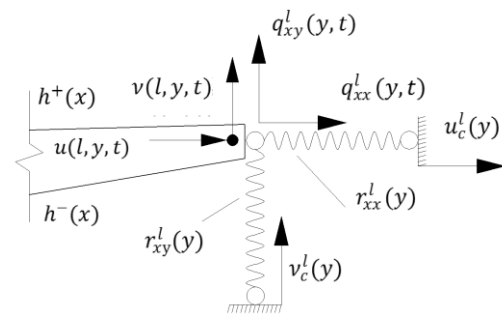


Рис. 3.

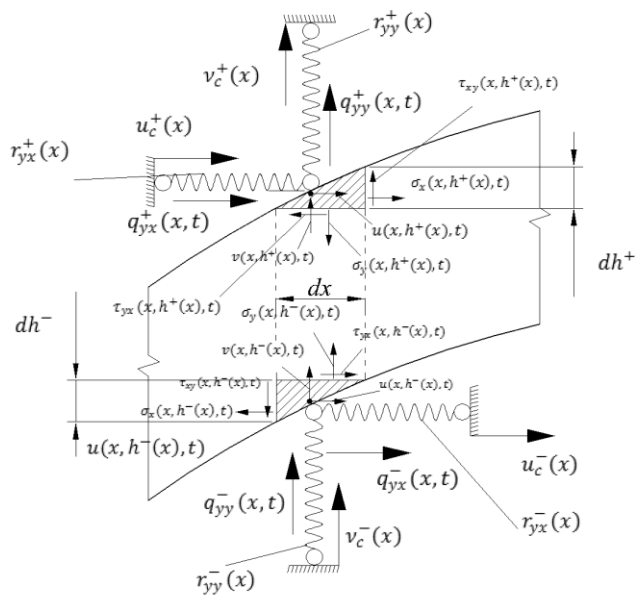


Рис. 4.

Граничні умови мають вигляд:

при  $x=0$ ,

$$r_{xx}^{*0}(y) \bullet u^*(0, y, t) - \sigma_x(0, y, t) = q_{xx}^0(y, t) + r_{xx}^0(y) \bullet u_c^0(y)$$

$$r_{xy}^{*0}(y) \bullet v^*(0, y, t) - \tau_{xy}(0, y, t) = q_{xy}^0(y, t) + r_{xy}^0(y) \bullet v_c^0(y)$$

при  $x=l$ ,

$$r_{xx}^{*l}(y) \bullet u^*(l, y, t) - \sigma_x(l, y, t) = q_{xx}^l(y, t) + r_{xx}^l(y) \bullet u_c^l(y)$$

$$r_{xy}^{*l}(y) \bullet v^*(l, y, t) - \tau_{xy}(l, y, t) = q_{xy}^l(y, t) + r_{xy}^l(y) \bullet v_c^l(y)$$

(1)

при  $y = h^-(x)$  та  $B_x^-(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dh^-(x)}{dx}\right)^2}$  :

$$\sigma_x(x, h^-(x), t) \bullet \frac{dh^-(x)}{dx} - \tau_{xy}(x, h^-(x), t) = B_x^-(x) * (q_{yx}^-(x, t) + r_{yx}^-(x) \bullet u_c^-(x) - r_{yx}^-(x) \bullet u^*(x, h^-(x), t))$$

$$\sigma_y(x, h^-(x), t) - \tau_{xy}(x, h^-(x), t) \bullet \frac{dh^-(x)}{dx} = B_x^-(x) * (-q_{yy}^-(x, t) - r_{yy}^-(x) \bullet v_c^-(x) + r_{yy}^-(x) \bullet v^*(x, h^-(x), t))$$

при  $y = h^+(x)$  та  $B_x^+(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dh^+(x)}{dx}\right)^2}$  :

$$\sigma_x(x, h^+(x), t) \bullet \frac{dh^+(x)}{dx} - \tau_{xy}(x, h^+(x), t) = B_x^+(x) * (-q_{yx}^+(x, t) - r_{yx}^+(x) \bullet u_c^+(x) + r_{yx}^+(x) \bullet u^*(x, h^+(x), t))$$

$$\sigma_y(x, h^+(x), t) - \tau_{xy}(x, h^+(x), t) \bullet \frac{dh^+(x)}{dx} = B_x^+(x) * (q_{yy}^+(x, t) + r_{yy}^+(x) \bullet v_c^+(x) - r_{yy}^+(x) \bullet v^*(x, h^+(x), t))$$

Початкові умови можуть бути визначені за наступних умов:

$$u^*(x, y, 0) = u^{*0}(x, y);$$

$$v^*(x, y, 0) = v^{*0}(x, y);$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t}(x, y, 0) = U^{*0}(x, y);$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t}(x, y, 0) = V^{*0}(x, y)$$

(2)

Для знаходження напружень та деформацій розв'язуємо граничну задачу яка описується системою диференціальних рівнянь відносно переміщень та деформацій в часткових похідних першого порядку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \sigma_x; \\ \frac{\partial v^*}{\partial x} = -\frac{\partial u^*}{\partial y} + \tau_{xy}; \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X + \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y + \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}; \\ \sigma_y = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \sigma_x \end{array} \right. \quad (3)$$

де  $u^* = \mu \cdot u$ ,  $v^* = \mu \cdot v$ ;  $X, Y$  – об'ємні сили;  $\lambda, \mu$  – фізичні параметри Ляме;

$\rho$  - щільність пластини.

Вищенаведені рівняння приведено з урахуванням парності дотичних напружень. Далі виконуємо редукування вихідної системи рівнянь аналогічно наведеним у роботі [3]. У результаті редукована система диференціальних рівнянь при динамічних навантаженнях через переміщення і напруження у вигляді моментів від базисних функцій представлено в наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_i^*(x,t)}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ij} \cdot g^{j\alpha} v_{\alpha}^*(x,t) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \sigma_{xi}(x,t) - A_x^-(x) \delta_{i*}^{*1} g^{1\alpha} u_{1\alpha}^*(x,t) + \\ + A_x^+(x) \cdot \delta_{i*}^{*n} \cdot g^{n\alpha} \cdot u_{n\alpha}^*(x,t) + C_x(x) \cdot d_{ij} \cdot g^{j\alpha} u_{\alpha}^*(x,t); \\ \frac{dv_i^*(x,t)}{dx} = -b_{ij} \cdot g^{j\alpha} u_{\alpha}^*(x,t) + \tau_{xyi}(x,t) - A_x^-(x) \cdot \delta_{i*}^{*1} \cdot g^{1\alpha} \cdot v_{1\alpha}^*(x,t) + \\ + A_x^+(x) \cdot \delta_{i*}^{*n} \cdot g^{n\alpha} \cdot v_{n\alpha}^*(x,t) + C_x(x) \cdot d_{ij} \cdot g^{j\alpha} v_{\alpha}^*(x,t); \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma_{xi}(x,t)}{dx} &= \left[ B_x^-(x) \cdot r_{yx}^-(x) \cdot \delta_{i*}^{*1} \cdot g^{1\alpha} \cdot u_{\alpha}^*(x,t) + B_x^+(x) \cdot r_{yx}^+(x) \cdot \delta_{i*}^{*n} \cdot g^{n\alpha} \cdot u_{\alpha}^*(x,t) \right] + \\ &+ b_{ij} \cdot g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha}(x,t) - \left[ B_x^-(x) \cdot q_{yx}^-(x,t) \cdot \delta_{i*}^{*1} + B_x^+(x) \cdot q_{yx}^+(x,t) \cdot \delta_{i*}^{*n} \right] - \\ &- \left[ B_x^-(x) \cdot r_{yx}^-(x) u_c^-(x) \cdot \delta_{i*}^{*1} + B_x^+(x) \cdot r_{yx}^+(x) u_c^+(x) \cdot \delta_{i*}^{*n} \right] + \\ &+ C_x(x) \cdot d_{ij} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha}(x,t) - X_i + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \cdot u_i^*(x,t); \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\tau_{xyi}(x,t)}{dx} &= \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot b_{ji} \cdot g^{i\alpha} b_{\alpha\beta} \cdot g^{\beta\gamma} v_{\gamma}^*(x,t) + \\ &+ \left[ B_x^-(x) \cdot r_{yy}^-(x) \cdot \delta_{i*}^{*1} \cdot g^{1\alpha} \cdot v_{\alpha}^*(x,t) + B_x^+(x) \cdot r_{yy}^+(x) \cdot \delta_{i*}^{*n} \cdot g^{n\alpha} \cdot v_{\alpha}^*(x,t) \right] + \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha}(x,t) - \left[ B_x^-(x) q_{yy}^-(x,t) \cdot \delta_{i*}^{*1} + B_x^+(x) q_{yy}^+(x,t) \cdot \delta_{i*}^{*n} \right] - \\ &- \left[ B_x^-(x) r_{yy}^-(x) u_c^-(x) \cdot \delta_{i*}^{*1} + B_x^+(x) r_{yy}^+(x) u_c^+(x) \cdot \delta_{i*}^{*n} \right] + C_x(x) \cdot d_{ij} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha}(x,t) - \\ &- Y_i + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \cdot v_i^*(x,t); \end{aligned} \right.$$

$$\text{де } C_x = \frac{\partial \Delta(x,t)}{\partial x}; \quad A_x^+(x) = \frac{dh^+(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh^+(x)}{dx}\right)^2}}; \quad A_x^-(x) = \frac{dh^-(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh^-(x)}{dx}\right)^2}};$$

$\delta_{i*}^{*n}$  – символ Кронекера; зауважимо,

що  $A_x^+(x)$ ,  $A_x^-(x)$  – ці коефіцієнти є косинусами від кута між напруженнями та нормаллю до поверхні пластини.

Розв’язок системи рівнянь шукаємо у вигляді:

$$u_i^*(x,t) = u_i^{*0}(x) \cdot \exp(\omega t); (u_i^*(x,t) \Leftrightarrow v_i^*(x,t) \Leftrightarrow \sigma_{xi}^*(x,t) \Leftrightarrow \tau_{xyi}^*(x,t)). \quad (5)$$

Гранична задача при динамічних навантаженнях в залежності від змінної часу  $t$  розглядається як послідовність квазістатичних рішень з кроком  $\Delta t$ . По-перше двовимірна задача зводиться до одновимірної, що є системою звичайних диференціальних рівнянь з редукованими граничними умовами на ділянці  $(x, l)$ . Система цих рівнянь вирішується із застосуванням узагальненого методу прямих [3], [4]. Далі одновимірну граничну задачу розв’язуємо методом дискретної ортогоналізації [5].

Спектральна задача на початковому етапі вирішується також покроковим методом за наступним алгоритмом. Після першого кроку  $\Delta t$ , виконується лише прямих хід ортогоналізації, а форми коливань знаходяться після оберненого ходу. Тобто, для знаходження власної частоти та власної форми коливань для початкового рішення від динамічних навантажень в момент часу  $t=0$  розглядається замкнута гранична задача (1)-(5).

З залученням знайдених на першому етапі власних форм та частот коливань  $u^*(x, t), v^*(x, t), \omega$  далі вирішується спектральна задача на наступних кроках про несталі вимушені коливання пластини змінної товщини. Ці коливання можуть виникати навіть в результаті неперіодичних динамічних впливів і суттєво залежать від початкових умов і зовнішніх навантажень, таких як при роботі поличок в двотаврових балках важких мостових кранів.

На другому етапі спектральна задача вже вирішується за допомогою розкладу по власним формам коливань пластини в іншому вигляді, а саме:

$$\begin{aligned}
 u^*(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{N=\infty} T_k(t) \cdot u_k^{**}(x, y); \\
 v^*(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{N=\infty} T_k(t) \cdot v_k^{**}(x, y); \\
 \sigma_x(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{N=\infty} T_k(t) \cdot \sigma_{xk}^{**}(x, y); \\
 \sigma_y(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{N=\infty} T_k(t) \cdot \sigma_{yk}^{**}(x, y); \\
 \tau_{xy}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{N=\infty} T_k(t) \cdot \tau_{xyk}^{**}(x, y);
 \end{aligned} \tag{6}$$

де  $u_k^{**}(x, y), v_k^{**}(x, y), \sigma_k^{**}(x, y), \tau_{xyk}^{**}(x, y)$  – власні форми коливань пластини, знайдені на попередньому етапі розрахунку;  $T_k(t)$  – шукана вектор-функція часу. З метою отримання заданої кількості частот та форм коливань пластин та зниження  $N = +\infty$  до кінцевого -  $N$  застосовуємо методику Кукуджанова С.Н. [6].

Після підстановки (6) до системи рівнянь (1)-(4) та інтегрування по  $y, x$  приводимо задачу до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно  $T(t)$  та отримуємо в матричній формі:

$$[D] \left\{ T(t) \right\} + [H] \left\{ T(t) \right\} = \{ q(t) \} \tag{7}$$

з початковими умовами у вигляді:

$$\{T(0)\} = \{T_0\}, \{T^*(0)\} = \{T_0^*\}, \quad (8)$$

де  $H_{ij}, D_{ij}$  – є інтеграли (додатки), взяті від комбінації добутоків власних форм та їх похідних по всій розрахунковій сітці перерізу пластини;

$\{T_0\}, \{T_0^*\}$  – компоненти вектор-функції часу, що визначаються розкладом початкових векторів  $u(x,y), U(x,y), v(x,y), V(x,y)$  див.[7] згідно знайденим формам коливань  $u_k^*(x,y), v_k^*(x,y)$ , та  $q_{ij}(t)$  – компоненти вектор-функції узагальнених зусиль.

Система рівнянь (6) – (8) розв'язується методом Рунге-Кутта [8] і в кожний момент часу  $t_k$  визначається  $T(t_k)$  і знаходяться переміщення  $u_k(x,y,t_k), v_k(x,y,t_k)$  та напруження  $\sigma_{xk}(x,y,t_k), \tau_{xyk}(x,y,t_k), \sigma_{yk}(x,y,t_k)$ .

Вищенаведена процедура дозволяє у будь-який час визначити напружено-деформований стан всієї пластини змінної товщини під дією динамічних впливів, а також знайти гармоніки частот та форм коливань з заданою кількістю N.

З метою тестування наведеної методики досліджувалась робота полицок двотаврових профілів №30в ( натурна конструкція) закладених в жорстку залізобетонну плиту і навантажених анкерним якорем з роликками для задання рівномірно розподіленого навантаження. Навантаження виконувалось гідравлічним домкратом з різким скиданням зусилля. Параметри НДС полицок вимірювались тензодатчиками, з'єднаними з осцилографом.

### Висновки:

Вирішена динамічна задача про невстановлені вимушені коливання товстої пластини змінної товщини. Знайдено спектр частот та форм власних коливань товстої пластини з врахуванням різноманітних параметрів закріплення пластини по торцевих і бокових площинах.

Рішення цієї задачі виконано також зі застосуванням програмних комплексів Ansys та ПК «ЛИРА». Слід зауважити, що при обох рішеннях задачі достатньо добре відповідають експериментальним даним - 8-13 відсотків.

Чисельна збіжність результатів розрахунків по викладеному методу з експериментальними дозволяють рекомендувати запропонований метод для розрахунку таврових полиць.

### Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5-е изд., М.,1966. -708 стр. с илл.
2. Чибіряков В.К., Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонок: Монографія. - Черкаси: ЧДТУ, 2002.- 160 с: іл..

3. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – випуск 36. - С. 413-423.
4. Чибіряков В. К., Станкевич А.М. , Левківський Д. В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник, вип. 46. – К.: КНУБА, 2013. – С. 613 – 624.
5. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – В кн. : Успехи математических наук, 1961, т.XVI, вып.3. - С. 171-174.
6. Кукуджанов С.Н. О наилучших начальных приближениях в проблеме собственных чисел в методах Ритца и Бубнова–Галеркина. – В кн. : Теория оболочек и пластин // Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – Ереван, 1964. – С. 621-625.
7. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними., Київ : Наукова думка., 2002. – 415 с.: іл..
8. Форсайд Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Изд. “ Мир”, 1980. – 280 с.

#### Аннотация

В данной работе рассматривается методика определения напряженно-деформированного состояния при динамических нагрузках толстой ортотропной плиты с помощью комбинации метода «прямых» и проекционного метода Бубнова-Галеркина-Петрова. Для численного решения редуцированных уравнений задачи применяют метод дискретной ортогонализации С.К.Годунова. На примере показано сходимость полученных результатов с методом конечных элементов.

Ключевые слова: толстые пластины, переменная толщина, метод «прямых», статические нагрузки, динамические нагрузки.

#### Abstract

This paper describes a technique for determining the stress-strain state by dynamics loadings of thick orthotropic plate of construction using a combination of the "straight lines" method and the projection method of Bubnov-Galerkin-Petrov. The numerical solutions of the reduced equations is solved using the method of discrete orthogonalization S.K. Godunov. The example shows the convergence of the results obtained with "straight lines" method, and the finite elements method.