

**ГЕОМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ РОЗШИРЕННЯ ТА ЗАТУХАННЯ  
ВІЛЬНИХ ПЛОСКИХ СТРУМИН**

У вентиляованих приміщеннях використовуються турбулентні струминні течії: вільні, обмежені, напівобмежені (які насталяються на поверхні різної форми), такі, що взаємодіють, тощо. Одним з факторів, що визначає рівномірність розподілення повітря у приміщенні, є розширення струмин. Його прийнято розглядати як результат дії турбулентних пульсацій у струминному примезовому шарі та у навколишньому середовищі (при розвитку струмини в потоку). У такому контексті при теоретичному описі розширення струмини обов'язково використовуються дослідні коефіцієнти. Це призводить до потреби у складних експериментальних дослідженнях, що знижує ефективність праці науковців та підвищує собівартість обладнання.

На відміну від цих підходів професор кафедри теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури А.Я.Ткачук [1] розробив теорію турбулентних примезових шарів за методом особливостей. Потік розглядається як течія ідеальної рідини, в якій присутні як «особливості» дрібні вихрові течії. Такий підхід дозволив безпосередньо описувати дію вихорів замість використання додаткових понять.

Продовженням цих досліджень є підхід до аналітичного опису струминних течій, що передбачає розгляд струминного примезового шару як сукупність великомасштабних вихорів – клубів.

У вільних струминах [2,3,4] показана можливість подання струминного шару (рис.1) у вигляді клубів, що котяться вільною межею. Лінія, яка сполучає центри клубів, практично збігається з характерною лінією за Грімтіліним, де швидкість дорівнює половині осьової. У роботі [3] вільну струмину подано у вигляді клубів у шаховому порядку.

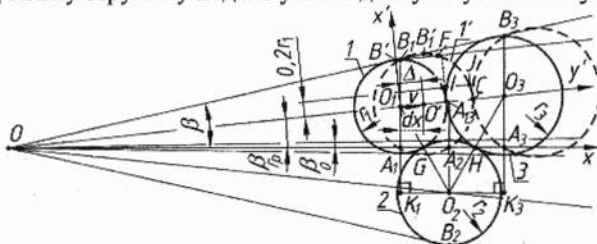


Рис.1. Схема струмини

Отримано зв'язок між тангенсом кута розширення струмینی  $\text{tg}(\beta) = \Theta$ , тангенсом кута  $\text{tg}(\beta_{Гр}) = \Theta_{Гр}$  лінії, де швидкість  $u$  дорівнює половині осьової  $u_m$ , та тангенсом кута межі занурення клубів у сусідній шар  $\text{tg}(\beta_0) = \Theta_0$ . Цей зв'язок з похибкою до 0,32% описується формулою:

$$\Theta_{Гр} = (0,49482 - 0,02947 \exp(-0,0611\Theta^2))\Theta, \quad (1)$$

або для  $\Theta < 1$

$$\Theta_{Гр} = 0,4655 \Theta. \quad (2)$$

Також отримані співвідношення між радіусами та абсцисами  $x_1, x_2, x_3$  центрів клубів  $O_1, O_2, O_3$ :

$$r_i = x_i(\Theta - \Theta_{Гр}) = x_i(\Theta_{Гр} + \Theta_0), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

Розглянемо джерело Толміна, яке витікає з нескінченно тонкої щілини у точці  $O$ . Виділимо клуби 1, 2 та 3 радіусами  $r_1, r_2, r_3$ . Осі клуба позначимо  $O_1, O_2, O_3$ . Проекції осей клубів на вісь струмینی  $x$  позначимо, відповідно,  $A_1, A_2$  та  $A_3$ , а найбільш віддалені від осі  $x$  точки клубів –  $B_1, B_2$  та  $B_3$ . Клуб 1 рухається з поступальною швидкістю  $v$  на осі клуба  $O_1$ . За час  $dt$  центр клуба  $O_1$  зсунеться у точку  $O'$  на відстань вздовж осі струмینی  $x$   $dx_1 = vdt$ . Також з урахуванням зростання радіуса клуба на величину  $dr_1$  центр віддаляється від осі струмینی. Клуб 1 займе положення  $1'$ . У криволінійному трикутнику  $B_1A_{13}B_3$  відбувається лише підтікання повітря до струмینی у напрямку, перпендикулярному до осі  $x$  [4]. А це можливе лише якщо як мінімум все повітря криволінійної фігури  $B_1B'_1CA_{13}$  ( $B'_1$  – найбільш віддалена від осі  $x$  точка кола  $1'$ ,  $B'_1C$  – відрізок прямої) буде спожито струминою. Якщо спожито менше, то клуб 1 буде або створювати рух повітря в напрямку осі  $x$ , або виштовхувати його зі струмینی, що суперечить фізичному змісту задачі.

У околиці точки  $A_{13}$  відбувається звуження потоку, що підтікає до криволінійного трикутника  $A_{13}GH$ . У даному місці має суттєво зрости швидкість у напрямку до осі  $x$ . Рух на периферії клуба відбувається проти напрямку підтікання. Тому ежекція в цій околиці ускладнена. Це – околиця ускладненого підтікання  $IICA_{13}$ . Оскільки ширина міжклубного шару тут незначна, то наявність повздовжньої складової швидкості не вплине на усереднену швидкість. Тому слід вилучити з розгляду частину фігури  $B_1B'_1CA_{13}$  біля точки  $A_{13}$ , в якій ширина міжклубного шару незначна.

Площа  $A_c$  розглянутої фігури  $B_1B'_1CA_{13}$  визначається з урахуванням багатьох факторів. Але якщо  $dt \rightarrow 0$ , то площа  $A_c$  стає теж нескінченно малою, як і приріст радіуса  $dr_1$ . Введемо систему декартових координат  $x'y'$  з центром у точці  $O_1$ , а вісь  $y'$  містить точки  $O_1$  та  $O'$  та знаходиться під кутом  $\beta_{Гр}$  до осі струмینی  $x$ . Якщо клуб збільшує радіус  $r_1$  лінійно відносно  $x$ , то нескінченно малі величини  $dr_1$  та  $dx_1$  мають один порядок малості, як і довжина  $\Delta = dx_1/\cos(\beta_{Гр})$  відрізка  $OO'$ . Існує можливість вилучити малі частини цієї площі вищого порядку малості і знайти

похідну  $dA_c/dx$ . Криволінійний трикутник  $B_1B'_1F$  ( $B_1B'_1$  – відрізок прямої,  $B'_1F$  – дуга,  $AF|y'$ ) при стягуванні в точку прямує до звичайного трикутника, а площа його прямує до половини добутку довжини відрізка  $B_1F$  та висоти, опущеної з точки  $B'_1$ . Оскільки обидві величини мають порядок малості не вищий за  $dx_1$ , то їхній добуток має вищий порядок малості і може бути вилучений з розгляду. Вилучимо з розгляду мікроскопічну фігуру, яка на рис.1 зливається з відрізком  $B_1B'$  ( $B'$  – точка перетину осі  $x'$  та межі клуба 1). Тоді площа  $A_c$  буде замінена площею  $A_0$  фігури  $BFC A_{13}$ .

Тепер вилучимо околицю ускладненого підтікання біля точки  $A_{13}$ . Рівняння кола  $y' = (r_1^2 - x'^2)^{1/2}$  при  $x' = 0,2r_1$  дає значення відстані між дотичною (на рис.1 показана коротким пунктиром) та колом  $r_1 - y' = 0,02r_1$ , рівне 2% від радіуса  $r_1$ . Ця відстань незначна, а  $x' = 0,2$  можна використати як оціночне значення межі околиці ускладненої ежекції. Площа криволінійної фігури  $BFI$  після вилучення околиці ускладненого підтікання  $IJA_{13}$ :

$$dA_0 \rightarrow \int_{0,2r_1}^{\eta} \Delta + \sqrt{(r_1 + dr_1)^2 - x'^2} dx' - \int_{0,2r_1}^{r_1} \sqrt{r^2 - x'^2} dx' \quad (4)$$

Після взяття інтегралів та спрощення сум скінченних і нескінченно малих величин:

$$dA_c \rightarrow dA_0 = 0,8\Delta \cdot r_1 = 0,8 r_1 dx_1 / \cos(\beta_{I_p}) = 0,8 r_1 dx_1 / K_{I_p} \quad (5)$$

де  $K_{I_p} = \cos(\beta_{I_p})$ . Для вільної струмнини при  $\Theta_{I_p} = \text{tg}(\beta_{I_p}) \leq 0,3287$  маємо  $K_{I_p} \geq 0,95$ , тобто знаменник можна вважати одиницею з похибкою до 5%.

Спожите повітря йде на зростання площі  $A_k$  клуба 1:

$$dA_k = 2\pi r_1 dr_1, \quad (6)$$

та зростання площі  $A_{k,m}$  криволінійного трикутника  $A_{13}GH$ :

$$dA_c = dA_k + dA_{k,m}, \quad (7)$$

Площа криволінійного трикутника  $A_{13}GH$  є різницею площі  $A_{\Delta}$  трикутника  $O_1O_2O_3$  та площі  $A_{\text{сек}}$  секторів клубів 1, 2 та 3, обмежених цим трикутником.

Площа трикутника  $O_1O_2O_3$  зі сторонами завдовжки  $r_1 + r_2$ ,  $r_2 + r_3$  та  $r_1 + r_3$  за формулою Герона після перетворень:

$$A_{\Delta} = ((r_1 + r_2 + r_3)r_1 r_2 r_3)^{1/2}, \quad (8)$$

Кути трикутника за теоремою косинусів:

$$\angle O_i O_j O_k = \arccos \left( 1 - \frac{2r_i r_k}{(r_i + r_j)(r_j + r_k)} \right), \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k \quad (9)$$

За відомими кутами (9) та за рівнянням (8) площа криволінійного трикутника  $O_1O_2O_3$ :

$$A_{к.м.} = A_{\Delta} - A_{сек} = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1r_2r_3} - \frac{r_1^2}{2} \arccos\left(1 - \frac{2r_2r_3}{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)}\right) - \frac{r_2^2}{2} \arccos\left(1 - \frac{2r_1r_3}{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)}\right) - \frac{r_3^2}{2} \arccos\left(1 - \frac{2r_1r_2}{(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}\right) \quad (10)$$

Виразимо радіуси клубів  $r_1$ ,  $r_2$  та  $r_3$ . Довжина проекції відрізка  $A_1A_3$  на вісь  $x$ :

$$x_3 - x_1 = (r_1 + r_3)\cos(\beta_{fp}) = (r_1 + r_3) / (1 + \Theta^2_{fp})^{1/2}; \quad (11)$$

З точки  $O_2$  проводимо лінію, паралельну осі  $x$ . Продовжуємо перпендикуляри  $O_1A_1$  та  $O_3A_3$  до перетину з отриманою лінією і маємо точки, відповідно,  $K_1$  та  $K_3$ . Таким чином отримано прямокутні трикутники  $O_1K_1O_2$  та  $O_2K_3O_3$ . Знайдемо з них зв'язок, якого не вистачає для замикання рівнянь (3) і (11). З трикутників  $OO_iA_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  маємо довжини відрізків  $|O_iA_i| = x_i\Theta_{fp}$ . Оскільки відрізки  $K_1A_1$  та  $O_2A_2$  рівні, то довжина відрізка  $K_1O_1$  становить  $|K_1O_1| = |O_1A_1| + |O_2A_2| = (x_1 + x_2)\Theta_{fp}$ . Аналогічно довжина відрізка  $K_3O_3$ :  $|K_3O_3| = |O_3A_3| + |O_2A_2| = (x_2 + x_3)\Theta_{fp}$ . Довжини відрізків  $|K_1O_2| = x_2 - x_1$ ,  $|O_2K_3| = x_3 - x_2$ ,  $|O_1O_2| = r_1 + r_2$ ,  $|O_2O_3| = r_2 + r_3$ . Теорема Піфагора для прямокутних трикутників  $O_1K_1O_2$  та  $O_2K_3O_3$ :

$$(r_1 + r_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_1 + x_2)^2\Theta_{fp}^2; \quad (12)$$

$$(r_2 + r_3)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2\Theta_{fp}^2; \quad (13)$$

З рівнянь (3), (12) та (13) абсциси центрів клубів (а значить за залежністю (3) і їхні радіуси) утворюють геометричну прогресію:

$$x_2 = qx_1; \quad x_3 = qx_2 = q^2x_1, \quad (14)$$

де знаменник прогресії абсцис:

$$q = (1 + (\Theta\Theta_0)^{1/2}) / (1 - (\Theta\Theta_0)^{1/2}). \quad (15)$$

Підстановка рівнянь (14) і (15) до залежності (11) дає рівняння, розв'язок якого збігається з (1), (2). Це підтверджує правильність даних викладок. При  $\Theta < 1$  за рівняннями (2) та (15):

$$1 \leq q = (1 + 0,069^{1/2}\Theta) / (1 - 0,069^{1/2}\Theta) \leq 1,7125. \quad (16)$$

У цих межах підрахунки за формулою (10) дозволяють замінити її більш простим наближенням:

$$A_{к.м.} = Kr_2^2 = Kq^2r_1^2; \quad 0,1418 \leq K \leq 0,1613. \quad (17)$$

Приймасмо  $K = 0,1509$ , при якому похибка формули (17) не перевищує 6,45%. Оскільки площа криволінійного трикутника не перевищує половину клуба, то похибка результату не перевищить 3,3%.

Приріст площі криволінійного трикутника за формулою (17) з урахуванням незначної зміни  $K$  при зміні  $r_1$ :

$$dA_{к.м.} \approx 2Kq^2 r_1 dr_1. \quad (18)$$

Тоді за рівняннями (5), (6), (7), (3), (2) та (18) маємо:

$$0,8 \frac{r_1 dx_1}{K_{Гр}} = 0,8 \frac{r_1 dr_1}{(\Theta - \Theta_{Гр}) K_{Гр}} = 0,8 \frac{r_1 dr_1}{0,5345 \Theta K_{Гр}} = 2\pi r_1 dr_1 + 2Kq^2 r_1 dr_1, \\ \Theta = 0,8 / 0,5345 K_{Гр} (2\pi + 2Kq^2). \quad (19)$$

При  $K_{Гр} = 1$  та  $K = 0,1509$  це рівняння розв'язується чисельно. Маємо  $\Theta = 0,2246$ . Уточнюємо коефіцієнти та  $\Theta$ :

$$K_{Гр} = \cos(\beta_{Гр}) = (1 + (0,4655\Theta)^2)^{-1/2} = 0,99458; K = 0,16023; \Theta = 0,22497.$$

Наступне наближення:  $K_{Гр} = 0,99456$ ,  $K = 0,16023$ ,  $\Theta = 0,22498 \approx 0,22$ . Наступне наближення повторює вищенаведене. Отримане значення повторює з точністю до другого знаку загальноприйняте [1, 5]  $\Theta = 0,22$ . Відмінність:  $100 \cdot (0,22498 - 0,22) / 0,22 = 2,26\%$ . Підставимо це значення до формули (2) і отримаємо  $\Theta_{Гр} = 0,4655 \cdot 0,22498 = 0,1047 \approx 0,10$ , що повторює дані [6] М.Й.Гримітліна ( $\Theta_{Гр} \approx 0,1$ ) до другого знаку після коми. Отже, отримані дані свідчать про прийнятність висловлених припущень.

Перевіримо вплив криволінійного трикутника  $A_{13}GH$ . Якщо прийняти  $K = 0$ , то його споживання не буде враховано, а  $\Theta = 0,23969 \approx 0,24$ , що на 6,14% більше за вище отримане значення. Тобто вплив трикутника для грубих розрахунків (похибка до 10%) може не враховуватися.

Чим більше розширення струмини, тим швидше її затухання, більші витрати енергії на підживлення. Тому саме це мінімальне значення  $\Theta \approx 0,22$  встановлюється при випуску струмини зі щілини. Отже, без залучення дослідних даних отримано одну з фундаментальних констант вільних струмин – тангенс кута розширення. З використанням закону збереження кількості руху, отримуємо темп затухання струмини. Цей аналіз не наведений, оскільки він добре висвітлений у літературних джерелах (наприклад, [5]) і у контексті даних викладок залишається без змін. У подальшому проведений аналіз буде розповсюджений на складні струмини, в т.ч., криволінійні напівобмежені.

## Висновки

1. Висловлені припущення щодо мінімально можливого споживання навколишнього повітря струминою дозволили отримати кут

- розширення вільної струмини без використання експериментальних даних.
2. Незначна розбіжність між отриманими даними та даними відомих досліджень підтверджує висловлені гіпотези.

#### Список літератури:

1. Ткачук А.Я., Довгалюк В.Б. Аеродинаміка вентиляції: Навчальний посібник. – ІВНВКП «Укрґеліотех», 2009. – 376 с.
2. Мілейковський В.О. Геометричне моделювання плоских напівобмежених струмин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 86. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.– К.:КНУБА, 2010 р. – 472с. – С.187-191.
3. Мілейковський В.О. Геометричне моделювання вільних ізотермічних струмин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 82. Відповідальний редактор В.Є.Михайленко. – К.:КНУБА, 2009 р.– 400с.
4. Мілейковський В.О. Геометричне обґрунтування профілю швидкості в струминних примезових шарах// Будівництво України. №1 2010 р.- С.17-20.
5. Галиев В.Н. Аеродинаміка вентиляції. Учеб. Пособие для вузов.- М.:Стройиздат. 1979.-295с.
6. Гримитлин М.И. Распределение воздуха в помещениях. – М.:Стройиздат, 1982. – 164 с., ил.

Надійшла до редакції 3.10.2012р.