

УДК 539.3

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук
Погорелова О.С., канд. фіз.-мат. наук
Постнікова Т.Г., канд. техн. наук
Гончаренко С.М., інженер

АНАЛІЗ УСТАЛЕНИХ ВІБРОУДАРНИХ ПРОЦЕСІВ В ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ УДАРУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ СИЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

У даній статті продовжуються дослідження, присвячені вивченню віброударних процесів, які були розпочаті в роботах [3-6]. Приводяться результати досліджень усталених віброударних режимів коливань в пружних системах при наявності внутрішнього ударного контакту двох тіл під дією зовнішнього періодичного навантаження. Але на відміну від попередніх робіт, де моделювання удару здійснювалось за допомогою відповідних граничних умов з використанням коефіцієнту відновлення, в цій роботі пропонується інший, більш загальний, підхід, який базується на застосуванні силових характеристик контактної взаємодії. Попередній підхід з використанням граничних умов вимагає чіткої фіксації моменту удару і відповідної корекції початкової фази періодичного навантаження. При наявності у пружній системі більш ніж однієї контактуючої пари вказаний підхід приводить до використання багатоточечних крайових задач, що в певній мірі ускладнює відповідні побудови. Роздільний опис міжударних рухів і процесу удару може також стати проблематичним при використанні більш загальних концепцій теорії співударів твердих тіл. Тому доцільно виконувати побудову та аналіз єдиної форми запису рівнянь руху елементів віброударних систем на всій часовій осі. Ці рівняння повинні описувати повну сукупність реалізованих рухів. Це досягається за допомогою введення нелінійних залежностей, що відображають процес силової взаємодії тіл, які співударяються, чи їх елементів. Зазначені залежності будуються на основі силових характеристик контактної взаємодії $F(x)$ чи $F(x, \dot{x})$, де x - відстань між тілами, що контактують.

Такий підхід суттєво спрощує побудови, що пов'язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем. Це твердження повною мірою відноситься і до аналізу стійкості усталених періодичних віброударних режимів коливань. При моделюванні удару за допомогою відповідних граничних умов з використанням коефіцієнту відновлення

необхідно формулювати спеціальне означення стійкості. В той же час при застосуванні нелінійних силових характеристик контактної взаємодії аналіз стійкості віброударних рухів може проводитися в рамках класичної теорії Флоке.

Для розв'язання нелінійних задач, якими є задачі про віброударний рух пружних систем, використовується чисельний метод продовження розв'язку за параметром. Підхід, що розглядається, демонструється на прикладі системи з двома ступенями свободи, хоча розроблений метод та відповідне програмне забезпечення розраховані на багатопараметричні системи.

1. Постановка задачі

У статті наведені результати розв'язання задачі віброударного руху пружної системи, яка схематично зображена на рисунку 1.

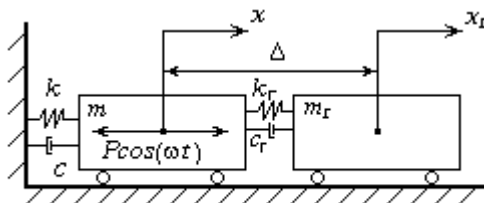


Рис. 1

Перше тіло маси m за допомогою пружини жорсткості k та демпфера з коефіцієнтом згасання c прикріплено до опори. Друге тіло, маси m_r , пружиною жорсткості k_r та демпфером з коефіцієнтом згасання c_r кріпиться до першого тіла. На перше тіло діє гармонійне навантаження $P \cos(\omega t)$. Обидва тіла без тертя ковзають по горизонтальній поверхні. Переміщення першого тіла визначається координатою $x(t)$, а другого – $x_r(t)$. За початок відліку прийняте положення, при якому всі пружини недеформовані, при цьому вважається, що відстань між центрами мас тіл дорівнює Δ . Передбачається, що в процесі руху структура системи може змінюватись внаслідок еволюції динамічних станів за рахунок виникнення ударних контактів елементів системи між собою.

Як вже було сказано, при складанні рівнянь віброударного руху складної пружної нелінійної системи змінної структури дуже важливу роль грає спосіб моделювання удару. Для цього використовується нелінійна сила, яка описує контактну взаємодію тіл, що співударяються. Величина такої сили залежить від відстані між тілами.

Рівняння руху системи, що розглядається, записується у вигляді:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - c_r(\dot{x}_r - \dot{x}) - k_r(x_r - x - \Delta) + F(x_r - x, \dot{x}_r - \dot{x}) &= P \cos \omega t, \\ m\ddot{x}_r + c_r(\dot{x}_r - \dot{x}) + k_r(x_r - x - \Delta) - F(x_r - x, \dot{x}_r - \dot{x}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $F(u, \dot{u})$ - силова характеристика контактної взаємодії, яка взагалі кажучи, залежить від відносного переміщення $u(t) = x_r(t) - x(t)$ і відносної швидкості $\dot{u}(t)$. Введемо $P = \lambda P_0$, де λ - параметр інтенсивності зовнішнього впливу.

При наближеному дослідженні віброударних систем за допомогою характеристик пружної взаємодії найчастіше доцільно враховувати специфіку режиму, реалізованого системою. Тому практичні способи обчислення викладаються при розрахунку конкретних систем. Важливо те, що за допомогою різних нелінійних залежностей можуть бути описані всі основні види силової взаємодії тіл, що співударяються чи їх контактуючих елементів.

У даній роботі ударна взаємодія моделюється за допомогою прикладання до контактуючих тіл нелінійної пружної сили F , яка залежить від відносного переміщення $u(t) = x_r(t) - x(t)$:

$$F(x_r - x) = Cf(x_r - x), \quad (2)$$

де C - коефіцієнт відповідності. Коли тіла не знаходяться в ударному контакті, тобто достатньо віддалені один від іншого і зазор між ними більше деякої величини, яку позначимо d , сила не діє. По мірі їх зближення, між тілами виникає контактна сила F , яка швидко зростає від нуля до деякої постійної величини.

Краще за все функцію f брати як δ -функцію, але з такою функцією неможливо чисельно інтегрувати рівняння (1), тому запропоновано два варіанта моделюючої функції, які так чи інакше наближають нас до δ -функції.

У першому варіанті пропонується функція f , що описується формулами:

$$f(x_r - x) = \begin{cases} 0, & d \leq x_r - x, \\ R - \sqrt{R^2 - [d - (x_r - x)]^2}, & d - \delta \leq x_r - x \leq d, \\ k_3[d - (x_r - x)] - b, & 0 \leq x_r - x \leq d - \delta, \\ k_3d - b, & x_r - x \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Схематично графік такої функції має вигляд, представлений на рис. 2.

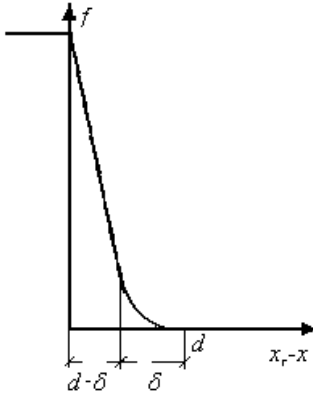


Рис. 2

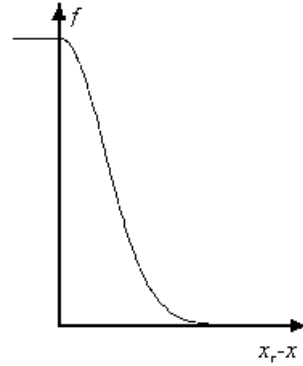


Рис. 3

Тут d – зазор між тілами, при якому виникає відштовхуюча контактна сила взаємодії. При подальшому зменшенні відстані $(x_r - x)$ відштовхуюча сила зростає спочатку повільно, по колу радіусу R , поки зазор $(x_r - x)$ не стане менше $(d - \delta)$, а потім швидко по закону прямої до повного зближення тіл, коли сила вже зростати не може – тіла відштовхуються, відбувся удар. Слід відмітити, що при вдалому моделюванні удару ситуація $(x_r - x) < 0$ неможлива, і та частина графіку моделюючої функції, яка знаходиться у від'ємній частині осі абсцис, не реалізується. Параметри функції $f(x_r - x)$ – радіус кола R та кут нахилу прямої k_3 , слід підібрати таким чином, щоб удар моделювався найкраще. З таких самих міркувань підбирається коефіцієнт відповідності C , за допомогою якого функція $f(x_r - x)$, яка має лінійну розмірність, переводиться у силу F . Параметри b та δ визначаються співвідношеннями:

$$b = R \left(\sqrt{1 + k_3^2} - 1 \right), \quad \delta = \frac{k_3 R}{\sqrt{1 + k_3^2}}. \quad (4)$$

Виходячи з того, що у наших побудовах $d > \delta$, на d накладається таке обмеження:

$$d > \frac{k_3 R}{\sqrt{1 + k_3^2}}. \quad (5)$$

У другому варіанті зміна моделюючої відштовхуючої сили описується експоненціальним законом. Тоді маємо

$$f(x_r - x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}, & x_r - x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x_r-x)^2}{2\sigma^2}}, & 0 < x_r - x \end{cases}. \quad (6)$$

Схематично графік такої функції представлений на рис. 3. Тут також має місце зауваження, що при вдалому моделюванні удару ситуація $(x_r - x) < 0$ не реалізується. Параметри σ та C також слід підбирати таким чином, щоб удар моделювався найкраще.

2. Дослідження віброударного руху в системі двох тіл

Був зроблений аналіз усталених віброударних процесів в пружній системі (1) при моделюванні ударної взаємодії за допомогою функції (2), (3).

Система, що досліджується, має такі характеристики першого тіла: маса $m=1000$ кг, власна частота коливань $\omega_0=6.283185$ рад/с, коефіцієнт демпфірування $\xi=0.03629$. Тіло знаходиться в режимі усталених коливань під дією зовнішнього періодичного навантаження $\lambda P_0 \cos(\omega t)$, де $P_0 = 500$ н.

Приєднане до першого тіла друге має такі характеристики: маса $m=50$ кг, його парціальна частота коливань $\omega=5.646$ рад/с, коефіцієнт демпфірування $\xi=0.2$. Початкова відстань між тілами $\Delta=0.05$ м.

Параметри моделюючої нелінійної пружної сили були вибрані такими: радіус кола $R = 0.01$ м, кутовий коефіцієнт нахилу на лінійному відрізьку $k_3 = 1.0$, коефіцієнт відповідності $C=100000$ н/м. Відстань між тілами, при якій починає діяти сила контактної взаємодії $d=0.04$ м.

При застосуванні методу продовження за параметром [6] необхідно розв'язати проблему знаходження початкової точки для побудови кривих навантаження та амплітудно-частотних характеристик. Для розв'язання цієї проблеми було проведено пряме чисельне інтегрування диференціальних рівнянь при певних значеннях параметрів зовнішнього впливу $\lambda = 3.0$ та частоти зовнішнього навантаження $\omega=7.22566$ рад/с.

На рисунках 4 та 5 представлені графік залежності переміщень тіл ударної системи від часу та фазова траєкторія одноударного Т-періодичного режиму коливань, що встановлюються при заданих значеннях параметрів навантаження.

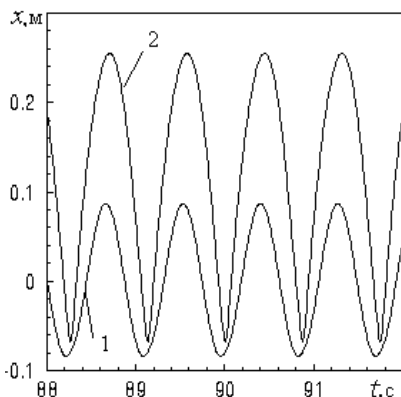


Рис. 4

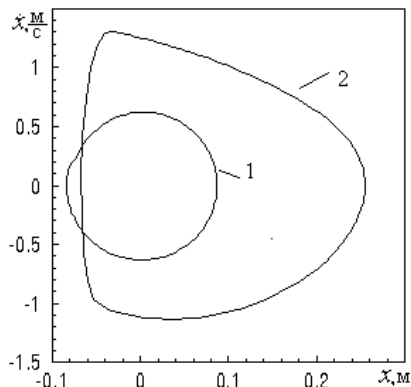


Рис. 5

На рисунках цифрою 1 позначені криві, що відносяться до першого тіла, а цифрою 2 - до другого. З графіку фазової траєкторії на рис. 5 видно, що у момент удару стрибком змінюється швидкість другого тіла, при цьому її знак стає протилежним. Тобто друге тіло змінює напрямку руху - відскакує, зіткнувшись з першим тілом. З графіку траєкторій тіл на рис. 4 видно, що у момент удару контакт між тілами не повний. Для роз'яснення цього факту проаналізуємо, як поводить себе відштовхуюча сила контактної взаємодії F . Залежність цієї сили від відносного переміщення $x_p - x$, тобто від зазору між тілами, представлена на рис. 6. Ця залежність відповідає закону (2), (3) при вибраних значеннях параметрів R, k_3, C . Графік контактної відштовхуючої сили, що дійсно виникає в системі згідно інтегруванню в залежності від часу, представлений на рис. 7.

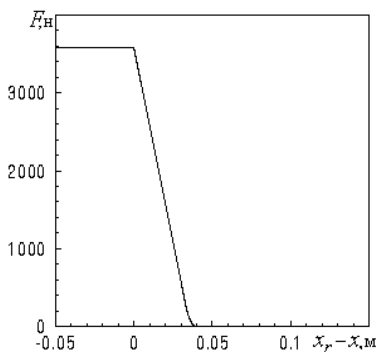


Рис. 6

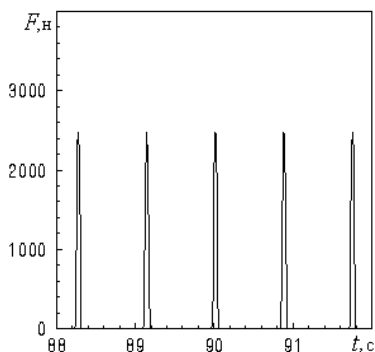


Рис. 7

З графіків на рисунках 6 та 7 видно, що при обраних значеннях параметрів R, k_3, C сила F , не досягаючи максимуму, настільки сильно відштовхує друге тіло від першого, що воно відскакує, не досягнувши повного контакту. Як вже відзначалося раніше, параметри R, k_3 треба підібрати такими, щоб удар моделювався щонайкраще. Наведемо для приклада результати, отримані при двох інших значеннях k_3 . Графік руху двох тіл при $k_3 = 0.2$ приведений на рис. 8. Як видно із порівняння з графіком на рис. 4 ($k_3 = 1.0$), моделювання удару значно погіршилося. При $k_3 = 5$ (див. рис. 9) якісно картина не відрізняється від приведеної на рис. 4 ($k_3 = 1.0$), однак контакт між тілами в момент удару стає ще гірше: при $t = 88.27$ с маємо

k_3	1	5
$ x_r - x , \text{м}$	0.011083	0.021192

Після виконання невеликого більш детального дослідження впливу параметрів R та k_3 на якість результату, були вибрані приведені вище значення цих параметрів.

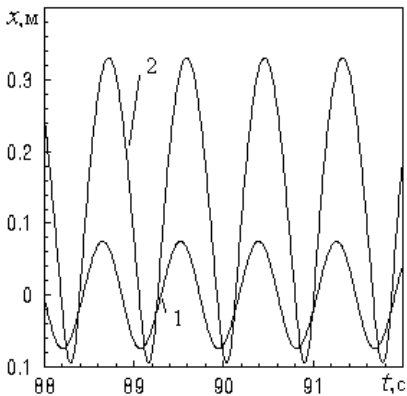


Рис. 8

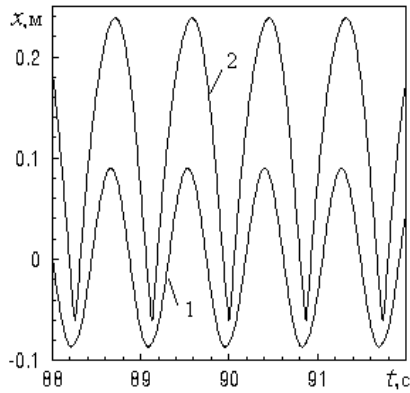


Рис. 9

Таким чином, проведені дослідження дозволили вибрати параметри моделюючої сили та отримати координати початкової точки, необхідної для побудови кривих навантаження та амплітудно-частотних залежностей

за методом продовження розв'язку за параметром. Початкова точка відповідає ustalеному режиму коливань, зображеному на рис. 4.

Далі, згідно методу продовження розв'язку за параметром, при покроковій зміні параметру λ були побудовані криві навантаження двомасової системи - взаємозалежність полуросмаху вимушених коливань динамічної системи $X_{\max} = \frac{|x_{\min}| + |x_{\max}|}{2}$ та значення коефіцієнту навантаження λ (рис. 10). Побудовані криві навантаження відповідають стійким режимам коливань і позначені на графіку безперервною лінією.

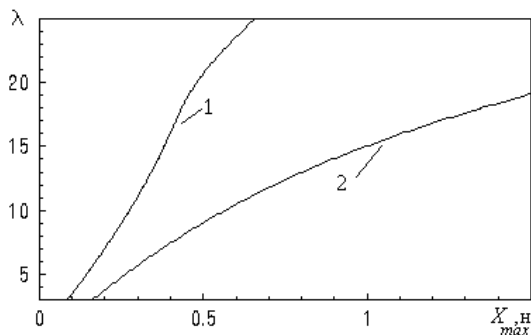


Рис. 10

При покроковій зміні параметру ω згідно методу продовження розв'язку за параметром були побудовані амплітудно-частотні характеристики коливань системи (рис. 11).

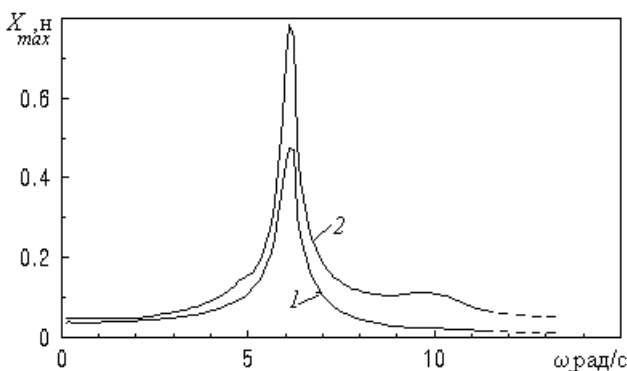


Рис. 11

При значенні частоти зовнішнього навантаження $\omega = 11.626$ рад/с даний коливальний режим втрачає стійкість (дільниці амплітудно-частотної характеристики, що відповідають нестійким режимам коливань, позначені пунктирною лінією). Щоб переконатися в цьому, проведемо пряме чисельне інтегрування при значеннях параметрів зовнішнього навантаження $\omega = 11.626$ рад/с та $\lambda = 3.0$. При цьому реалізується режим $2T$ -періодичних коливань. На рисунках 12-14 представлені реалізація $2T$ -періодичного режиму коливань, його фазова характеристика та нелінійна пружна сила, що збуджується в цьому випадку і моделює удар.

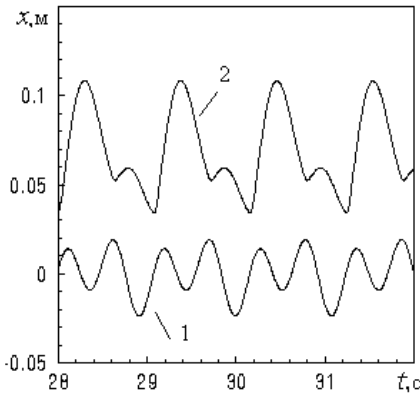


Рис. 12

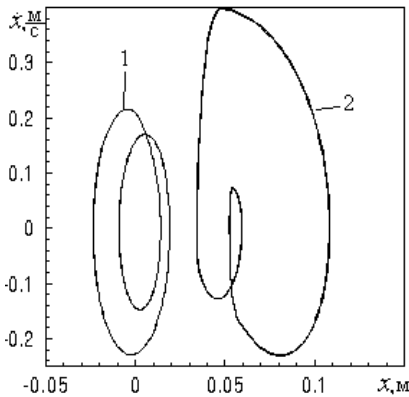


Рис. 13

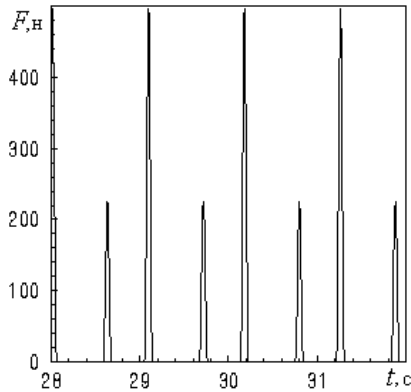


Рис. 14

Сила, моделююча удар, зміна якої описується експоненціальним законом (6), використовується авторами в подальшій роботі для дослідження віброударних коливань башти з маятниковим гасителем. Результати цього дослідження будуть описані окремо, в іншій статті.

Отже, ще раз підкреслимо, що єдина форма запису рівнянь руху віброударних систем на всій часовій осі дозволяє описати повну сукупність реалізованих рухів. Це суттєво спрощує побудови, які пов'язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем. Запропонований для цього підхід моделювання удару за допомогою нелінійної пружної сили контактної взаємодії є більш загальним і дозволяє також зручно, в рамках класичної теорії Флоке виконувати аналіз стійкості усталених періодичних віброударних режимів коливань.

Аналіз віброударного руху двомасової системи тіл з моделюванням удару за допомогою нелінійної сили, яка змінюється за певним законом (3), показав, що така сила добре моделює процес руху при відповідному підборі її параметрів.

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем. "Наука", Москва, 1978.
2. *Дукарт А.В.* Способ построения периодических режимов движения многомассовых виброударных систем и его приложение к расчету ударного гасителя колебания с демпфированием // Проблемы машиностроения и надежности машин. №3. – 1993. – С.16-22.
3. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Стійкість сталих режимів коливань віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10-18.
4. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2002.-Вип.70.- С.69-80.
5. *Постнікова Т.Г., Погорелова О.С., Борисенко В.Г.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при зовнішньому ударному контакті // Матеріали Третьої Всеукраїнської наукової конференції "Математичні проблеми технічної механіки" - Дніпродзержинськ. - 2003.- С.97.
6. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.70.

Матеріал надійшов до редакції 16.04.04.