

УДК 531.31

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук

М.В. Гончаренко, канд. техн. наук

## СТАБІЛІЗАЦІЯ СТІЙКОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ПЛЯХОМ ЗМІНИ ПАРАМЕТРІВ НАВЕДЕНИХ ПОЛІВ ДОДАТКОВОЇ ВІБРАЦІЇ

Розглядаються питання, пов'язані з впливом стохастичної складової в параметричному навантаженні на стабілізацію стійкості динамічних пружних систем. Межі областей динамічної стійкості будуються, виходячи з означення стійкості відносно моментних функцій. Розглядаються задачі стійкості плоскої форми згину балки і трубопровідних систем при періодично нестационарному параметричному навантаженні. Побудовані області стійкості для різних випадків, що дозволяє узагальнити вплив стохастичної складової параметричного збудження на структуру областей динамічної стійкості і зробити висновки щодо можливості стабілізації коливальних процесів.

### Вступ

Вперше питання про можливість підвищення стійкості пружних систем за допомогою періодичних вібрацій було поставлене В.Н.Челомеєм [7], який досліджував поведінку авіаційних конструкцій. Було показано, що дана проблема актуальна в цій галузі, оскільки такі типові для авіаційної техніки елементи як циліндричні замкнені оболонки, панелі різного обрису та інші, часто знаходяться під дією динамічного параметричного навантаження.

На принципову можливість підвищення стійкості за рахунок випадкових вібрацій вказано в роботах М.Ф. Діментберга і К.В.Фролова [6]. Аналогічні питання розглядалися в дослідженнях S.T.Agiaratnam [8]. Але у вказаних роботах були використані асимптотичні підходи, область використання яких обмежена.

У даній роботі досліджується вплив стохастичної складової параметричного навантаження на конфігурацію областей динамічної стійкості системи. В представлених дослідженнях використовується метод моментів, що передбачає складання детерміністичних рівнянь відносно моментів різних порядків на основі стохастичних рівнянь руху цієї системи. Задача формулюється таким чином. Розглядається два види параметричного збудження, яке діє на пружну механічну систему: гармонійчне збудження і сума гармонічного і випадкового збудження. Якщо при певних параметрах додаткового випадкового навантаження область динамічної стійкості, що відповідає комбінованому збудженню, ширше області динамічної стійкості, що відповідає детермінованому

збудженню, то має місце ефект стабілізації, обумовлений додатковим стохастичним навантаженням. Аналогічна задача розглядалась для циліндричної оболонки [1].

### Рівняння руху системи

Нехай динамічний стан системи описується рівнянням

$$M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C \frac{d \bar{x}}{dt} + (K + \mu K_g \cos vt) \bar{x} = 0. \quad (1)$$

де  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  - динамічні змінні, що характеризують стан системи,  $M$ ,  $C$  і  $K$  - відповідно матриці мас, демпфірування і жорсткості,  $K_g$  - матриця геометричної жорсткості,  $\nu$  та  $\mu$  - частота і амплітуда гармонійного параметричного збудження відповідно. Вважається, що сили опору руху, які визначаються матрицею  $C$ , що відповідають  $i$ -ій формі власних коливань, ортогональні  $j$ -ій формі власних коливань ( $i \neq j$ ).

Після переходу до нормальних координат рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C^* \frac{d \bar{x}}{dt} + (K^* + \mu K_g^* \cos vt) \bar{x} = 0, \quad (2)$$

де  $C^* = \Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, 2\xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_n \omega_n)$ ,

$$K^* = \Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2),$$

$$K_g^* = \Phi^T K_g \Phi = (k_{ij}^g)_{i,j=1}^n.$$

Матриця  $\Phi$  створена з  $n$  ортонормованих по масі власних векторів,  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  - власні частоти системи,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - модальні параметри затухання. Далі будемо вважати, що усі модальні параметри затухання однакові і визначаються логарифмічним декрементом споруди

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = \xi = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Якщо серед власних частот  $\omega_i$  немає близьких до величини  $\omega_i - \omega_j$ , то частина доданків рівняння (2) біля резонансних частот, що досліджуються, будуть мати більш високий порядок малості по відношенню до основних "резонансних" доданків. В такому випадку при  $\nu \approx \omega_i$  втрата стійкості буде відбуватись по  $i$ -тій нормальній формі [2]. Тоді зони нестійкості знаходяться біля значень частот, що визначаються виразом

$$\nu = \frac{2\omega_i}{m}, \quad \left( \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n \\ m=1, 2, \dots \end{array} \right), \quad (3)$$

і називаються простими резонансами. Межі таких зон при гармонічному навантаженні визначаються виразом [3]

$$v \approx 2\omega_i \left( 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\mu^2 (k_{ii}^g)^2 - 4\xi_i^2} \right). \quad (4)$$

Аналогічно у випадку комбінаційного резонансу – при  $v \approx (\omega_i \pm \omega_j) / 2$  в рівняннях першого наближення, отриманих з (2), залишаються тільки два рівняння, що описують коливання по  $i$ -ій і  $j$ -ій нормальним формам [2]. В даній роботі досліджуються межі стійкості в зонах простих головних резонансів для різних систем.

На практиці дуже часто до періодичного збудження додається ще стохастична складова. Наприклад, це може бути пов'язано з тим, що на вібрацію конструкції крім періодичності роботи обладнання впливає неврівноваженість певних елементів. Такий характер навантаження можна представити сумою гармонічної та стохастичної складових. Система (2) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C^* \frac{d \bar{x}}{dt} + (K^* + K_g^* (\mu \cos vt + f(t))) \bar{x} = 0. \quad (5)$$

де  $f(t)$  - центрований стаціонарний випадковий процес.

Досліджується стійкість системи, коли частота періодичного параметричного навантаження лежить в зоні головного простого резонансу (3). У першому наближенні приймається, що при побудові областей стійкості в зоні простого резонансу достатньо розглянути одне рівняння системи (5). При цьому доданки, що містять недіагональні елементи матриці геометричної жорсткості, будуть більш високого порядку малості і не враховуються. За допомогою методу усереднення для зазначених випадків будуються моментні рівняння і задача побудови областей стійкості зводиться до задачі на власні значення [3].

Для різних задач будуються області стійкості при параметричному навантаженні, яке представляється гармонічним навантаженням і як сума гармонічного і стохастичного, причому стохастична складова є випадковим процесом з прихованою періодичністю, а кореляційну функцію можна представити виразом:

$$\langle f(t) f(t+\tau) \rangle = \left[ \cos(\theta_\alpha |\tau|) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin(\theta_\alpha |\tau|) \right] \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|), \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2,$$

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha \theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}; \quad \Psi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \theta^2 + 4\alpha^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}, \quad (6)$$

де  $\theta$  - прихована частота,  $\sigma^2$  - дисперсія,  $\alpha$  - радіус кореляції.

### Динамічна стійкість плоскої форми згину балки

Області стійкості побудовані при параметрах при параметрах  $\omega_1=0,6 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_2=2,4 \text{ рад/с}$ ,  $h_1=12$ ,  $h_2=4$ ,  $\alpha=k(\omega_1+\omega_2)$ ,  $\theta_\alpha=1$ ,  $\xi=0,01$ .

На рис. 1 межі стійкості показані відносно перших моментів, на рис. 2 – відносно других. Суцільна товста лінія відповідає межах стійкості при гармонічному параметричному навантаженні. Інші графіки на рис. 1,а і рис. 2,а побудовані при  $\sigma^2=1.0$ ; на рис. 1,б і рис. 2,б – при  $\sigma^2=2.0$ . Штрихові лінії відповідають  $k=2$ , суцільні тонкі -  $k=0.5$ , штрихпунктирні -  $k=0.25$ . З наведених графіків видно, що врахування додаткового випадкового навантаження змінює конфігурацію областей нестійкості.

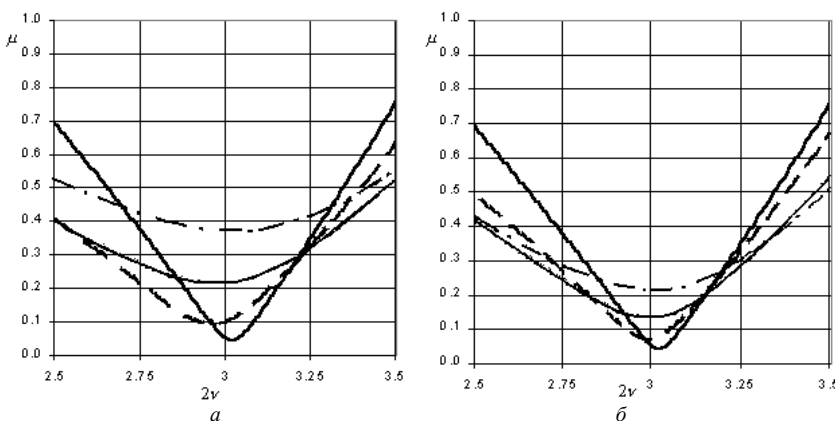


Рис. 1

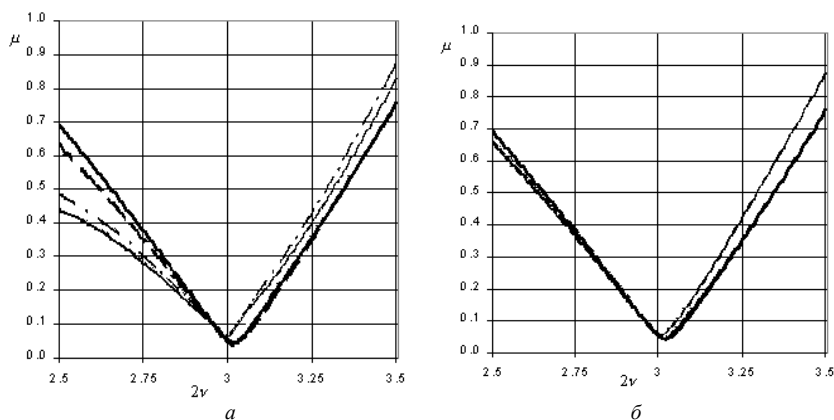


Рис. 2

### Головна балка робочої площадки

Області динамічної нестійкості в зоні простого головного резонансу наведені на графіках рис. 3 [4]. Суцільною лінією показані межі стійкості при гармонічному параметричному навантаженні, інші графіки відповідають випадку, коли в параметричному навантаженні присутня стохастична складова.

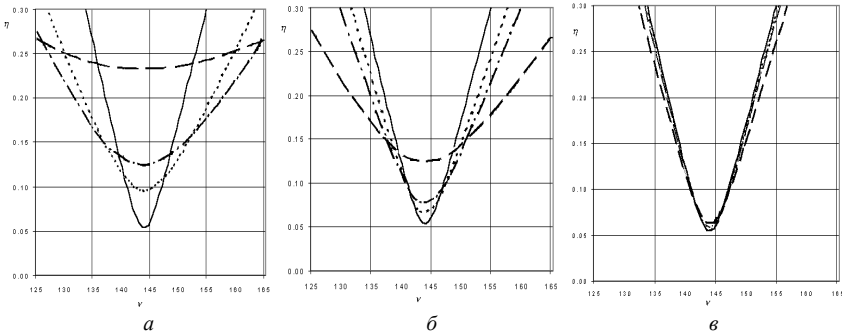


Рис. 3. Області стійкості балки робочої площадки

На рис. 3,а межі стійкості в зоні головного резонансу  $2\tilde{\omega}_1$  побудовані для різних значень радіуса кореляції при  $\theta=10\text{rad}/c$ . Стандарт стохастичного навантаження  $\sigma$  прийнятий 10% від значення  $N_0$ . Штриховою лінією показані межі стійкості при радіусі кореляції  $\alpha=2\tilde{\omega}_1$ , штрихпунктирною – при  $\alpha=0.5\tilde{\omega}_1$ , пунктирною – при  $\alpha=0.25\tilde{\omega}_1$ . На рис. 3,б) аналогічним чином показані межі стійкості в зоні головного резонансу для різних значень радіуса кореляції при  $\theta=20\text{rad}/c$ . При збільшенні частоти прихованої періодичності стабілізуюча дія стохастичної складової зменшується. Це видно з рис. 3,в), де показані межі стійкості при  $\theta=\tilde{\omega}_1 \approx 72\text{rad}/c$ , а при  $\theta=100\text{rad}/c, 144\text{rad}/c(2\tilde{\omega}_1)$ ... графіки практично не відрізняються один від одного.

### Трубопровідні системи

На рис. 4 на всіх графіках суцільною лінією показані межі областей стійкості при гармонічному параметричному навантаженні [5]. Графіки, що зображені на рис. 4,а) побудовані при  $\theta=5\text{rad}/c$  і  $\sigma^2=0,01$ , на рис. 4,б – при  $\theta=5\text{rad}/c$  і  $\sigma^2=0,02$ , на рис. 3,в – при  $\theta=10\text{rad}/c$  і  $\sigma^2=0,02$ ; на рис. 3,г – при  $\theta=20\text{rad}/c$  і  $\sigma^2=0,02$ . Штриховою лінією

показані межі стійкості при  $\alpha=2\omega_0$ , пунктирними при  $\alpha=0,5\omega_0$  і  $\alpha=0,25\omega_0$ .

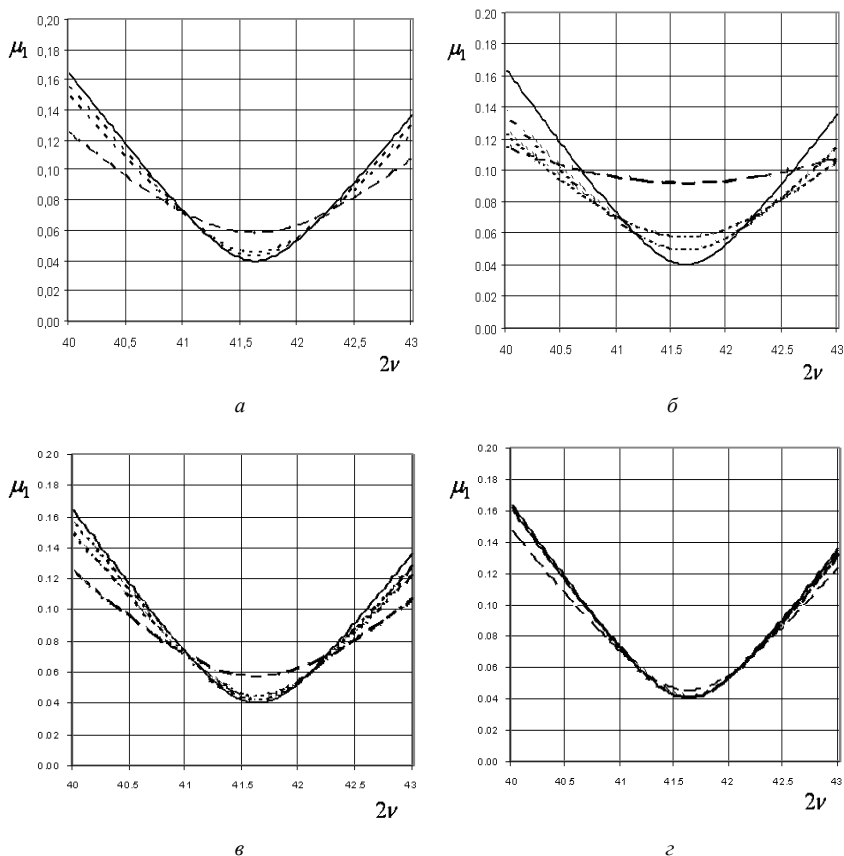


Рис. 4. Межі областей стійкості при періодично нестационарному навантаженні

### Висновки

Аналіз результатів показує, що стохастичні флуктуації створюють стабілізуючий ефект. При збільшенні несучої частоти випадкового процесу межа стійкості при періодично нестационарному навантаженні наближається до межі стійкості при гармонічному параметричному навантаженні. При збільшенні параметра кореляції випадкового процесу стійкість системи збільшується безпосередньо у зоні резонансу і

зменшується зі зростанням різниці між частотами гармонічної і стохастичної складових. Збільшення дисперсії збільшує стабілізуючий ефект флуктуацій випадкового процесу. Таким чином підбравши параметри додаткової вібрації можна збільшити динамічну стійкість системи.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В., Гончаренко М.В.* Стабілізація стійкості сталих коливальних режимів динамічних систем при комбінованому збудженні // *Авиационно-космическая техника и технология*, 2004. – вып.3(11). – с.51-58.
2. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем /* Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.
3. *Гончаренко М.В., Дехтярюк Є.С.* Аналіз стійкості пружних систем в зонах простих і комбінаційних резонансів при стохастичному параметричному навантаженні // *Опір матеріалів і теорія споруд*. - К.: КНУБА, 2004, Вип. 74. - с.115-123.
4. *Гончаренко М.В., Дехтярюк Є.С.* Дослідження параметричних резонансів комбінованої пластинчато-стержевої системи // *Опір матеріалів і теорія споруд*. - К.: КНУБА, 2004, Вип. 75. – с.47-56.
5. *Гончаренко М.В.* Динамічна стійкість трубопровідних систем при періодично нестационарному параметричному навантаженні // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 2010 р. – Вип. 85. – с. 153-163.
6. *Диментберг М.Ф., Фролов К.В.* Колебания системы с одной степенью свободы при действии периодической силы и изменении собственной частоты по случайному закону // *Машиноведение*, 1966. - №4
7. *Челомей В.Н.* Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. – М.: Редиздат Аэрофлота, 1939. – 79с.
8. *Ariaratnam S.T., Tam D.S.* Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator// *ZAMM*, 56, 1976. – p.449-452.

*Стаття надійшла до редакції 28.06.2013 р.*

*Ворона Ю.В., Гончаренко М.В.*

#### **СТАБИЛИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПУТЕМ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НАВЕДЕННЫХ ПОЛЕЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВИБРАЦИИ**

Рассматриваются вопросы, связанные с влиянием стохастического характера параметрической нагрузки на стабилизацию устойчивости динамических упругих систем. Границы областей динамической устойчивости строятся, исходя из определения устойчивости относительно моментных функций. Рассматриваются задачи устойчивости плоской формы изгиба балки и трубопроводных систем при периодически нестационарном параметрическом воздействии. Построены области устойчивости для разных случаев, что позволяет обобщить влияние стохастической составляющей параметрического возбуждения на структуру областей динамической устойчивости и сделать выводы касательно возможности стабилизации колебательных процессов.

*Vorona Y., Goncharenko M.*

**STABILIZATION DYNAMIC SYSTEMS STABILITY BY PARAMETERS VARIATION OF INDUCED FIELD ADDITIONAL VIBRATION**

The stabilization effect of parametric additional random excitation on the dynamic stability of elastic systems is studied. The boundaries of dynamic regions of stability are constructed with regard to moment functions. Cases of dynamic stability of a beam uniplanar bending and pipeline system is considered when parametric load to represent by periodical non stationary process. Regions of dynamic probability stability is obtained for various example that is allowed to abstract influence of stochastic parametric load on dynamic stability regions structure and draw a conclusion about stabilization possibility of vibrating process.