

УДК 539.375

Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Сахаров О.С., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Максим'юк Ю.В.

ВИЗНАЧЕННЯ J -ІНТЕГРАЛА ПРИ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОМУ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЗМІШАНОГО РУЙНУВАННЯ

На основі енергетичних підходів розроблена і апробована методика роздільного обчислення параметрів механіки руйнування при змішаному руйнуванні.

1. Вступ. При довільному розподіленні зовнішніх навантажень в околі вершини тріщини виникає складний напружено-деформований стан, який призводить до одночасної реалізації декількох типів руйнування тріщини – нормального відриву (тип *I*) і поперечного (тип *II*) або повздовжнього (тип *III*) зсуву. В цьому випадку виникає потреба роздільного визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) K_I , K_{II} і K_{III} , що відповідають кожному з типів руйнування. Найбільш ефективними для визначення КІН є енергетичні методи, що ґрунтуються на обчисленні КІН за величинами J -інтеграла J_k ($k = I, II, III$), або тотожними до них, у випадку пружного деформування, величинами вивільнення енергії G_k .

Проблема застосування енергетичних методів до визначення параметрів механіки руйнування при змішаному руйнуванні висвітлена в значній кількості наукових робіт [3–6, 8–11], в яких розглянуті метод обчислення контурного J -інтеграла [10], метод підатливості [3], метод еквівалентного об'ємного інтегрування [4], метод віртуального зростання тріщини для обчислення компонент J -інтеграла J_{x_i} (де x_i – система координат, пов'язаних із фронтом тріщини) [5] та величин G_k , пов'язаних із різними типами руйнування [11], дискретно-аналітичний метод похідної від жорсткості (DASD) [8, 9].

Як відомо, теоретично J -інтеграл є незалежним (інваріантним) від шляху інтегрування, тобто таким, величина якого не залежить від форми і розмірів контуру інтегрування та дорівнює нулю по будь-якому замкненому контуру. Не зважаючи на це, в роботах різних авторів різних років, зокрема в [7, 9], зазначається наявність відмінностей результатів скінченоелементного обчислення контурного J -інтеграла. Про це свідчить також власний досвід авторів [1]. Пропоновані шляхи подолання цієї проблеми ґрунтуються на певних обмеженнях на форму і розміри області

інтегрування та усереднення отримуваних із використанням різних контурів величин J -інтеграла, що призводить до зайвих обчислювальних витрат і не гарантує вірогідності отримуваних результатів.

В роботі [9] зазначено, що метод еквівалентного об'ємного інтегрування і метод похідної від жорсткості, чисельна еквівалентність яких може бути доведена, звичайно забезпечують отримання результатів задовільної точності. Проте, аналіз наведених в цій роботі даних свідчить, що отримані фундаментальні властивості інваріантності J -інтеграла теж не задовольняються. Таким чином, висловлене в статті [9] твердження про найбільшу ефективність зазначених методів викликає сумнів. При цьому жоден з використовуваних методів не дозволяє отримувати інваріантні значення J -інтеграла

При дослідженні задач змішаного руйнування із використанням енергетичних методів окрему проблему становить розділення частин енергії деформування, що стосуються кожного з типів руйнування, і визначення величин відповідних параметрів механіки руйнування K_k , J_k або G_k . В багатьох випадках обчислення цих величин здійснюється шляхом їх подання через компоненти J -інтеграла J_{xi} [4–6]. В цьому випадку для отримання єдиного розв'язку необхідно знати знак K_I і K_{II} (K_{III}), що в свою чергу потребує додаткових обчислень. В роботах [8–10] запропоновано інший підхід, що ґрунтується на декомпозиції полів параметрів напружено-деформованого стану на складові, що відповідають симетричній (нормальний відрив) та кососиметричній (поперечний зсув) складовим. Такий підхід, хоча і дозволяє проводити роздільне визначення параметрів для різних типів руйнування, але теж призводить до додаткових обчислювальних витрат.

Таким чином, актуальною задачею є розробка на основі МСЕ ефективної методики визначення параметрів механіки руйнування, застосування якої дозволяє отримувати результати, що відповідають фундаментальним умовам інваріантності J -інтеграла, в тому числі при змішаному руйнуванні.

В роботах [1, 2] була розроблена нова ефективна методика обчислення J -інтеграла в дискретних моделях МСЕ – метод реакцій, що ґрунтується на представленні величин, які входять до виразу J -інтеграла із використанням вузлових реакцій і переміщень. В згаданих роботах показано, що отримане дискретне подання J -інтеграла тотожно дорівнює вихідному виразу, сформульованому для континуальної області. При цьому, на відміну від вище перелічених методів, отримані із використанням методу реакцій значення J -інтеграла є інваріантними відносно контура інтегрування.

Метою даної роботи є порівняння ефективності обчислення контурного J -інтеграла із методами віртуального росту тріщини і еквівалентного об'ємного інтегрування, та розробка методики роздільного обчислення величин J -інтеграла J_k , що відповідають різним типам руйнування, в умовах змішаного руйнування, на основі МСЕ.

При розробці методики розглядаються тіла з тріщинами нормального відриву і поперечного зсуву при активному статичному ізотермічному зовнішньому навантаженні без урахування розвантаження.

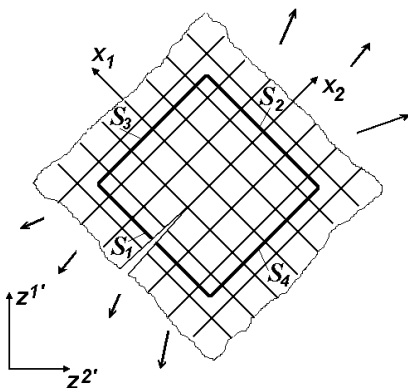


Рис. 1

2. Методика визначення контурного J -інтеграла за напруженнями та градієнтами переміщень.

Розглянемо фрагмент дискретної моделі тіла з тріщиною. Досліджуваний об'єкт розглядається в базисній системі координат z^i , відносно якої тріщина орієнтована довільно. Для обчислення J -інтеграла оберемо прямокутний контур, що проходить через середини скінчених елементів (СЕ). Скінченоелементна модель в межах розташування

контура є регулярною і ортогональною, сторони контура паралельні вісям x_i місцевої системи координат СЕ (рис. 1).

J -інтеграл за зазначеним контуром може бути поданий у вигляді:

$$J = \int_S (W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{kl} t^l) ds, \quad (1)$$

де W – величина повної енергії деформування; σ^{ij} – компоненти тензора

деформації; $\zeta_{i2} = \frac{\partial u_i}{\partial x_2}$ – градієнти переміщень; u_i – переміщення; n_i –

компоненти зовнішньої нормалі до контуру інтегрування S ; n_t – проекція зовнішньої нормалі на напрямку вектора розвитку тріщини; t^l – проекції вектора напрямку розвитку тріщини на вісі місцевої системи координат.

Після розгортання добутку в останньому складнику за індексом l , зважаючи, що $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ отримаємо:

$$J = \int_S \left(W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds. \quad (2)$$

Відповідно до напрямку зовнішньої нормалі \vec{n} до відрізків, що утворить контур, виділимо наступні його складові: лінії, відрізки яких збігаються за напрямком з осями x_1 CE – s_1 і s_2 , а також відрізки та прямі паралельні вісі x_2 – s_3 і s_4 . В загальному випадку кількість відрізків, що складають зазначені складові контуру, може бути довільною. Відповідно, подамо (2) у вигляді:

$$J = \int_{s_1} \left(W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_1 + \int_{s_2} \left(W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_2 + \\ + \int_{s_3} \left(W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_3 + \int_{s_4} \left(W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_4 .$$

З урахуванням значень проекції нормалі n_t на напрямки x_2 ($n_t|_{s_1} = -1$, $n_t|_{s_3} = 1$, $n_t|_{s_2} = n_t|_{s_4} = 0$) одержимо:

$$J = \int_{s_1} \left(-W - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_1 + \int_{s_2} \left(-n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_2 + \\ + \int_{s_3} \left(W - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_3 + \int_{s_4} \left(-n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_4 .$$

Остаточний вираз обчислення J -інтеграла за напруженнями і градієнтами переміщень набуде вигляду:

$$J = J(\sigma, \zeta) = \int_{s_3} W ds_3 - \int_{s_1} W ds_1 - \int_{s_1} n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds_1 - \int_{s_2} n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds_2 - \\ - \int_{s_3} n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds_3 - \int_{s_4} n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds_4 .$$

Величина повної енергії деформування при пружному деформуванні дорівнює:

$$W = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} .$$

З урахуванням скінчено-елементного подання контуру, J -інтеграл набуде вигляду:

$$J = J(\sigma, \zeta) = \sum_{j=1}^{N_3} W ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} W ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} \left(n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left(n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds \right)_j - \sum_{j=1}^{N_3} \left(n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds \right)_j - \sum_{j=1}^{N_4} \left(n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds \right)_j, \quad (3)$$

де N_1, N_2, N_3, N_4 – кількість скінчених елементів на ділянках контуру S_1, S_2, S_3, S_4 відповідно.

Дослідження збіжності результатів обчислення J -інтеграла, проведені в роботі [1] для задач про тріщини нормального відриву, засвідчили, що збіжність результатів обчислення J -інтеграла за формулою (3) з точністю близько 2% досягається при використанні контура, що проходить через центри СЕ і розташований на відстані трьох характерних розмірів СЕ від вершини тріщини. При цьому в межах області інтегрування характерний розмір СЕ повинен становити $1/10$ від характерного розміру тріщини, а топологічні розміри контура (при врахуванні симетрії) – 3 на 6 СЕ (рис.1). Більше віддалення контуру від вершини тріщини і, відповідно, збільшення його розмірів, призводить до зменшення похибки лише на 0,2%. У подальшому визначення J -інтеграла проводилось із використанням зазначеного контуру на різних регулярних СЕ сітках. При цьому необхідно зазначити, що, при розгляді тріщин нормального відриву, внаслідок симетрії напружено-деформованого стану відносно поверхні тріщини при розрахунку можна розглядати лише одну із симетричних частин дискретної моделі. З іншого боку, проведення розгляду контуру інтегрування на двовимірній дискретній моделі не зменшує загальності запропонованого підходу з точки зору можливості його поширення на просторові задачі.

З метою обґрунтування ефективності використання описаної методики обчислення контурного J -інтеграла (3), було розглянуто тестовий приклад про розтяг нескінченної пластини з тріщиною скінченної довжини $2l=2$ см в умовах плоскої деформації (рис. 2). Вихідні дані: розтягуюче зусилля $q = 100$ кг/см², модуль пружності $E = 10^7$ кг/см², коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.333$. При проведенні розрахунків в роботі [9] розглядався фрагмент пластини розміром $2b \times 2b = 8 \times 8$ см (рис.2), завантажений на краях нормальними і дотичними навантаженнями, що є еквівалентними до внутрішніх зусиль, створюваних прикладеним на нескінченності розтягуючим навантаженням. В даній роботі були розглянуті фрагменти пластини, характерний розмір яких є в 10, 20 та 40 разів більшим за розмір тріщини, завантажені розтягуючим навантаженням. При цьому показано, що збільшення розмірів фрагмента понад 20 разів від розміру

тріщини майже не впливає на напружено-деформований стан в околі верхини тріщини.

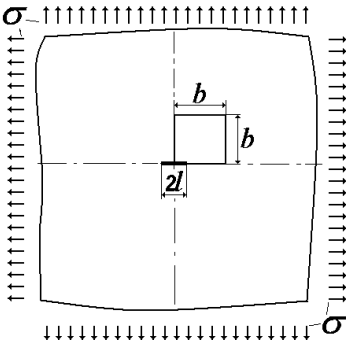


Рис. 2

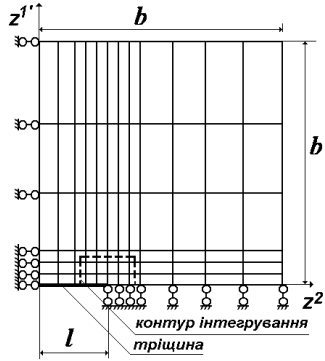


Рис. 3

На рис. 4 наведені величини J -інтеграла в залежності від кількості невідомих дискретної скінченної моделі. Лінія 1 яка прийнята за еталонне значення, отримана в роботі [8] за формулами:

$$J_I = G_I = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) = 2.793 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}, \quad (4)$$

де $K_I = \sigma \sqrt{\pi l}$.

Результати, отримані за формулою (3) при різній кількості невідомих N дискретної моделі показані на рис. 4 у вигляді кривої 2. Обчислення здійснено для наведеного на рис. 3 контуру, розміри якого визначені згідно із наведеними в [1] висновками про ефективність методики обчислення контурного інтеграла. Результати, отримані за методами еквівалентного об'ємного інтегрування і похідної від жорсткості [10] показані у вигляді кривої 3. Як видно, збіжність результатів, отриманих із використанням формули (3) є

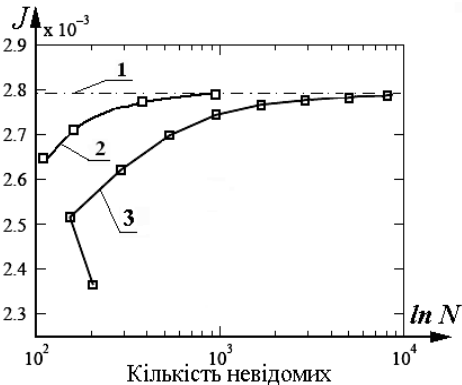


Рис. 4

набагато кращою. Зокрема, отримання величини J -інтеграла з похибкою в межах 0,5% за формулою (3) потребувало дискретної моделі із 358 невідомими, а для використаних в статті [9] методів – біля 1200, тобто майже в 3,5 рази більше. Таким чином, використання методу обчислення контурного J -інтеграла із використанням величин напружень і градієнтів переміщень при дотриманні визначених в роботі [1] вимог до розмірів контура інтегрування є досить ефективним.

3. Методика обчислення J -інтеграла за величинами вузлових переміщень u і вузлових реакцій R . Величин, що входять до виразу контурного J -інтеграла (енергія деформування, градієнти переміщень і напруження) можна подати через вузлові реакції і переміщення вузлів дискретної скінченоелеметної моделі.

Розглянемо контур, що проходить в напрямку вісі x_1 через середини СЕ, і по границям СЕ паралельно вісі x_2 (рис.5,а). При цьому відрізок контуру інтегрування в межах одного скінченного елемента має вигляд, наведений на рис. 5,б.

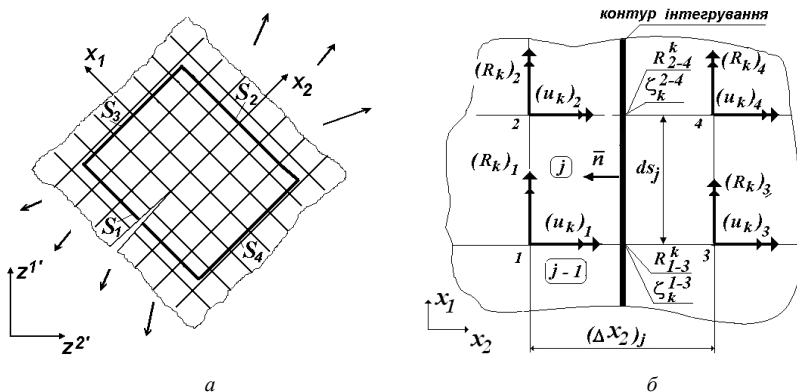


Рис.5.

Величина енергії деформування СЕ W , обчислена вздовж відрізка ds дорівнює:

$$W ds_j = \frac{1}{2(\Delta x_2)} \{u\}_j^T \{R\}_j, \quad (5)$$

де $\{u\}_j$, $\{R\}_j$ – вектори переміщень і вузлових реакцій j -го СЕ, через який проходить контур інтегрування:

$$\{u\}_j^T = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{12}\}_j = \{(u_1)_1 \ (u_2)_1 \ (u_3)_1 \ (u_1)_2 \ \dots \ (u_2)_4 \ (u_3)_4\}.$$

В останньому виразі для кожної компоненти вектора $(u_k)_i$, індекси в дужках позначають напрямок переміщення в місцевій системі координат, а індекси поза дужками – номери вузлів в межах СЕ (1, 2, 3, 4, рис. 5,б) Аналогічну структуру має вектор $\{R\}_j$.

Введемо наступні позначення:

$$R_{2-4}^k = R_{1-3}^k = n_i \sigma^{ik} \frac{ds}{2}.$$

В той же час ці величини можуть бути подані із використанням вузлових реакцій елемента:

$$R_{2-4}^k = \frac{(R_k)_2 + (R_k)_4}{2}, \quad R_{1-3}^k = \frac{(R_k)_1 + (R_k)_3}{2}.$$

Аналогічно можуть бути подані величини градієнтів ζ_{k2} переміщень за напрямком x_2 на сторонах 1–2 і 3–4 СЕ:

$$\zeta_k^{2-4} = \frac{(u_k)_4 - (u_k)_2}{\Delta x_2}, \quad \zeta_k^{1-3} = \frac{(u_k)_3 - (u_k)_1}{\Delta x_2}.$$

З урахуванням цього та формули (5) вираз для контурного інтеграла (3) набуде вигляду:

$$J = J(u, R) = \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta x_2)_j} \{u\}_j \{R\}_j - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta x_2)_j} \{u\}_j \{R\}_j + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{(R_q^k + R_{q'}^k)(u_k^{q'} - u_k^q)}{2\Delta x_2} \right)_j + \sum_{j=1}^{N_2} \left(\frac{(R_q^k + R_{q'}^k)(u_k^{q'} - u_k^q)}{2\Delta x_2} \right)_j + \\ + \sum_{j=1}^{N_3} \left(\frac{(R_q^k + R_{q'}^k)(u_k^{q'} - u_k^q)}{2\Delta x_2} \right)_j + \sum_{j=1}^{N_4} \left(\frac{(R_q^k + R_{q'}^k)(u_k^{q'} - u_k^q)}{2\Delta x_2} \right)_j, \quad (6)$$

де індекси q і q' застосовані для позначення вузлів СЕ, розташованих з двох боків від контура.

Для обґрунтування ефективності використання розробленої методики в задачах обчислення J -інтеграла для тріщин нормального відриву, було

використано поданий вище тестовий приклад (рис.2). Проведено порівняння результатів величин J -інтеграла, визначених за формулою (3) і (6). Як видно з наведених в таблиці 1 результатів, на всіх дискретних моделях похибки величин J -інтеграла, обчисленого за вузловими реакціями і переміщеннями, є майже вдвічі меншими ніж при застосуванні напружень і градієнтів переміщень. Таким чином, визначення J -інтеграла із використанням вузлових реакцій і переміщень є більш ефективним.

Таблиця 1

Кількість невідомих	$J_I(\sigma, \zeta), 10^{-3}$	$\delta, \%$	$J_I(u, R), 10^{-3}$	$\delta, \%$
108	2.620	6.190	2.688	3.760
168	2.740	1.900	2.758	1.250
358	2.780	0.470	2.786	0.250
1000	2.789	0.150	2.793	≈ 0

4. Особливості обчислення J_I і J_{II} при змішаному руйнуванні. При змішаному руйнуванні внаслідок відсутності симетрії для визначення J -інтеграла необхідним є розгляд дискретної моделі для тіла в цілому і використання для обчислення J -інтеграла суцільного контуру, що охоплює вершину тріщини і має розрив на поверхні тріщини (рис. 6).

В часному випадку пружного деформування при змішаному руйнуванні двовимірного тіла повна величина J -інтеграла є сумою величин J_I і J_{II} , що відповідають нормальному відриву і поперечному зсуву:

$$J = J_I + J_{II}.$$

Зв'язок величин J -інтеграла (величини питомої енергії, що необхідна для утворення одиниці поверхні тріщини) з відповідними значеннями КІН за умов лінійного деформування визначається за формулами:

$$K_I = \sqrt{J_I E/k}; \quad K_{II} = \sqrt{J_{II} E/k},$$

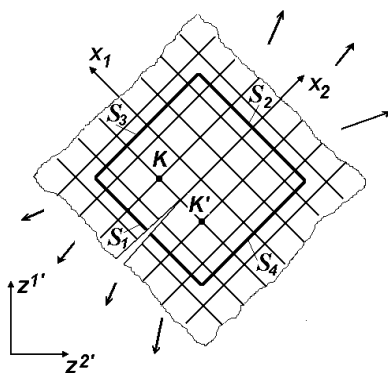


Рис. 6

де $k=1$ за умови плоского напруженого стану; $k=1-\nu^2$ за умови плоскої деформації.

Один з підходів, що пропонується для роздільного визначення складових J -інтеграла полягає в проведенні процедури симетризації напружено-деформованого стану згідно I і II типу руйнування.

Розглянемо дві точки K і K' , розташовані симетрично по відношенню до площини тріщини (рис.6.). Згідно із [7, 8, 10] поля переміщень для кожної з них можна подати у вигляді :

$$u = u^I + u^{II} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{Bmatrix},$$

Аналогічне подання може бути використано також і для полів напружень і деформацій:

$$\sigma = \sigma^I + \sigma^{II}, \quad \varepsilon = \varepsilon^I + \varepsilon^{II}.$$

З використанням наведених вище виразів для J -інтеграла отримаємо:

$$J_I = \int_{\Omega^*} \left(\sigma_{ij}^I \frac{\partial u_j^I}{\partial x_i} - W^I \delta_{li} \right) \frac{\partial q_l}{\partial x_i} dA, \quad J_{II} = \int_{\Omega^*} \left(\sigma_{ij}^{II} \frac{\partial u_j^{II}}{\partial x_i} - W^{II} \delta_{li} \right) \frac{\partial q_l}{\partial x_i} dA,$$

де Ω^* – частина області, яка повністю оточує вершину тріщини; W^I, W^{II} – щільності енергії деформації, які відносяться до I і II типу руйнування:

$$W_I = \int_s \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^I ds, \quad W_{II} = \int_s \sigma_{ij}^{II} \varepsilon_{ij}^{II} ds,$$

δ_{ij} символ Кронекера.

Такий підхід призводить до зайвих обчислювальних процедур і ускладнює визначення J -інтеграла.

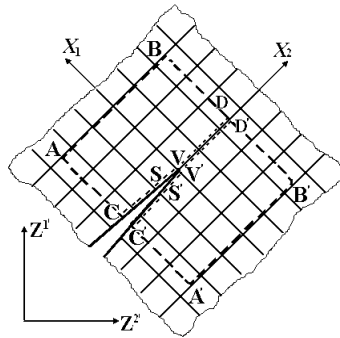


Рис. 7

Для обчислення величин J -інтеграла при змішаному руйнуванні із використанням подання J -інтеграла за величинами вузлових реакцій і переміщень розглянемо контур $CABDD'B'A'C'$, що охоплює вершину тріщини і має розрив на поверхні тріщини (рис. 7).

Цей контур може бути поданий як сума двох П-подібних частин замкнених контурів, що розташовані по обидві сторони від тріщини. Відповідно,

$$J_{CABDD'B'A'C'} = J_{CABD} + J_{C'A'B'D'}$$

З іншого боку величини J -інтеграла по кожному з замкнених контурів $CABDVSC$ і $C'A'B'D'V'S'C'$ можуть бути подані як суми J -інтеграла по їх П-подібним частинам і лініям, що проходять вздовж поверхні тріщини. При цьому, згідно із фундаментальною властивістю інваріантності J -інтеграла, його значення по замкненому контуру повинно дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned} J_{O(CABDVSC)} &= J_{CABD} + J_{CSVD} = 0, \\ J_{O(C'A'B'D'V'S'C')} &= J_{C'A'B'D'} + J_{C'S'V'D'} = 0. \end{aligned}$$

Відповідно J -інтеграл по контуру $CABDD'B'A'C'$ буде дорівнювати взятій з протилежним знаком сумі J -інтегралів по лініям $CSVD$ і $C'S'V'D'$:

$$J_{CABDD'B'A'C'} = J_{CABD} + J_{C'A'B'D'} = -J_{CSVD} - J_{C'S'V'D'}$$

Використовуючи формулу (6) і враховуючи виконання умов рівноваги вузлів отримаємо, що J -інтеграл по лінії дорівнює добутку реакцій вузла V вершини тріщини на переміщення вузла S перед вершиною тріщини:

$$\begin{aligned} J_{CSVD} &= \frac{\{R\}_V \{u\}_S}{2\Delta x_2}, \\ J_{C'S'V'D'} &= \frac{\{R\}_{V'} \{u\}_{S'}}{2\Delta x_2}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \{R\}_V = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}_V^T \text{ і } \{R\}_{V'} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}_{V'}^T -$$

вектори сумарних вузлових реакцій SE , що розташовані з кожного боку від вершини тріщини по напрямках місцевої системи координат SE ;

$$\{u\}_S = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_S, \quad \{u\}_{S'} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{S'} -$$

вектори вузлових переміщень (рис. 8).

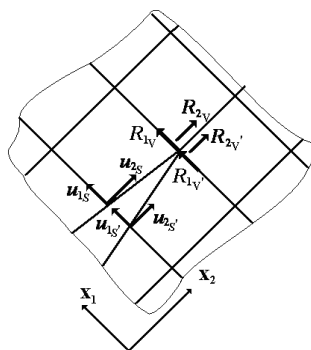


Рис. 8

При цьому, зважаючи на виконання умов рівноваги у вершині тріщини: $\{R\}_V = -\{R\}_{V'}$.

Підставивши ці рівняння у вираз для J -інтеграла по контуру, одержимо

$$\begin{aligned} J_{CABDD'B'A'C'} &= -\frac{\{R\}_V \{u\}_S}{2\Delta x_2} - \frac{\{R\}_{V'} \{u\}_{S'}}{2\Delta x_2} = \frac{\{R\}_{V'}}{2\Delta x_2} (\{u\}_S - \{u\}_{S'}) = \\ &= \frac{1}{2\Delta x_2} \left(\begin{Bmatrix} R_{V_1'} & R_{V_2'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{S_1} - u_{S_1'} \\ u_{S_2} - u_{S_2'} \end{Bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, вираз J -інтеграла має два добутки реакцій і переміщень по напрямках x_1 і x_2 , які відповідатимуть J_I і J_{II} .

$$J = J_I + J_{II} = \frac{1}{2\Delta x_2} \left(R_{V_1'} (u_{S_1} - u_{S_1}') + R_{V_2'} (u_{S_2} - u_{S_2}') \right). \quad (7)$$

З метою обґрунтування вірогідності отриманого виразу для обчислення J_I і J_{II} розглянуто тестові задачі про деформування нескінченної пластини з тріщиною в умовах нормального відриву і поперечного зсуву. Вихідні дані: зовнішнє навантаження $q = 1 \text{ кг/см}^2$, модуль пружності $E = 1 \text{ кг/см}^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

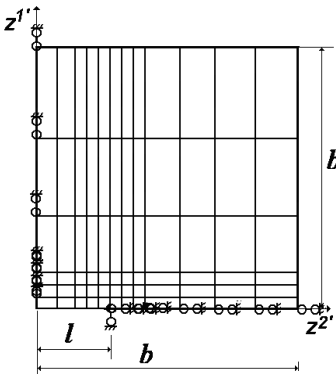


Рис.9

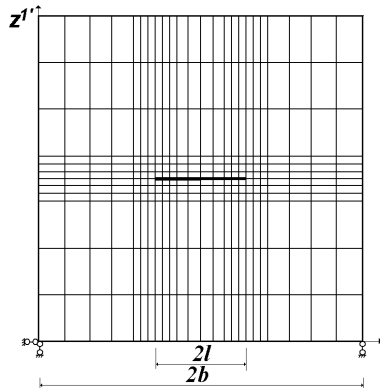


Рис.10

При розв'язанні задачі використані наступні варіанти розрахункових схем: в умовах нормального відриву – $1/4$ частини розглядуваного

фрагмента пластини, дискретна модель наведена на рис.3 для випадку поперечного зсуву – $\frac{1}{4}$ частини розглядуваного фрагмента пластини, дискретна модель наведена на рис.9, при розгляді окремо та сумісно прикладених навантажень, що відповідають нормальному відриву і поперечному зсуву – весь фрагмент пластини, дискретна модель наведена на рис.10.

Для $\frac{1}{4}$ частини пластини тріщина задана із використанням граничних умов, а у випадку цілої пластини – шляхом задання різних номерів вузлів на протилежних берегах тріщини.

Значення J -інтеграла J_I і J_{II} , отримані для $\frac{1}{4}$ частини пластини із використанням формули (7) при роздільному розгляді навантажень, що відповідають нормальному відриву і поперечному зсуву, збігаються із еталонними, визначеними згідно до роботи [8] для випадку тріщини нормального відриву – за формулою, аналогічною (4) – $J_I = 2.859$ кг/см, а для випадку поперечного зсуву:

$$J_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} (1 - \nu^2) = 2.859 \text{ кг/см},$$

де $K_{II} = \tau \sqrt{\pi d}$.

Величини J -інтеграла, обчислені для $\frac{1}{4}$ частини пластини із використанням формули контурного інтеграла (6) відрізняються від обчислених із використанням формули (7) на величину порядку 10^{-17} . Таким чином, J -інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулю, що є однією із ознак виконання фундаментальної властивості його інваріантності.

Значення J_I і J_{II} , отримані із використанням формули (7) для розрахункової схеми цілої пластини, як при роздільному так і при сумісному виникненні кожного з типів руйнування, повністю збігаються із отриманими для $\frac{1}{4}$ частини пластини. Таким чином, вираз (7) дозволяє отримувати вірогідні величини J_I і J_{II} при змішаному руйнуванні без застосування додаткової обробки результатів скінченоелементного розв'язання задачі.

Для дослідження вірогідності запропонованого підходу для змішаного руйнування при несиметричній відносно тріщини розрахунковій схемі розглянуто тестовий приклад про розтяг нескінченної пластини з похилою тріщиною, розташованою під кутом β до лінії дії навантаження (рис.11, а, б). При $\beta=45^\circ$ прикладене в різний спосіб навантаження спричиняє однаковий напружено-деформований стан в околі вершини тріщини, що відповідає змішаному руйнуванню. При розрахунку

розглядалась частина пластини розміром $b \times b$. Фрагменти відповідних дискретних моделей в околі вершини тріщини показані на рис. 12, а, б.

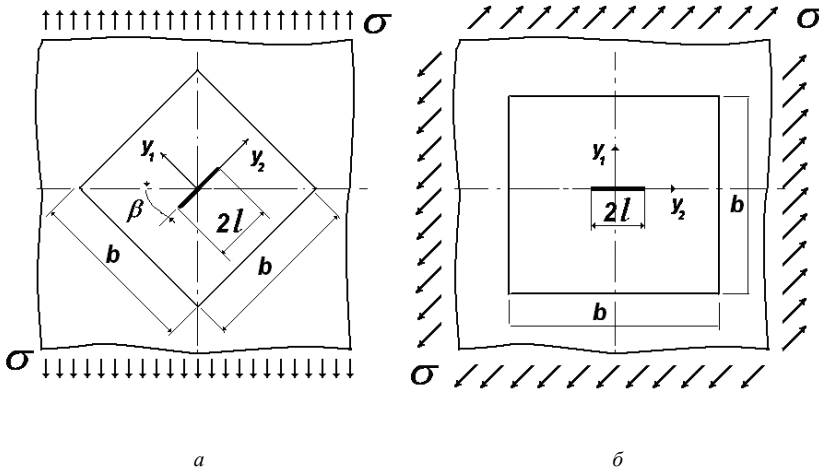


Рис. 11

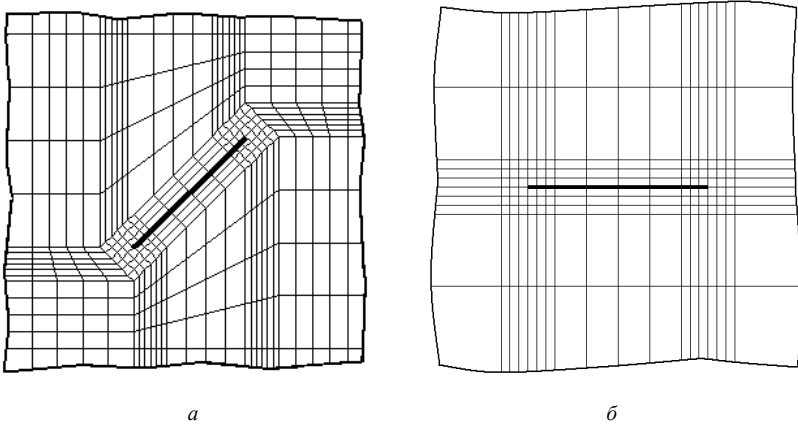


Рис. 12

Отримані для обох розрахункових схем значення J_I і J_{II} також збігаються з еталонними. При цьому, за відсутності симетрії напруженого стану визначення J -інтеграла в цілій пластині для похилої тріщини не потребувало жодних додаткових обчислювальних процедур.

Таким чином, проведене в даній роботі порівняння підходів до обчислення J -інтеграла в скінченноелементних задачах показало, що при використанні однакових дискретних моделей похибки обчислення контурного J -інтеграла за величинами напружень і градієнтів переміщень є меншими, ніж при використанні методів еквівалентного об'ємного інтегрування і методу похідної від жорсткості. Подання контурного J -інтеграла через вузлові реакції і переміщення (метод реакцій) дозволяє зменшити ці похибки ще в два рази.

Розроблений на основі методу реакцій підхід до обчислення J -інтеграла при змішаному руйнуванні дозволяє при мінімумі обчислювальних витрат отримувати вірогідні результати, що також відповідають фундаментальній властивості інваріантності J -інтеграла, для випадків як симетричних так і несиметричних відносно тріщини розрахункових схем досліджуваних об'єктів.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Особливості визначення J -інтеграла в дискретних моделях метода скінченних елементів. – Опір матеріалів і теорія споруд. – № 76, 2005. – с.86-97.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Метод реакцій для обчислення J -інтеграла в просторових нелінійних задачах механіки руйнування // Опір матеріалів і теорія споруд, № 79, 2006. – С.3-17.
3. *Вычислительные методы в механике разрушения:* Пер. с англ./ Под ред. С.Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
4. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування простових тіл. Монографія. – КНУБА, 2005. – 298 с.
5. *Никишков Г.П., Вайниток В.А.* Метод виртуального роста трещины для определения коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} // Проблемы прочности, 1986. – №6. – С.86-92.
6. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 1980. – 256 с.
7. *Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения: Пер. с япон. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
8. *Giner E., Fuenmayor F.J., Bessa A.J.* An implementation of the stiffness derivative method as a discrete analytical sensitivity analysis and its application to mixed mode in LEFM. // Engineering Fracture Mechanics.– v.68(18). – 2002. – P.2051-2071.
9. *Giner E., Fuenmayor F.J., Baeza L., Taranson J.E.* Error estimation for the finite element evaluation of G_I and G_{II} in mixed-mode linear elastic fracture mechanics // Finite Elements in Analysis and Design. – v.41. –2005. – P.1079-1104.
10. *Rice J.R.* A path independent integral and approximate analysis of strain concentration by notches and crack // J.Appl.Mech. , 1968. – № 35. – P.379-386.
11. *Yang Z.J, Chen J.F., Holt G.D.* Efficient evaluation of stress intensity factors using virtual crack extension technique // Computers and Structures. – v.79. –2001. –P.2705-2715.