

УДК 539.3

Гоцуляк Є.А., д-р техн. наук,
Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук,
Лук'янченко О.О., канд. техн. наук,
Борисенко В.Г., канд. техн. наук

ПОБУДОВА РЕДУКОВАНИХ РІВНЯНЬ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПЛОСКОЇ ФОРМИ ЗГИНУ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Розроблений ефективний чисельний підхід до побудови на основі стандартних процедур сучасних обчислювальних комплексів скінченноелементного аналізу редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем.

В статті [1] автори запропонували методику побудови засобами сучасних обчислювальних комплексів редукованих моделей для дослідження стійкості динамічних станів пружних систем при параметричному навантаженні. Редукування відбувалося за допомогою метода узагальнених координат. Редукована модель визначалася своїми редукованими матрицями мас, жорсткості, демпфірування та геометричної жорсткості і мала вигляд

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + C^* \dot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + \beta f(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0, \quad (1)$$

де редуковані матриці мас M^* , демпфірування C^* , жорсткості K^* , геометричної жорсткості K_G^* розмірністю $m \times m$ представлялися відповідно виразами:

$$M^* = V^T M V, \quad (2)$$

$$C^* = V^T C V, \quad (3)$$

$$K^* = V^T K V, \quad (4)$$

$$K_G^* = V^T K_G V. \quad (5)$$

Для побудови редукованої матриці мас і матриці демпфірування визначалися частоти власних коливань та відповідні власні форми. За допомогою обчислювальної процедури визначення реакції системи на узагальнені переміщення, які описують форми коливань, будувалася редукована матриця жорсткості. Для побудови редукованої матриці геометричної жорсткості виконувалися процедури розв'язання задачі стійкості та визначення реакції системи на задане поле переміщень у вигляді форм втрати стійкості конструкції.

За допомогою запропонованої методики були побудовані редуковані рівняння параметричних коливань балки та оболонки від дії повздовжніх сил, рами від дії зосереджених вертикальних сил. Але при тестуванні запропонованої методики в задачах динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем виникла необхідність змінити процедуру отримання редукованої матриці геометричної жорсткості.

В даній роботі для цього в докритичному напруженому стані знаходяться реакції конструкції на узагальнені переміщення, які описують форми коливань, що нормовані з урахуванням малого параметру. Далі згортання оператора на основі базису, що складається з форм коливань, і знаходження різниці між згорнутими операторами в околі докритичного і ненавантаженого станів дозволяють формувати редуковану матрицю геометричної жорсткості. В роботі застосована процедура розв'язання задачі нелінійної статyki при поетапному навантаженні пружної системи. Вона формулюється таким чином

$$(K^* + K_G^*)(U + V) = P + R, \quad (6)$$

де U та V - вектор вузлових переміщень від навантаження та матриця, складена з форм вільних коливань, K^* , K_G^* - редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, P - вектор вузлових навантажень, R - матриця реакцій пружної системи на форми вільних коливань. Тут

$$K^*U = P, \quad K_G^*U = 0. \quad (7)$$

Якщо представити $R = R_K + R_{K_G}$, тут R_K - матриця реакцій пружної системи на задане поле переміщень при лінійній постановці задачі, тоді

$$K^*V = R_K. \quad (8)$$

Нелінійність має місце при розв'язанні задачі

$$\lambda K_G^*V + \lambda^2 SVV + \lambda^3 TVVV = \lambda R_{K_G^*}, \quad (9)$$

де λ - коефіцієнт, що дозволяє зменшувати поле переміщень за модулем, S - квадратичний оператор, T - кубічний оператор.

Квадратичні та кубічні оператори при малому λ дають значно менший вклад ніж лінійний, тому вираз можна переписати у вигляді

$$\lambda K_G^*V = \lambda R_{K_G^*} \quad \text{або} \quad K_G^*V = R_{K_G^*}. \quad (10)$$

При формулюванні задачі необхідно виконати умову ортогональності вектора P до всіх векторів матриці R

$$R^T P = 0. \quad (11)$$

Це дає можливість ввести такі граничні умови, які дозволяють визначити реакцію пружної системи по тих степенях свободи, що є ортогональними дії навантаження.

Процедура розв'язання нелінійної задачі статки з поетапним навантаженням дозволяє визначити матрицю реакцій системи R_{zaz} , яка може бути представлена у вигляді

$$(K^* + K_G^*)V = R_{zaz}. \quad (12)$$

Тоді редукована матриця геометричної жорсткості K_G^* визначається за формулою

$$K_G^* = (R_{zaz} - R_K)^T V. \quad (13)$$

Таким чином, в задачах динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем побудова редукованої матриці геометричної жорсткості виконується за допомогою згортання оператора на основі базису, що складається з форм коливань, і знаходження різниці між згорнутими операторами в околі докритичного і ненавантаженого станів.

В роботі запропонований чисельний підхід, протестований на задачах побудови редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину тонкостінної високої балки та стержневих ферм.

Висока балка, яка навантажена парами $M(t)$ в площині найбільшої жорсткості, представлена на рис. 1.

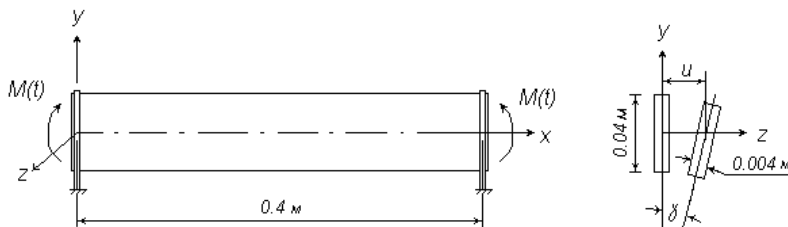


Рис. 1. Тонкостінна висока балка

Геометричні та механічні характеристики балки приймалися такими:
 $F = 0.00016 \text{ м}^2$, $J_y = 2.133 \text{ Е} \cdot 10^{-4}$, $J_z = 2.133 \text{ Е} \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$,

$E = 2.06 \text{ E}11 \text{ Па}$, $G = 0.792 \text{ E}11 \text{ Па}$, $\eta = 0.3$, $J_k = 8.0128 \text{ E}-10 \text{ м}^4$,
 $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

Навантаження приймалося у вигляді $M(t) = M_0 \cos \theta t$, $M_0 = 1 \text{ Нм}$.

Періодичне навантаження, що діє у площині найбільшої жорсткості балки, є параметричним навантаженням по відношенню до згино-крутильних деформацій із площини її дії. Якщо малі бокові збудження з часом затухають, то плоска форма згину динамічно стійка. У випадку виникнення інтенсивних згинно-крутильних коливань балки із площини найбільшої жорсткості при малих бокових збудженнях плоска форма згину динамічно нестійка.

Відповідна задача динамічної стійкості плоскої форми згину балки описується [2] рівняннями з періодичними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + \omega_{ku}^2 \left[u_k - \frac{M(t)l^2}{k^2 \pi^2 EJ_y} \gamma_k \right] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + \omega_{k\gamma}^2 \left[\gamma_k - \frac{M(t)}{GJ_k} u_k \right] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

де u - згин балки в площині Ouz , γ - кут закручування, EJ_y - жорсткість балки в площині Oxu , GJ_k - крутильна жорсткість, $M(t)$ - періодичне навантаження.

Частоти згинних ω_{ku}^2 та крутильних $\omega_{k\gamma}^2$ коливань ненавантаженої балки визначаються за формулами

$$\omega_{ku} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{EJ_y}{\rho F} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_{k\gamma} = \frac{k\pi}{rl} \left(\frac{GJ_k}{\rho F} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

тут ρ - питома вага балки, r - полярний радіус інерції.

Граничні умови балки при шарнірному опиранні по обох кінцях записуються таким чином

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) = \gamma(0, t) = \gamma(l, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma(l, t)}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Введемо позначення

$$y_k(t) = \begin{bmatrix} u_k(t) \\ \gamma_k(t) \end{bmatrix} - \text{вектор узагальнених координат,}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} \omega_{ku}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{k\gamma}^2 \end{bmatrix} - \text{редукована матриця жорсткості,} \quad (17)$$

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega_{ku}^2 l^2}{k^2 \pi^2 EJ_y} \\ \frac{\omega_{k\gamma}^2}{GJ_k} & 0 \end{bmatrix} - \text{редукована матриця геометричної жорсткості.}$$

Матриці жорсткості і геометричної жорсткості нормовані по матриці мас. Тоді розрахункова модель (1) в матричній формі набуває вигляду

$$\ddot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + M(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0. \quad (18)$$

Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину балки зводиться до визначення редукованих матриць жорсткості K^* та геометричної жорсткості K_G^* .

Спочатку за допомогою обчислювального комплексу формується модель конструкції, задаються її геометричні і механічні характеристики. Далі виконується розрахунок конструкції на вільні коливання. В результаті розрахунку отримані дві перші частоти згинних та крутильних коливань ω_{1u} , $\omega_{1\gamma}$ і відповідні форми власних коливань $\bar{\varphi}_{1u}$, $\bar{\varphi}_{1\gamma}$ (рис. 2,3).

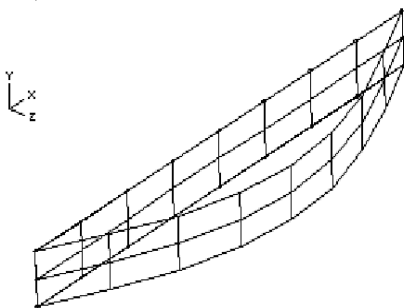


Рис. 2. Перша згинна форма коливань балки
($\omega_{1u} = 366.57 \text{ c}^{-1}$)

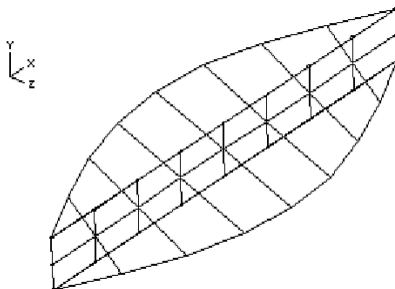


Рис. 3. Перша крутильна форма коливань балки
($\omega_{1\gamma} = 3962.81 \text{ c}^{-1}$)

Далі формується файл з новими граничними умовами та навантаженнями. У блок граничних умов [7] додаються граничні умови у вигляді в'язів, що перешкоджають переміщенням в усіх вузлах балки і переміщенням в вузлах, в яких прикладаються моменти $M(t)$. У блок навантажень додаються навантаження, які відповідають першим формам згинних та крутильних коливань. Форми коливань балки були зменшені у 10000 разів для більш точного статичного розрахунку. Для кожної форми виконаний статичний розрахунок конструкції і визначена відповідна реакція $K\bar{\varphi}_{1u}, K\bar{\varphi}_{1\gamma}$. Матриця власних форм нормована по матриці мас, тобто $\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_i = E$, де $E = \text{diag}(1, 1)$. Тому після обчислення редукована матриця жорсткості отримана у вигляді діагональної матриці $K^* = \text{diag}(\omega_{1u}^2, \omega_{1\gamma}^2)$. Виконана процедура розв'язання нелінійної задачі статики на поетапне навантаження конструкції. Отримана редукована матриця суми матриць жорсткості та геометричної жорсткості $K^* + K_G^*$. Редукована матриця геометричної жорсткості обчислена за формулою

$$(K^* + K_G^*) - (K^*) = K_G^*. \quad (19)$$

Для даної балки результати чисельних розрахунків порівнювались з аналітичними.

Результати, що отримані за допомогою обчислювального комплексу:

- редукована матриця жорсткості

$$K^* \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.34386 \times 10^{-3} & 2.822028 \times 10^{-7} \\ -2.92944 \times 10^{-12} & 1.5645092 \times 10^{-1} \end{bmatrix},$$

- сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості

$$(K^* + K_G^*) \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.34386 \times 10^{-3} & 3.41605 \times 10^{-5} \\ 3.473628 \times 10^{-5} & 1.564575 \times 10^{-1} \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & 3.387829 \times 10^3 \\ 3.473628 \times 10^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Результати, що отримані аналітично:

- перші частоти згинних та крутильних коливань, що отримані за формулами (2):

$$\omega_{lu} = \frac{3.1415^2}{0.4^2} \left(\frac{2.06 \times 10^{11} \times 2.133 \times 10^{-10}}{7800 \times 0.00016} \right)^{\frac{1}{2}} = 365.99 \text{ c}^{-1},$$

$$\omega_{1\gamma} = \frac{3.1415}{0.014 \times 0.4} \left(\frac{0.792 \times 10^{11} \times 8.0128 \times 10^{-10}}{7800 \times 0.00016} \right)^{\frac{1}{2}} = 3961.67 \text{ c}^{-1},$$

- редукована матриця жорсткості

$$K^* = \begin{bmatrix} 133948 & 0 \\ 0 & 15694830 \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Тут $a_{11} = a_{22} = 0$, коефіцієнти a_{12} та a_{21} обчислюємо за формулами

$$a_{12} = \frac{l^2}{k^2 \pi^2 EJ_y} \times \omega_{lu}^2, \quad (21)$$

$$a_{12} = \frac{0.4^2}{1 \times 3.1415^2 \times 2.06 \times 10^{11} \times 2.133 \times 10^{-10}} \times 365.99^2 = 49.424,$$

$$a_{21} = \frac{1}{GJ_k} \times \omega_{1\gamma}^2, \quad (22)$$

$$a_{21} = \frac{1}{0.792 \times 10^{11} \times 8.0128 \times 10^{-10}} \times 3961.67^2 = 2.401 \times 10^5,$$

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & 49.424 \\ 2.401 \times 10^5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Розглянемо задачу

$$a_{11} \times a_{22} - (M^*)^2 a_{12} \times a_{21} = 0. \quad (23)$$

Визначимо добуток діагональних членів $a_{11} \times a_{22}$ та $a_{12} \times a_{21}$ редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості:

- аналітичні коефіцієнти

$$a_{11} \times a_{22} = 365.99^2 \times 3961.67^2 = 21.02 \times 10^{11},$$

$$a_{12} \times a_{21} = 49.424 \times 2.401 \times 10^5 = 11.86 \times 10^6,$$

- коефіцієнти, що отримані за допомогою обчислювального комплексу

$$a_{11} \times a_{22} = 366.57^2 \times 3962.81^2 = 21.02 \times 10^{11},$$

$$a_{12} \times a_{21} = 3388 \times 3474 = 11.77 \times 10^6.$$

Добутки коефіцієнтів приблизно однакові за значенням.

Таким чином, редуковані рівняння динамічної стійкості плоского згину високої балки набувають вигляду:

- в аналітичній постановці

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 365.99^2 [u_k - 3.689 \times 10^{-4} \gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 3961.67^2 [\gamma_k - 0.0153 u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3 \dots), \quad (24)$$

- в чисельній постановці

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 366.57^2 [u_k - 2.521 \times 10^{-5} \gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 3962.81^2 [\gamma_k - 0.221 u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (25)$$

Також будуються редуковані моделі ферм різної конфігурації, які навантаженні періодичними вертикальними силами $P(t)$, прикладеними до верхнього поясу ферми або парами сил $P(t)$ в площині найбільшої жорсткості (рис. 4).

Геометричні та механічні характеристики ферми приймалися такими:

а) матеріал: $E = 2.06 \text{ E}11 \text{ Па}$, $G = 0.792 \text{ E}11 \text{ Па}$, $\eta = 0.3$,

$\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$;

б) розкоси та стійки: 2 кутики $90 \times 56 \times 8$: $F = 22.36 \text{ E} - 04 \text{ м}^2$,

$J_z = 387.518 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$, $J_y = 54.066 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$, $J_k = 4.286 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$;

в) нижній пояс: 2 кутики $100 \times 65 \times 7$ $F = 22.46 \text{ E} - 04 \text{ м}^2$,

$J_z = 128.575 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$, $J_y = 227.964 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$, $J_k = 3.368 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$;

2 кутики $125 \times 80 \times 10$ $F = 39.4 \text{ E} - 04 \text{ м}^2$, $J_z = 345.907 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$,

$J_y = 623.032 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$, $J_k = 11.976 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$;

г) верхній пояс: 2 кутики 160x100x12 $F = 60.08E - 04 \text{ м}^2$,
 $J_z = 3268.23 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$, $J_y = 477.129 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$, $J_k = 26.41 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$.

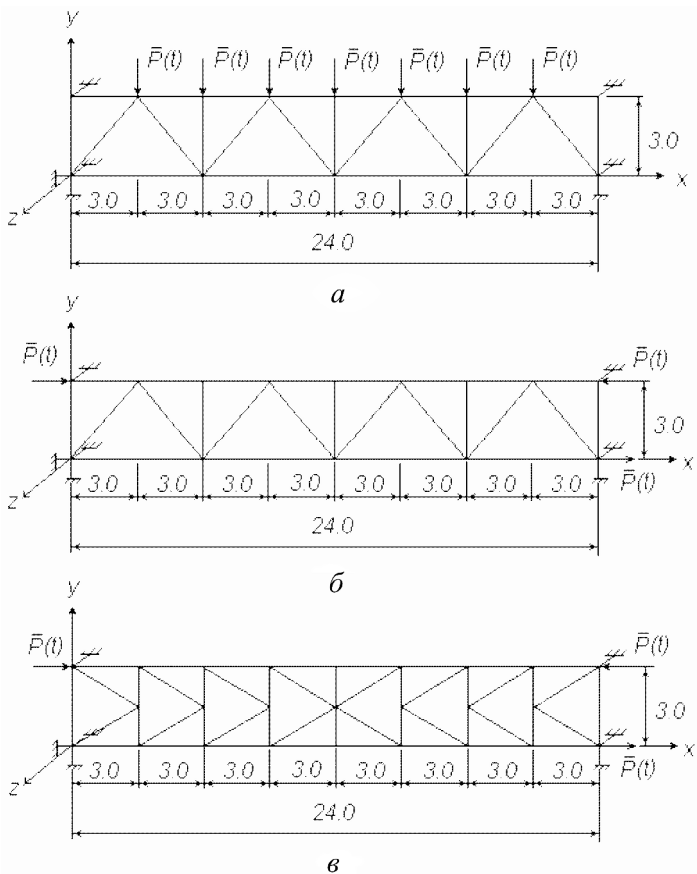


Рис. 4. Ферми

Періодичне навантаження, що діє у площині найбільшої жорсткості ферми, є параметричним навантаженням по відношенню до згинно-крутильних деформацій із площини її дії.

Навантаження приймалося у вигляді $P(t) = P_0 \cos \theta t$, де $P_0 = 1 \text{ Н}$ (рис.4, а), $P_0 = 0.333 \text{ Н}$ (рис.4, б) та $P_0 = 333.33 \text{ Н}$ (рис. 4, в).

Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину ферми зводиться до визначення редукованих матриць жорсткості K^* та геометричної жорсткості K_G^* . Алгоритм побудови редукованих моделей ферми виконується аналогічно алгоритму, що наведений вище.

Для ферм виконаний розрахунок на вільні коливання. Отримані дві перші частоти згинних та крутильних коливань ω_{1u} , $\omega_{1\gamma}$ і відповідні форми власних коливань $\bar{\varphi}_{1u}$, $\bar{\varphi}_{1\gamma}$ (рис. 5-8).

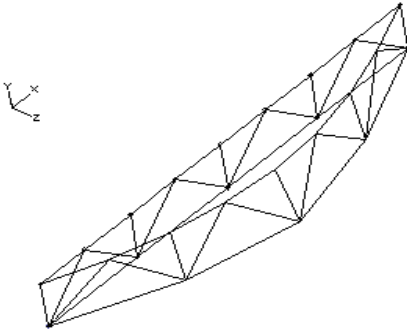


Рис. 5. Перша згинна форма коливань ферми (рис. 4, а, б)
($\omega_{1u} = 4.174 \text{ c}^{-1}$)

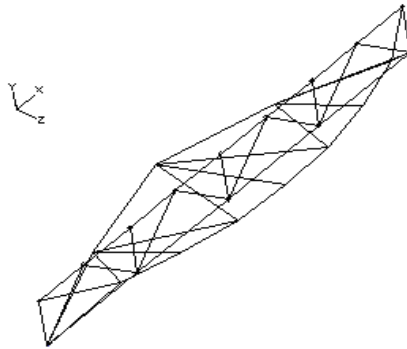


Рис. 6. Перша крутильна форма коливань ферми (рис. 4, а, б)
($\omega_{1\gamma} = 9.013 \text{ c}^{-1}$)

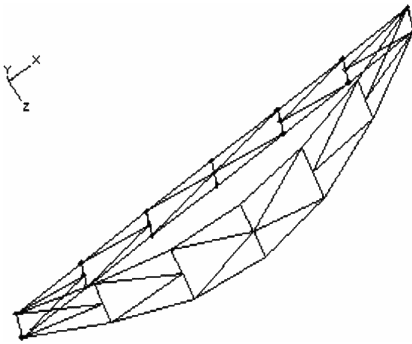


Рис. 7. Перша згинна форма коливань ферми (рис. 4, в).
($\omega_{1u} = 6.881 \text{ c}^{-1}$)

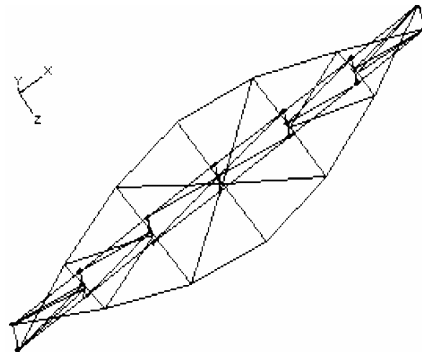


Рис. 8. Перша крутильна форма коливань ферми (рис. 4, в)
 $\omega_{1\gamma} = 15.305 \text{ c}^{-1}$

Для більш точного статичного розрахунку форми коливань ферм були зменшені у 1000 (рис.4а,б) та 100 (рис.4в) разів. Для кожної форми виконаний статичний розрахунок конструкції і визначена відповідна реакція $K\bar{\varphi}_{1u}, K\bar{\varphi}_{1\gamma}$. Матриця власних форм нормована по матриці мас, тобто $\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_i = E$, де $E = \text{diag}(1, 1)$. Тому після обчислення редукована матриця жорсткості отримана у вигляді діагональної матриці $K^* = \text{diag}(\omega_{1u}^2, \omega_{1\gamma}^2)$. Виконана процедура розв'язання нелінійної задачі статики на поетапне навантаження конструкції. Отримана редукована матриця суми матриць жорсткості та геометричної жорсткості $K^* + K_G^*$. Редукована матриця геометричної жорсткості обчислена за формулою (6).

Для ферми (рис. 4,а), що навантажена зосередженими силами з $P_0 = 7 \times 1\text{Н} = 7\text{Н}$, отримані такі результати чисельних розрахунків:
- редукована матриця жорсткості

$$K^* \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.742405 \times 10^{-7} & 8.554474 \times 10^{-12} \\ -4.422486 \times 10^{-11} & 8.126646 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості

$$(K^* + K_G^*) \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.742447 \times 10^{-7} & -9.989894 \times 10^{-12} \\ -6.277403 \times 10^{-11} & 8.126534 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості отримана за формулою

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -1.854436 \times 10^{-3} \\ -1.854916 \times 10^{-3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, редуковані рівняння динамічної стійкості плоского згину ферми набувають вигляду:

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 4.174^2 [u_k - 1.061 \times 10^{-4} \gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 9.013^2 [\gamma_k - 0.221 \times 10^{-4} u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (26)$$

Для ферми (рис. 4,б), що навантажена парою сил з моментом $M_0 = 0.333 \times 3 = 1\text{Нм}$, отримані такі результати чисельних розрахунків:
- редукована матриця жорсткості

$$K^* \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.742405 \times 10^{-7} & 8.554474 \times 10^{-12} \\ -4.422486 \times 10^{-11} & 8.126646 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості

$$(K^* + K_G^*) \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.742407 \times 10^{-7} & 7.563598 \times 10^{-12} \\ -4.518841 \times 10^{-11} & 8.126645 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -9.908760 \times 10^{-5} \\ -9.635504 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, редуковані рівняння динамічної стійкості плоскої форми згину ферми набувають вигляду:

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 4.174^2 [u_k - 0.572 \times 10^{-5} \gamma_k] = 0, \\ \dot{\gamma}_k + 9.013^2 [\gamma_k - 0.118 \times 10^{-5} u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (27)$$

Для ферми (рис.4в), що навантажена парою сил з моментом $M_0 = 333.33 \times 3 = 1000 \text{ Нм}$, отримані такі результати чисельних розрахунків:

- редукована матриця жорсткості

$$K^* \times 10^{-4} = \begin{bmatrix} 4.736573 \times 10^{-3} & -2.271458 \times 10^{-6} \\ -8.445043 \times 10^{-7} & 2.343064 \times 10^{-2} \end{bmatrix},$$

- сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості

$$(K^* + K_G^*) \times 10^{-4} = \begin{bmatrix} 4.735788 \times 10^{-3} & -1.663324 \times 10^{-4} \\ -1.648769 \times 10^{-4} & 2.343152 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -1.657182 \\ -1.657214 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, редуковані рівняння динамічної стійкості плоского згину ферми набувають вигляду:

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 6.881^2[u_k - 0.0349\gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 15.305^2[\gamma_k - 0.00707u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (28)$$

Запропонований чисельний підхід дозволить будувати редуковані моделі для визначення областей динамічної стійкості плоскої форми згину різних пружних систем, які можуть бути застосовані при їх дослідженні та проектуванні.

1. Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г. Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2004. -№74.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956 - 600с.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978—Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. 1978. 352 с., ил.
5. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. - М.: Наука, 1979 - 336 с.
6. Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В. Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2003. -№72.- с.51-59.
7. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Надійшла до редколегії 14.11.2005 р.