УДК 539.3

В.О. Бараненко, д-р техн. наук
І.П. Дуліца

БАЗОВІ КОНСТРУКЦІЇ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН В ЗАДАЧАХ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Розглянуто застосування базових понять теорії нечітких множин – нечітких чисел, відношень, α-рівнів, принципу розширення (узагальнення) до задач аналізу і регулювання в проектуванні конструкцій.

В кінці минулого сторіччя інтенсивно відпрацьовувались методи розрахунку споруд і конструкцій на витривалість, стійкість, надійність, довговічність, а також оптимального проектування, впровадження нових матеріалів, застосування засобів і технологій з використанням сучасної обчислювальної техніки тощо. В теорії проектування конструкцій, в тому числі й оптимального, поряд з детермінованими постановками, коли інформація про вихідні дані, поведінку середовища, цілях вважалась повною, викликає інтерес розгляд більш загальних задач проектування, в яких були бураховані інформаційні ситуації, що мають ту чи іншу ступінь невизначеності. Для формулювання і розв’язання їх потрібен такий математичний апарат, який містив би в себе можливість появи невизначеності. Таким апаратом при урахуванні факторів та дій випадкової природи в будівельній механіці стала теорія ймовірностей [4]. Основна ідея цього запровадження полягає в наступному: величини, що входять в рівняння міцності, жорсткості, коливань та інше, а саме: навантаження, характеристики властивостей матеріалу, геометричні характеристики форми елементів і самої конструкції та інше розглядуються не як величини детерміновані, а як величини, що мають мінливість і часом достатньо значну, а також невизначеність випадкового, розмитого, неточного виду. З точки зору інформації ці величини відносять до типу даних з неповною, або невизначеною інформацією.

Довгий час вважалось: все, що треба для роботи з невизначеністю – це є теорія ймовірностей. Однак, з часом змінювалося сприйняття людиною зовнішнього середовища, і адекватність цієї теорії стала породжувати сумніви. В результаті в математиці виникло новий напрямок досліджень – теорія нечітких множин і на основі її розроблена теорія можливостей[6].

В науці виникали такі інформаційні ситуації, коли якесь дослідження породжувало величезний потік праць, захоплюючі при цьому інші області застосування. Так склалось, наприклад, з широко відомим в будівельній механіці методом скінченних елементів. Американському математику Лотфі А. Заде ми забов'язані виникненню аналогічної ситуації. Каталізатором інформаційного вибуху стала його праця "Fuzzy sets" (1965) в журналі "Information and Control". Новаторські праці цього математика – фундатора теорії нечітких множин і нечіткого виведення призвели до зміни концептуальних підходів, методів дослідження в багатьох областях науки. Вони зробили значний вплив на розвиток математики, природничих та інженерних наук. За двадцять років (1989 - 1999) індекс цитування наукових праць, де ключовим словом було "fuzzy" досяг майже 23000 (за даними бази INSPEC). У світі зараз видається більш десяти спеціалізованих журналів, які друкують дослідження в області теорії нечітких множин. В Японії (північ о. Кюсю) було створено дослідницький центр нечітких технологій.

Якщо публікацій щодо використання теорії ймовірностей в механіці конструкцій достатньо багато, то праць із застосуванням теорії нечітких множин дуже мало [3, 8]. Тому метою цієї роботи є спроба адаптувати основні ідеї і поняття теорії нечітких множин до деяких задач механіки конструкцій. Розгляд проблем розрахунку і проектування надійних споруд і конструкцій в умовах невизначеності, на наш погляд, є новим та актуальним напрямком сучасної інженерії.

Теорія нечітких множин (ТНМ) через уведення дій математичного моделювання, а саме: *фуззіфікації*, нечіткого аналізу, *дефуззіфікації* дає можливість проаналізувати вплив заданої нечіткої інформації на показники напружено-деформованого стану конструкції, значення критеріїв якості в оптимізаційних задачах та інших.

Сутність операції фуззіфікації полягає в нечіткому опису вихідної інформації про характеристики механічної системи і перетворенні її в кількісну форму за допомогою функції належності. Нечіткий аналіз установлює відповідності між вихідними нечіткими даними з простором відображення результатів, які є також нечіткими. Цей етап виконується на основі α–рівнів, принципу розширення та розрахункових і чисельних методів механіки. Операція дефуззіфікації здійснює трансформацію результатів етапу аналізу до чітких даних на основі EVM-підходу (expected value model) [9].

За час встановлення ТНМ з'явились такі конструкції: лінгвістичні змінні, нечіткі числа, відношення, правила нечіткого виведення та інші.

Означення 1. Нечіткою множиною A в універсумі X називають множину упорядкованих пар

$$A = \{(x, \mu(x)); x \in X\},$$

де $\mu(x): X \to [0,1]$ є функція належності. Вона ставить у відповідність кожному елементу $x \in X$ дійсне число $\mu(x)$ з інтервалу [0,1], тобто кількісно градуює належність елементів x до універсуму X .

Означення 2. Нечітким числом називається нечітка множина А, яка визначена в універсумі − множині дійсних чисел, тобто $A \subseteq X = R$, функція належності якої є $\mu_A(x): R[0,1]$. Ця функція відповідає таким умовам:

1) $\underset{x \in R}{Sup}\, \mu_A(x) = 1$ (умова нормальності);

2) $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1); \mu_A(x_2))$ (умова опуклості);
$\lim\limits_{\substack{x \to x_C^+ \\ x \to x_C^-}} \mu_A(x)$ існує для $\forall x_C \in [x_1; x_2]$ (умова неперервності).

Найбільш розповсюджені нечіткі числа з трикутниковою, трапецієподібною, гаусовою, дзвіноподібною функцією належності [6, 9]. Функція належності не є продуктом ТНМ. Вона отримується в результаті проведення відповідних експертиз.

Означення 3. Нехай:

1) A– задана нечітка множина $A \subseteq X$;

2) φ − деяке задане чітке відображення елементів множини X в елементи множини Y $\varphi: X \to Y$.

Припускається, що перетворення φ є взаємне однозначним, тобто

$$y = \varphi(x) \text{ і } x = \varphi^{-1}(y) . \tag{1}$$

Перетворення φ може бути подано в аналітичному вигляді, комп'ютерною програмою або пакетом розрахункових програм.

Сутність принципу розширення полягає в наступному [6, 9]

$$B = \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{\varphi(x_i)} = \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{y_i}, \tag{2}$$

де B − нечітка множина, яка сгенерована і визначена в множині Y .

Означення 4. Множиною α –рівня називають чітку множину A_α із універсуму X, для якої виконується умова

$$A_\alpha = \{x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ для } \alpha \in [0,1].$$

Означення 5. Процес дефуззіфікації полягає у зведенні нечітких величин до чітких за допомогою моделі очікуваного результату (EVM). Основою цієї моделі є оператор, визначений як $E=\sum_{j=1}^{m} w_j f(x_j)$; $\sum_{j=1}^{m} w_j =1$ - для дискретних значень $\mu_A(x)$; $E=\int_x w(\mu_A(x))\varphi(x)dx$; $\int_x w(x)dx=1$ - для неперервних $\mu_A(x)$.

Функція w визначається як $w_j=\dfrac{\mu_A(x_j)}{\sum_{j=1}^{m}\mu_A(x_j)}$ або $w(x)=\dfrac{\mu_A(x)}{\int_x \mu_A(x)dx}$. Є інші прийоми визначення вагових коефіцієнтів w_j [9].

Зауваження. В теорії ймовірностей оператор E називають математичним очікуванням.

Приклади застосування нечітких множин

На модельних задачах будівельної механіки нижче буде показана методика застосування нечітких чисел.

Нечітке місце прикладання навантаження

Приклад 1. Розглядується згин пружної статично невизначувальної балки (рис. 1).

Нехай зосереджене навантаження F прикладене в точку B, координата x_B якої має нечітке значення та описується мовним кваліфікатором "*приблизно*". Треба визначити величини згинальних моментів в точках A і B. Висловлювання "*приблизно*" в ТНМ моделюється найчастіше нечітким трикутниковим числом $x_B(a,b,c)$ з функцією належності

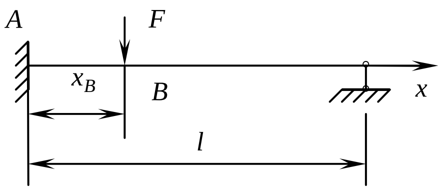

Рис. 1 Схема балки та навантаження

$$\mu_{x_B}(x)=\begin{cases}1, x=b\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, b\le x\le c\\ 0, для\, інш.\, x\end{cases}.$$

Для визначення $M_A{}^{fuzzy}$, $M_B{}^{fuzzy}$ за допомогою принципу розширення, треба скористатися відповідними формулами опору матеріалів

$$\varphi_1(x_B) = M_A(x_B) = Fx_B\left[\frac{x_B}{2l^2}(3l - x_B) - 1\right]$$

$$\varphi_2(x_B) = M_B(x_B) = \frac{Fx_B{}^2(3l - x_B)}{2l^3}\left(l - x_B\right). \quad (3)$$

Для значень $l = 6$ м; $F = 180$ Н і $x_B =$"*приблизно* 5*м*". Нехай x_B описано таким нечітким числом $x_B(4.5,\ 5,\ 5.5)$. За формулами (1), (2) відповідно маємо нечіткі трикутникові числа

$$M_A\left(-126.56,\ -87.5,\ -44.69\right) \text{ (Нм);}$$

$$M_B\left(170.86,\ 135.42,\ 78.78\right) \text{ (Нм).}$$

Етап дефуззіфікації за EVM підходом і роботою [9] здійснюється за формулою

$$M_{\det} = \frac{1}{4}\left(a + 2b + c\right). \quad (4)$$

В результаті маємо

$$M_A{}^{\det} = -86.56 \text{ Нм; } M_B{}^{\det} = 130.12 \text{ Нм.} \quad (5)$$

Відповідні значення моментів за детермінованим підходом є

$$M_A{}^{exact} = -87.5 \text{ Нм; } M_B{}^{exact} = 135.42 \text{ Нм.} \quad (6)$$

Якщо порівняти результати (5) з (6), маємо по модулю зменшення значень величини згинальних моментів $M^{\det}$ по відношенню до M^{exact}, що і очікувалось.

Приклад 2. Розглядується задача визначення згинального моменту в Г-образній рамі в точці під навантаженням F, яке прикладене на стояк на відстані "*приблизно* a" від точки B (рис. 2).

Розрахункова формула для шуканого моменту за роботою [5] буде такою:

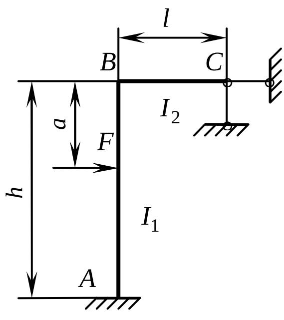

Рис. 2. Г-образна рама

$$M_F=\varphi(a)=\lambda(1-\lambda)^2(\lambda+2+3\mu\lambda)KFh\,,$$

де $\lambda=a/h$; $\mu=\dfrac{I_2h}{I_1l}$; $K=\dfrac{1}{2+1.5\mu}$.

Нехай величина a описується нечітким трикутниковим числом $a(1.9,\,2,\,2.1)$. При $F=10^4$ Н; $l=4$ м; $h=6$ м; $I_1=I_2$ за принципом розширення маємо таке нечітке трикутникове число

$$M_F^{\,fuzzy}(7052,\,7293,\,7507)\text{ Нм.}$$

Етап дефуззіфікації до отриманого числа дає таке чітке значення згинального моменту

$$M_F^{\,\det}=\frac{1}{4}(7052+2\cdot 7293+7507)=7286.3\text{ Нм.}$$

При точному завданні величини $a=2$ м маємо $M_F^{\,exact}=7293$ Нм. Таким чином, розмитість в завданні місце прикладання навантаження момент M_F зменшує своє значення в порівнянні з точним підходом на 0.1%. Якщо збільшити розмитість в завданні a, наприклад при $a=(1.5,\,2,\,2.1)$ маємо $M_F^{\,fuzzy}(5841,\,7293,\,7507)$, із якого йде $M_F^{\,\det}=6984$ Нм, що на 4.2% менш, чим при точному завданні величини $a=2$.

Регулювання зусиль шляхом осідання опори

В наступному прикладі розглядується застосування ТНМ до задачі регулювання з умовою, яка описана нечіткою рівністю: за допомогою вимушеного осідання опори двох прогонної балки (рис. 3а) досягти приблизної рівності максимальних значень згинальних моментів, відповідно, в прогині і на опорі, тобто

$$M_{пр}\approx|M_{оп}|\,. \tag{7}$$

Коли $M_{пр}=|M_{оп}|$ маємо детермінований варіант задачі, розв’язання якої подано в роботі [1]. Епюри згинальних моментів в заданій системі від дії навантаження P та осідання Δ середньої опори подано на рис. 3б, в).

На основі принципу накладення [7] і моментів $M_{пр.}^{\;P}$, $M_{пр}^{\;\Delta}$, $M_{оп}^{\;P}$, $M_{оп}^{\;\Delta}$ в прогинах і на опорі статично невизначувальної балки умову (7) запишемо як

$$M_{пр}^{\;P}+M_{пр}^{\;\Delta}\approx\left|M_{оп}^{\;P}-M_{оп}^{\;\Delta}\right|. \tag{8}$$

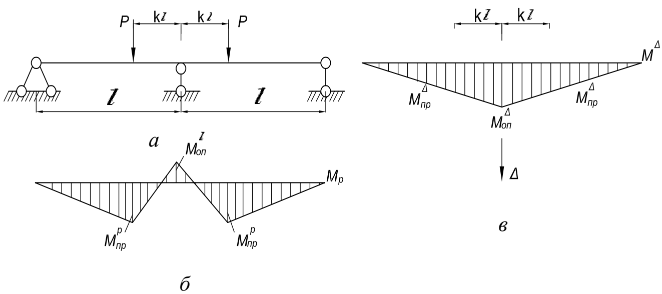

Рис. 3. Двох прогонна балка та навантаження

З урахування означень $M_{пр}{}^{p}, M_{пр}{}^{\Delta},\ M_{оп}{}^{p},\ M_{оп}{}^{\Delta}$ [1]

$$M_{пр}{}^{p} = \frac{Pl}{2}\left(k^4 - 4k^3 + 3k^2\right);\ M_{оп}{}^{p} = \frac{Pl}{2}\left(k^3 - 3k^3 + 2k\right);$$

$$M_{пр}{}^{\Delta} = (1-k)\frac{3EI}{l^2}\Delta\,;\ M_{оп}{}^{\Delta} = \frac{3EI}{l^2}\Delta \tag{9}$$

вираз (8) перепишемо у вигляді

$$\frac{|X - Y|}{u} \approx \varepsilon\,, \tag{10}$$

де

$$X = \frac{Pl}{2}\left(k^4 - 4k^3 + 3k\right) + (1-k)\frac{3EI}{l^2}\Delta\,;$$

$$Y = \frac{Pl}{2}\left(k^3 - 3k^2 + 2k\right) - \frac{3EI}{l^2}\Delta\,;$$

$u = \max\{|X|, |Y|\}$; ε - задана оцінка нечіткого висловлювання "*приблизна рівність*". Із співвідношення (10) після перетворень йде вираз для шуканого нечіткого значення осідання

$$\Delta = \psi(\Delta) = \frac{Pl^3\left(k^4 - 5k^3 + 6k^2 - 2k\right) - \varepsilon u}{6EI(k-2)}\,. \tag{11}$$

Вираз (11) є рекурентною формулою для застосування техніки послідовних наближень. Наприклад, якщо задати ε нечітким трикутниковим числом $\varepsilon(a, b, c)$, то в результаті виконання (11) і принципу розширення, отримаємо $\Delta^{fuzzy}(a_1, b_1, c_1)$, де $a_1 = \Delta(a)$;

$b_1 = \Delta(b)$; $c_1 = \Delta(c)$. Дефуззіфікація дає нарешті $\Delta^{\det} = \frac{1}{4}(a_1 + 2b_1 + c_1)$. При точному завданні відношення (7), тобто при $\varepsilon = 0$ маємо

$$\Delta^{exact} = \frac{Pl^3\left(k^4 - 5k^3 + 6k^2 - 2k\right)}{6EI(k-2)}.$$

Для числової ілюстрації пропонованого підходу при $l = 6$ м, $P = 3 \cdot 10^4$ Н, $k = 0.5$ для металевої балки №18 ($I_x = 0.166 \cdot 10^{-4}$ м^4, $E = 2.06 \cdot 10^{11}$ Па) отримано результати, які подані в таблиці 1. Початкове значення Δ для ітераційного процесу бралось $\Delta^{(0)} = 0.1$ м. Кількість ітерацій при заданій точності 10^{-6} м складає 3 – 4.

Таблиця 1

Результати розрахунку осідання опори

ε	Δ^{fuzzy}, м	$\Delta^{\det}$, мм	%
(0.05, 0.1,0.15)	(0.01331787, 0.01347638, 0.01363496)	13.4764	2.4
(0.05, 0.2, 0.3)	(0.01331787, 0.0137936, 0.01411116)	13.7541	4.5
(0, 0, 0)		Δ^{exact}= 13.1594	

Таким чином, отримані результати показують «вартість» нечіткого висловлювання умови регулювання, яке призводить до збільшення величини осідання при збільшенні розмитості в початковій інформації про величину ε.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Абовский Н.П., Енджиевский Л.В., Савченков В.И., Деруга А.П., Рейтман М.И.* Избранные задачи по строительной механике и теории упругости (регулирование, синтез, оптимизация). М.: Стройиздат, 1978. – 189 с.
2. *Аугусти Г., Баратта А., Кашнати Ф.* Вероятностные методы в строительной механике. – М.: Стройиздат, 1988. – 544 с.
3. *Бараненко В., Войнаков А.* Оптимальне проектування конструкцій при випадковій та нечіткій інформації про навантаження/Theoretical Foundations of civil Engineering. – XV Warsaw. – 2007. – P.25-32
4. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М.: Стройиздат, 1982. – 351 с.

5. *Бычков Д.В.* Формулы и графики для расчета рам. – М.: Гос. изд-во мет. по строительству и архитектуре. – 1957. – 194 с.
6. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения. /Под ред. Р.Р.Ягера, М.: Радио и связь, 1986. - 408 с.
7. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. - М.: Высш. школа, 1982. – 400 с.
8. *Baranenko V.A., Vojnakov A.Yu.* The use of the theory of fuzzy sets in design minimum volume trusses. – Lightweight structures in civil engineering. – Local seminarXII LSCE 2006, Warsaw P.22-24.
9. *Baoding Liu*. Theory and Practice of Uncertain Programming. – Physice-Verlag Heidelberg Springer – Verlag. – 2002. – 416p.

Отримано 29.07.10

Бараненко В.О., Дулица И.П.

БАЗОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧАХ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Рассмотрено два вида задач: анализ и регулирование. Анализ выполнен при нечёткой информации о месте приложения сосредоточенной нагрузки на балку и раму. Регулирование осуществлено по критерию нечеткого равенства максимальных изгибающих моментов в двухпролётной балке.

Baranenko V.O., Dulitsa I.P.

BASIC THEORY CONSTRUCTIONS OF FUZZY SETS AT STRUCTURAL MECHANICS PROBLEMS

Considered two types of problems: analysis and regulation. Analysis is fulfill at fuzzy information about the application concentrated loading place at truss and frame. Regulation realized criteria fuzzy equality of maximal moments in double-span truss.