УДК 539.375

О.О. Шкриль, канд.техн.наук

МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ *J*–ІНТЕГРАЛА В ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЯХ МЕТОДА СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянуті методи обчислення величини *J*–інтеграла Черепанова-Райса в дискретних моделях метода скінчених елементів (МСЕ), наведені результати розв'язання тестових задач.

Вступ.

На сучасному етапі розвитку механіки руйнування серед параметрів що дають можливість описувати напружено-деформований стан (НДС) в околі вершини тріщини найбільшого застосування набув *J*–інтеграл Черепанова-Райса. До найбільш поширених методів його обчислення в дискретних моделях МСЕ можна віднести безпосереднього інтегрування за величинами напружень та градієнтів переміщень, метод реакцій, об'ємного еквівалентного інтегрування, віртуального росту тріщини. Найбільшого розповсюдження набули два останніх метода. Ефективність їхнього застосування відображена в достатній кількості літературних джерел [1,5,9,10,11,13]. В роботах [8,12] зазначаються недоліки цих методів, які полягають в тому, що значення отримуваного *J*–інтеграла виявляються залежними від прийнятого контуру інтегрування. В даній роботі розглянуті перші два метода обчислення *J*–інтеграла Черепанова-Райса в дискретних моделях МСЕ. Показані межі ефективного застосування кожного з двох підходів.

1. Обчислення *J*-інтеграла за величинами напружень та градієнтів переміщень.

В кожній точці фронту тріщини величина *J*–інтеграла обчислюється за довільною поверхнею F, що обрана в околі зазначеної точки, охоплює фронт тріщини і має характерний розмір Δ вздовж фронту тріщини (рис.1). При цьому для обчислення *J*-інтеграла використовується вираз, отриманий на основі гіпотез про суцільність середовища, де розповсюджується тріщина, і співвідношень теорії пружності:

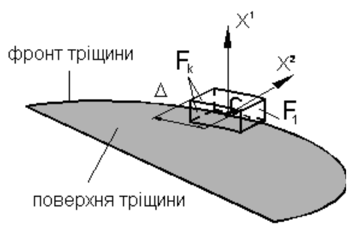


Рис.1. Поверхня інтегрування в точці визначення *J*-інтеграла

© Шкриль О.О.

$$J = \frac{1}{\Delta} \int_F \left(W n_t - \vec{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot \left(\hat{\nabla} u \right)^T \cdot \vec{t} \right) dF \,, \qquad (1)$$

де W – величина повної енергії деформування, в загальному випадку $W = \int_0^{\hat{\varepsilon}} \hat{\sigma} \cdot d\hat{\varepsilon}$, при пружному деформуванні $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень, $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформацій, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні інтегрування F; $\vec{t}$ – вектор, що визначає напрямок розвитку тріщини в точці фронта, де обчислюється J–інтеграл; n_t – проекція нормалі $\vec{n}$ на напрямок вектора $\vec{t}$; $\hat{\nabla} u$ – градієнт переміщень.

Поверхня для обчислення J–інтеграла в околі кожної з точок фронта тріщини буде складатися з контурної (F_k) та двох бічних (F_1 і F_2) поверхонь

$$J = \frac{1}{\Delta} (J_{F_k} + J_{F_1} + J_{F_2}) \,.$$

При скінченно-елементному обчисленні J–інтеграла за формулою (1) для виконання інтегрування обирається контур S, який лежить в площині, перпендикулярній до фронту тріщини (рис. 2). В місцевій системі координат контур має прямокутну форму і проходить через центри СЕ. Рекомендації щодо вигляду привершинної області через яку має проходити контур інтегрування наведені в [7]. В межах кожного елемента інтегрування здійснюється за віссю, вздовж якої контур перетинає СЕ. У межах тих СЕ, що містять кутові точки контуру, інтегрування проводиться за двома ділянками, що відповідають напрямкам осей із урахуванням відповідних проекцій нормалі до контуру $\vec{n}$ на вектор напрямку розвитку тріщини $\vec{t}$.

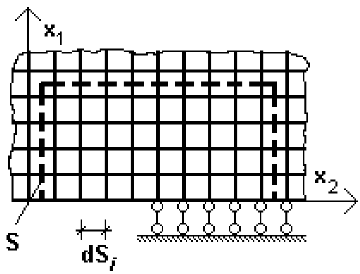


Рис. 2. Контур інтегрування при обчисленні J-інтеграла в дискретних моделях МСЕ

З урахуванням скінченно-елементної дискретизації тіла, покомпонентне подання J–інтеграла у виразі (1) буде мати наступний вигляд:

$$J = \sum_{i=1}^{N_e + n_e} \left(W\, t^j n_j - n_m \,\sigma^{mn}\, \nabla_k u_n \;\, t^k \right) ds_i \,,$$

де N_e – загальна кількість СЕ, крізь які проходить обраний для обчислення J–інтеграла контур; n_e – кількість СЕ, що містять кутові точки контуру; ds_i – довжина відрізка контуру в межах i-го СЕ; W – енергія деформування тіла (системи з N_e СЕ):

$$W=\sum_{i=1}^{N_e} W_i=\sum_{i=1}^{N_e}\frac{\sqrt{\overset{\circ}{g}}}{2}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\,.$$

Як показали дослідження проведені в [2,4] обчислення J–інтеграла за допомогою напружень та градієнтів переміщень ефективно проводити при розв'язанні двовимірних задач. При розв'язанні певного класу просторових задач значення J–інтеграла починають залежати від розмірності обраного контуру інтегрування. В таких випадках для отримання достовірних значень J–інтеграла необхідно значно згущувати дискретну модель і накладати певні обмеження на контур інтегрування.

2. Обчислення *J*-интеграла методом реакцій.

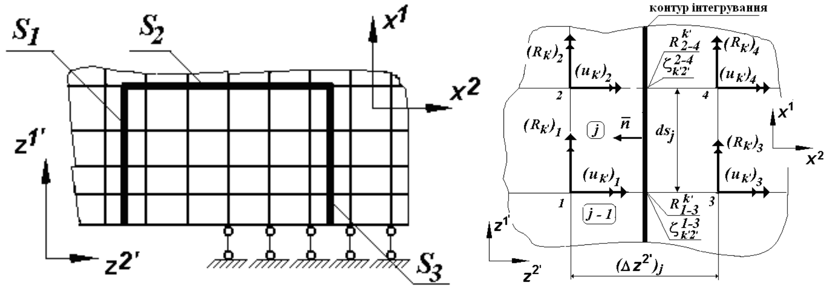
Згідно з методом реакцій величина J–інтеграла незалежно від розмірності контуру інтегрування може бути отриманою за наступною формулою:

$$J_{\Pi}=\sum_{j=1}^{N_3}\frac{1}{2\left(\Delta z^{2'}\right)_j}\{u\}_j\{R\}_j-\sum_{j=1}^{N_1}\frac{1}{2\left(\Delta z^{2'}\right)_j}\{u\}_j\{R\}_j-$$

$$-\sum_{j=1}^{N_1}\left(R^{k'}\frac{\left(\{u_{k'}\}_3+\{u_{k'}\}_4\right)-\left(\{u_{k'}\}_1+\{u_{k'}\}_2\right)}{2\Delta z^{2'}}\right)_j-\sum_{j=1}^{N_2}\left(R^{k'}\frac{\{u_{k'}\}_4-\{u_{k'}\}_2}{2\Delta z^{2'}}\right)_j-$$

$$-\sum_{j=1}^{N_3}\left(R^{k'}\frac{\left(\{u_{k'}\}_3+\{u_{k'}\}_4\right)-\left(\{u_{k'}\}_1+\{u_{k'}\}_2\right)}{2\Delta z^{2'}}\right)_j\quad,$$

де N_1, N_2, N_3 –кількість ділянок обчислення інтеграла на відповідних контурах S_1, S_2, S_3 (рис. 3,а); $\{u\}_j=\left\{\{u_{k'}\}_i\right\}, \{R\}_j=\left\{\{R_{k'}\}_i\right\}$ – вектори переміщень та реакцій двох вузлів i, що відносяться до даного контуру, за напрямком k' вісей базисної системи координат z^k (рис. 3, б).



а *б*

Рис.3. Контур інтегрування в дискретній моделі

Необхідною умовою для застосування методу реакцій є рівномірність дискретної моделі (що потрапляє в область інтегрування) вздовж лінії тріщини. Більш детально ідеологія методу реакцій викладена в роботах [2-4].

Проведені дослідження [2-4] показали, що значення *J*–інтеграла отримані методом реакцій дійсно не залежать від прийнятого контуру інтегрування як при лінійному, так і нелінійному деформуванні просторових тіл.

В якості прикладу в даній роботі наведено результати розв´язання задачі про деформування компактного зразка (рис. 4) [6] виготовленого зі сталі 12Х2МФА, для якої $E = 2.05 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, а закон пластичного деформування має вигляд:

$$\bar{\sigma}/\sigma_m = 1 + 0.645(\bar{\varepsilon}_p)^{0.388},$$

$$\sigma_m = 637\,\text{МПа}.$$

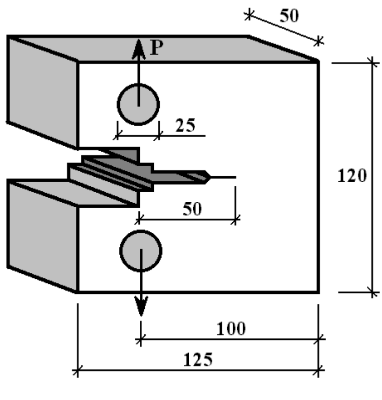


Рис. 4. Компактний зразок

Розв’язання задачі в двовимірній постановці показало, що значення *J*–інтеграла отримані при різних рівнях навантаження співпадають з еталонним розв’язком (рис. 5). Розв’язання задачі в просторовій постановці показало, що розподіл *J*–інтеграла вздовж фронту тріщини є нерівномірним (рис. 6).

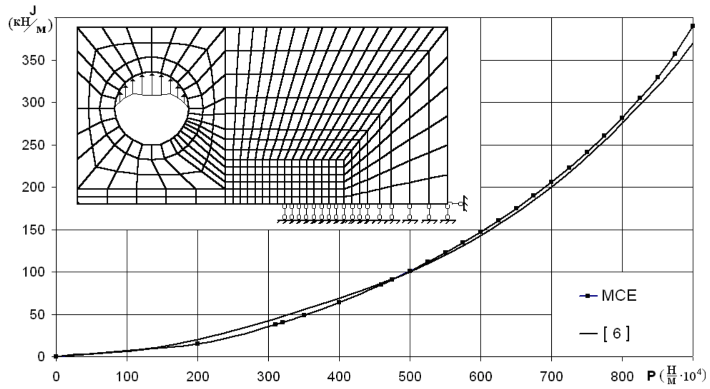


Рис.5. Результати розв´язання задачі про деформування компактного зразка з тріщиною в двовимірній постановці

Як можна побачити з графіків із збільшенням рівня навантаження, і відповідно деформацій пластичності, ця нерівномірність збільшується, як і збільшується різниця між значеннями *J*–інтеграла отриманого в результаті двовимірного і тривимірного розрахунків. Тому розв’язання таких задач необхідно проводити в тривимірній постановці.

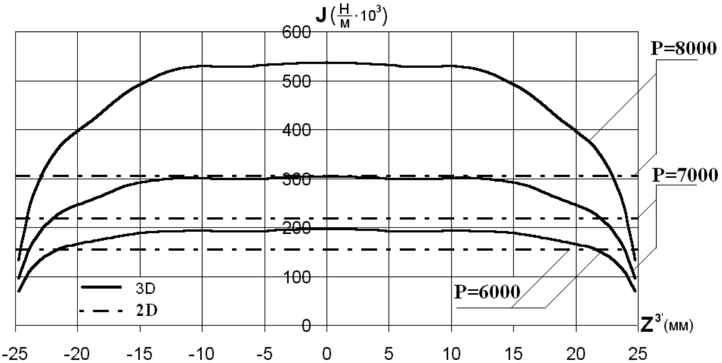


Рис.6. Розподіл *J*-інтеграла вздовж фронту тріщини при зростанні рівня навантаження

Проведений аналіз двох методів обчислення *J*–інтеграла в дискретних моделях виявив, що найбільш ефективним та універсальним є метод реакцій, оскільки на відміну від першого методу він потребує дискретних моделей із значно меншою кількістю невідомих, і не залежить від розмірності контуру інтегрування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атлури С.* Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Особливості визначення J-інтеграла для дискретних моделей метода скінченних елементів. //Опір матеріалів і теорія споруд. – К., 2005.- Випуск .77. с.3-25.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Метод реакцій для обчислення *J*–інтеграла в просторових нелінійних задачах механіки руйнування . //Опір матеріалів і теорія споруд. – К., 2006.- Випуск .79. с.3-17.
4. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкрыль А.А.* Метод определения независимых от пути величин *J*–интеграла в линейных и нелинейных задачах механики разрушения //Прикладная механика. – К., 2008.- N.12. с.3-25.
5. *Вайншток В.А.* Расчет весовых функций и J-интегралов для несимметричных задач механики разрушения модифицированным методом виртуального роста трещины // Пробл. прочности. – 1981. – № 8. – С.102–104.
6. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука. – 1980. – 256 с.
7. *Полуаналитический* метод конечных элементов в механике деформируемых тел / В.А. Баженов, А.И. Гуляр, А.С. Сахаров, А.Г. Топор. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
8. *Русаков А.В., Тарасов Ю.Л.* Расчетно-экспериментальная методика обеспечения надежности элементов конструкций летательных аппаратов с учетом условий эксплуатации //Вестн. Самар. Гос. Техн. Ун-та., сер. физ.-мат. науки – 2000. – № 9. – С.56-77.
9. *de Lorenci H.G.* On the Energy Release Rate and J-integral of 3–D Crack Configurations. – Int. Journal of Fracture. – Vol.19. – 1982. – pp.183–193.
10. *de Lorenci H.G.* Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Method. – Engineering Fracture Mechanics. – Vol.21. – 1985. – pp.129–143.
11. *Li F., Shih C., Needleman A.* A comparison of methods for calculating energy release rates // Eng. Fract. Mech. – 1985. – V.21. – P.405-421.
12. *Kim Yun-Jae, Kim J., Park Y., Kim Young-Jin* Elastic–plastic fracture mechanics method for finite internal axial surface cracks in cylinders // Engineering Fracture Mechanics. – 2004. – V.71. – P.925–944.
13. *Nikishkov G., Atluri S.* An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermo-mechanical fracture // Eng. Fract. Mech. – 1987. – V.26. – N.6. – P.851-867.

Отримано 03.08.09

А.А. Шкриль

Методы определения *J*–интеграла в дискретных моделях метода конечных элементов

Рассмотрены методы вычисления величины *J*–интеграла Черепанова-Райса в дискретных моделях метода конечных элементів (МКЭ), приведены результаты решения тестовых задач.

O.O. Shkril

The methods of determination of J-integral in the discrete models of finites elements

The methods of sizes calculation of Cherepanov-Rice’s J-integral in the discrete models of method finite elements are considered. The results of test problems decision are given.