УДК 515. 2

Г.М. Коваль., к.т.н., доцент

ЗАСТОСУВАННЯ КОЛА ПРИ ГЕОМЕТРИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ПЛОСКИХ ОБВОДІВ

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

При геометричному моделюванню обводів в більшості випадків зручно використовувати рівняння кривих, записаних в параметричному виді. При цьому при моделюванні плоских обводів першого порядку гладкості можуть бути застосованими дуги кіл. В статті запропоновано спосіб визначення параметричного рівняння кола (дуги кола) для двох способів його завдання: завдання кола трьома точками, а також завдання кола двома точками і дотичною в одній з них. Визначення параметричних рівнянь кіл в обох випадках проводилося з використанням проективної системи координат.

В першому випадку на класичне параметричне рівняння кривої другого порядку в проективній системі координат для визначення невідомих коефіцієнтів рівняння накладалися умови належності трьох заданих точок цій кривій, причому задані точки приймалися за 3 базисні точки проективної системи. Проведення отриманої кривої другого порядку через циклічні точки дозволило визначити всі невідомі коефіцієнти рівняння і, таким чином, визначити шукане параметричне рівняння кола спочатку в проективній системі координат.

В другому випадку для спрощення була обрана місцева система афінних координат, в якій дві задані точки були розташовані на осі Ох симетрично відносно осі Оу, а точка на дотичній – на осі Оу. Ці 3 точки було прийнято за 3 базисні точки проективної системи координат, а четверта точка проективної системи координат – одинична точка – була визначена в афінній системі, як точка, що належить цьому колу. Класичне рівняння кривої другого порядку в проективній системі координат, яка проходить через 3 базисні точки проективної системи і дотична в двох з них до координатних прямих при умові, що одинична точка належить колу, є рівнянням шуканого кола.

Після визначення обох шуканих рівнянь в проективній системі координат, за допомогою формул переводу з проективної системи в афінну, визначаються шукані параметричні рівняння кіл в афінній системі.

Ключові слова – параметричне рівняння кола, заданого трьома точками; параметричне рівняння кола, заданого двома точками з дотичною в одній з них, циклічні точки площини, проективна система координат.

Постановка проблеми. При геометричному моделюванні плоских обводів першого порядку гладкості зустрічаються ділянки, які можуть бути описані як дуги кола. Для аналітичного завдання дуг кривих при цьому застосовуються, як правило, параметричні рівняння.

Ціль статті. Визначити параметричні рівняння кіл, заданих а) трьома точками;б) двома точками та дотичною в одній з них.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В аналітичній геометрії для всіх кривих другого порядку відомі канонічні рівняння [1,2], для еліпса, параболи та гіперболи – векторно-параметричні [3,4]. У [1] наведене рівняння кола, заданого трьома точками:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x^2{}_1+y^2{}_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x^2{}_2+y^2{}_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x^2{}_3+y^2{}_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Основна частина. В проективній системі координат P^2 (рис.1) параметричне рівняння кривої другого порядку (к2п) має вигляд:

$$\rho x_0 = a_0 + a_1 t + at^2 ; \quad \rho x_1 = b_0 + b_1 t + bt^2 ; \quad \rho x_2 = c_0 + c_1 t + ct^2 . \quad (1)$$

1. На основі рівняння (1) визначимо параметричне рівняння кола, заданого трьома точками.

При умові, що крива (1) проходить через базисні точки *A*, *B* і *C* P^2 та має в цих точках параметр *t*, який дорівнює відповідно 0, 1 і ∞, рівняння (1) приймає вигляд:

$$\rho x_0 = a(1-t) ; \rho x_1 = bt ; \rho x_2 = t(t-1). \quad (2)$$

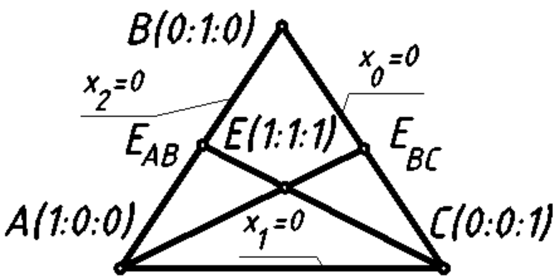

Рис. 1. Проективна система координат

Для того, щоб отримане рівняння було рівнянням кола, підставимо в рівняння (2) координати циклічних точок площини [5]

$$\begin{aligned} \rho x_0 &= vw(y_{CB} \pm ix_{CB}) \\ \rho x_1 &= w(y_{AC} \pm ix_{AC}) \quad (3) \\ \rho x_2 &= v(y_{BA} \pm ix_{BA}), \end{aligned}$$

де $y_{CB} = y_C - y_B, x_{CB} = x_C - x_B$, $y_{AC} = y_A - y_C, x_{AC} = x_A - x_C$, $y_{BA} = y_B - y_A, x_{BA} = x_B - x_A$, $v = -AE_{AB} / BE_{AB}$, $w = -vBE_{BC} / CE_{BC}$.

Тоді рівняння кола, заданого трьома точками, в P^2 приймає вигляд:

$$\rho x_0 = vwc(1-t)\,;\ \rho x_1 = wat\ ;\ \rho x_2 = vbt(t-1), \tag{4}$$

де $a = x^2{}_{AC} + y^2{}_{AC}$, $b = x^2{}_{BA} + y^2{}_{BA}$, $c = x^2{}_{CB} + y^2{}_{CB}$.

В афінній системі координат A^2 шукане параметричне рівняння кола, заданого трьома точками, записане за допомогою формул переходу від проективної системи координат P^2 до афінної [6], має вигляд

$$r = \frac{r_C bt^2 + (ar_B - cr_A - br_C)t + cr_A}{bt^2 + (a - c - b)t + c}\ , \tag{5}$$

де r_A, r_B, r_C – радіуси-вектори точок *A,B,C*
(при $0 \le t \le \infty$ рівняння (5) визначає дугу *ABC* кола).

Рівняння прямих, дотичних до кола (5) в кінцевих точках дуги *A* та *C,* мають відповідно вигляд:

$$y = k(x - x_A) + y_A,\ \text{де}\ k = \frac{ay_{BA} + by_{AC}}{ax_{BA} + bx_{AC}},$$

та

$$y = k_1(x - x_C) + y_C,\ \text{де}\ k_1 = \frac{ay_{CB} + by_{AC}}{ax_{CB} + bx_{AC}}.$$

Координати центра $O(x_O;\ y_O)$ кола (5) та його радіус визначаються за формулами $x_O = \dfrac{x_C k - x_A k_1 - y_{AC} kk_1}{k - k_1}$, $y_O = \dfrac{x_{AC} + y_A k - y_C k_1}{k - k_1}$ та

$$R = \frac{\sqrt{(k^2+1)}}{k - k_1}(y_{AC} k_1 + x_{AC}).$$

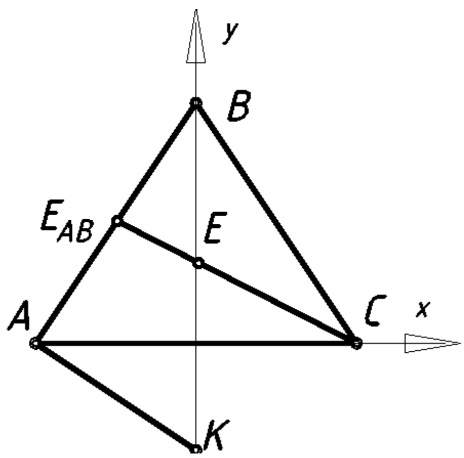

Рис.2. Завдання кола

2. Визначимо рівняння кола, заданого двома точками та дотичною в одній з них. Нехай в A^2 задані точки *A(-a,0)* та *C(a,0)*, які належать колу, та дотична *AB (*рис.2), причому *B(0,b).*

Тоді рівняння прямої *AB,* дотичної до шуканого кола, має вигляд $y = \dfrac{b}{a}x + b$. Рівняння прямої *AK,* де точка *K* – центр шуканого кола, буде $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{a^2}{b}$, а точка *K* має координати

$K(0,-\dfrac{a^2}{b})$. Радіус кола можна визначити за формулою $R=\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}$.

Тоді неявне рівняння шуканого кола в A^2 має вигляд

$$b^2x^2+(by+a^2)^2=a^2(a^2+b^2). \qquad (6)$$

Точка *E (рис.2*), яка належить шуканому колу, має координати $E(0;a_1/b)$, де $a_1=a(\sqrt{a^2+b^2}-a)$. Точки *A,B,C* та *E* приймаємо за базисні точки P^2. Рівняння к2п*,* яка проходить через точки *A, E,* C та має дотичні *AB* та *CB,* в P^2 має вигляд [1]

$$\rho x_0=1; \qquad \rho x_1=t; \qquad \rho x_2=t^2 \qquad (7)$$

*(*параметр *t* в точках *A, E* та *C* дорівнює відповідно 0, 1 та ∞).

Векторно-параметричне рівняння кола (7), записане в A^2 за допомогою формул переводу [3] має вигляд

$$r=\frac{r_Ax_0+vr_Bx_1+r_Cx_2}{x_0+vx_1+x_2}, \quad \text{де} \quad v=-\frac{r_A-r_{E_{AB}}}{r_B-r_{E_{AB}}}. \qquad (8)$$

Для кола (8) $v=2a_1/(b-a_1)$ і шукане параметричне рівняння кола, заданого двома точками та дотичною в одній з них, приймає в A^2 вигляд

$$x=a\frac{t^2-1}{1+vt+t^2}, \quad y=\frac{vbt}{1+vt+t^2}.$$

Висновки та перспективи. Шукані параметричні рівняння кіл визначено. Застосування циклічних точок площини може бути корисним при дослідженні та розробці способів геометричного моделювання плоских циклічних кривих.

Література

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 832 с. с ил.
2. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979. 512 с. с ил.
3. *Надолинный В. А.* Аналитические методы в конструировании поверхностей. Учебное пособие. /Киев: КПИ, 1981. 43 с.
4. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. М.: Мир, 1982. 304 с.
5. *Коваль Г.М.* Конструирование рациональных кривых третьего порядка с заданными радиусами кривизны / Киев: КПИ, 1994. 6с. – Деп. в ГНТБ Украины 22.02.94, № 400 – Ук94.

6. *Надолинный В.А.* Основы теории проективных рациональных поверхностей /Автореферат дисс. … докт. техн. наук, 05.01.01. – М., 1989. 30 *с.*

ПРИМЕНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЛОСКИХ ОБВОДОВ

Коваль Г.М.
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

При геометрическом моделировании обводов в большинстве случаев удобно использовать уравнение кривых, записанные в параметрическом виде. При этом при моделировании плоских обводов первого порядка гладкости могут быть применены дуги окружностей. В статье предложен способ определения параметрического уравнения окружности (дуги окружности) для двух способов ее задания: задание окружности тремя точками, а также задание окружности двумя точками и касательной в одной из них. Определение параметрических уравнений окружностей в обоих случаях проводилось с использованием проективной системы координат.

В первом случае на классическое параметрическое уравнение кривой второго порядка в проективной системе координат для определения неизвестных коэффициентов уравнения накладывались условия принадлежности трех заданных точек этой кривой, причем заданные точки принимались за три базисные точки проективной системы. Проведение полученной кривой второго порядка через циклические точки позволило определить все неизвестные коэффициенты уравнения и, таким образом, определить искомое параметрическое уравнение окружности предварительно в проективной системе координат.

Во втором случае для упрощения была выбрана местная система аффинных координат, в которой две заданные точки были расположены на оси Ох симметрично относительно оси Оу, а точка на касательной - на оси Оу. Эти три точки были приняты за три базисные точки проективной системы координат, а четвертая точка проективной системы координат - единичная точка - была определена в аффинной системе как точка, принадлежащая этой окружности. Классическое уравнение кривой второго порядка в проективной системе координат, которая проходит через три базисные точки проективной системы и касается в двух из них координатных прямых при условии, что единичная точка принадлежит окружности, является искомым уравнением окружности.

После определения обоих искомых уравнений в проективной системе координат с помощью формул перевода из проективной системы в аффинную определяются искомые параметрические уравнения окружностей в аффинной системе.

Ключевые слова - параметрическое уравнение окружности, заданной тремя точками; параметрическое уравнение окружности, заданной двумя точками с касательной в одной из них; циклические точки плоскости; проективная система координат.

GEOMETRIC MODELING OF A FLAT CONTOUR USING A CIRCLE

G. Koval
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

In geometric modeling of contours, in most cases it is convenient to use the equations of curves written in a parametric form. In this case, when modeling flat contours of the first order of smoothness, can be used circular arcs. The article proposes a method for determining the parametric equation of a circle (arc of a circle) for two ways: defining a circle over three points, as well as defining a circle over two points and a tangent in one of them. The definition of the parametric equations of circles in both cases was carried out using a projective coordinate system.

In the first case, the conditions for the membership of three given points of this curve were imposed on the classical parametric equation of a second-order curve in the projective coordinate system to determine the unknown coefficients of the equation, and the given points were taken as three basis points of the projective system. Passing the obtained second-order curve through cyclic points made it possible to determine all unknown coefficients of the equation and, thus, determine the desired parametric equation of the circle in the projective coordinate system.

In the second case, for simplicity, a local system of affine coordinates was chosen in which two given points were located on the Ox axis symmetrically with respect to the Oy axis, and the point on the tangent was located on the Oy axis. These 3 points were taken as 3 basis points of the projective coordinate system, and the fourth point of the projective coordinate system — the unit point — was defined in the affine system as a point belonging to this circle. The classical equation of a second-order curve in a projective coordinate system that passes through 3 basis points of the projective system and touches the coordinate lines in two of them, provided that the unit point belongs to the circle, is the desired equation of circle.

After determining both of the desired equations in the projective coordinate system, using the transfer formulas from the projective system to the affine, the desired parametric equations of the circles in the affine system are determined.

Keywords - parametric equation of a circle defined by three points; parametric equation of a circle defined by two points with a tangent in one of them; cyclic points of the plane; projective coordinate system.