УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Пискунов С.О. канд. техн. наук,
Солодей І.І., канд. техн. наук,
Шевченко Ю.В., аспірант

РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ НМСЕ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ З ДОВІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Отримані розрахункові співвідношення НМСЕ для розв'язання просторових задач динаміки неоднорідних незамкнутих тіл обертання з довільними граничними умовами, які забезпечують високу ефективність підходу при використанні косокутних скінченних елементів для побудови дискретних моделей об'єктів складної конфігурації меридіального перетину.

Вступ. В роботі [9] викладено методику визначення динамічних характеристик і моделювання вимушених нестаціонарних коливань неоднорідних замкнутих тіл обертання. В той же час в різних галузях техніки та будівництва знаходять широке застосування елементи конструкцій, які являють собою неоднорідні незамкнуті тіла обертання з довільними граничними умовами. В зв'язку з цим є актуальним узагальнення зазначеного вище підходу на даний клас об'єктів.

Метою даної роботи є отримання розрахункових співвідношень напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) для розв'язання просторової задачі динаміки неоднорідних масивних, тонкостінних та комбінованих незамкнутих тіл обертання з довільними граничними умовами.

Постановка задачі. Розглядаються неоднорідні ізотропні незамкнені тіла обертання (рис. 1), що знаходяться під дією довільного імпульсного навантаження або зміщень, на інтервалі часу $T \in [t_0, t_1]$. Неоднорідність фізико-механічних властивостей реальних тіл може бути зумовлена різноманітними причинами: природною неоднорідністю, технологією виготовлення, впливом зовнішніх полів, наприклад температури чи радіаційного опромінення або навмисно організованою структурною неоднорідністю, яка властива практично всім композитам і тому подібне**.**

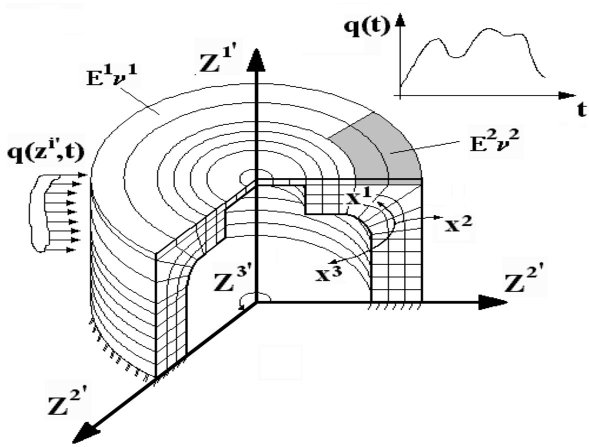

Рис. 1. Неоднорідне незамкнуте тіло обертання з довільними граничними умовами

Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в ортогональній круговій циліндричній системі координат $z^{i'}$, що в подальшому називається базисною. Для подання напружено-деформованого стану тіла із складною формою поперечного перетину запроваджується місцева криволінійна система координат x^i, яка пов'язана з геометрією тіла. Вважається, що в будь-якій точці тіла відомий однозначний зв'язок між базисною і місцевою системами координат, який визначається за допомогою прямого і зворотного тензорів перетворення координат:

$$z^{i'}_{,j} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \qquad x^i_{,j'} = \frac{\partial x^i}{\partial Z^{j'}}. \tag{1}$$

В силу того, що x^3 і $z^{3'}$ співпадають, та ортогональні до площини поперечного перетину для циліндричної системи координат

$$z^{3'}_{,\alpha} = z^{\alpha'}_{,3} = 0. \tag{2}$$

Тут і надалі, індекси, що позначені латинськими літерами, приймають значення 1, 2, 3; а грецькими – 1, 2; кома перед індексом показує операцію диференціювання.

Відмінні від нуля компоненти метричного тензора, що визначають масштаби базисних векторів, в ортогональній циліндричній системі координат мають вигляд [2]:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = 1, \quad g_{3'3'} = \left(z^{2'}\right)^2; \tag{3}$$

Коваріантні компоненти метричного тензора в місцевій системі координат визначаються через відповідні компоненти в базисній:

$$g_{ij} = z^{\alpha'}_{,i} z^{\alpha'}_{,j} + z^{3'}_{,i} z^{3'}_{,j} g_{3'3'}. \tag{4}$$

Контраваріантні компоненти знаходяться по відомим коваріантним:

$$g^{ij} = \frac{\mathrm{A}(g_{ij})}{g}, \tag{5}$$

де $\mathrm{A}(g_{ij})$ - алгебраїчне доповнення до елемента g_{ij} матриці, що побудована по коваріантним компонентам метричного тензора; $g = \det\left|g_{ij}\right|$ - визначник цієї матриці.

Переміщення будь-якої точки тіла визначається компонентами в базисній системі координат $u_{i'}$. Компоненти тензору деформацій в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [1]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{k',i} z^{k'}_{,j} + u_{k',j} z^{k'}_{,i} - 2u_{k'} z^{l'}_{,i} z^{m'}_{,j} \Gamma^{k'}_{l'm'}\right), \tag{6}$$

де

$$u_{k',i} = \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^i}. \tag{7}$$

Символи Крістофеля другого роду $\Gamma^{k'}_{l'm'}$ в ортогональній циліндричній системі координат відмінні від нуля і мають наступний вигляд [2]:

$$\Gamma^{2'}_{3'3'} = -Z^{2'}, \quad \Gamma^{3'}_{3'2'} = \Gamma^{3'}_{2'3'} = \frac{1}{Z^{2'}}. \tag{8}$$

Враховуючи (8) співвідношення (7) приймають вигляд:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(z^{\gamma'}_{,\alpha} u_{\gamma',\beta} + z^{\gamma'}_{,\beta} u_{\gamma',\alpha}\right),$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\left(z^{3'}_{,3} u_{3',\alpha} + z^{\gamma'}_{,\alpha} u_{\gamma',3} - \frac{2 z^{2'}_{,\alpha} z^{3'}_{,3} u_{3'}}{Z^{2'}} \right), \tag{9}$$

$$\varepsilon_{33} = z^{3'}_{,3} u_{3',3} + \left(z^{3'}_{,3} \right)^2 z^{2'} u_{2'} ,$$

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl} . \tag{10}$$

В ізотропному тілі компоненти тензора пружних сталих d^{ijkl} пов'язані з коефіцієнтами Ламе λ і μ співвідношеннями [2]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu \left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk} \right), \tag{11}$$

де $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $E = E\left(z^{i'}\right)$, $\nu = \nu\left(z^{i'}\right)$ - значення модуля пружності і коефіцієнта Пуассона в точці тіла, що розглядається.

Фізичні компоненти тензорів деформацій $\tilde{\varepsilon}_{kl}$, напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ та пружних констант $\tilde{d}^{ijkl}$ визначаються співвідношеннями:

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}} ,$$

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}} , \tag{12}$$

$$\tilde{d}^{ijkl} = d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}} .$$

Рівновага неоднорідного ізотропного тіла об’ємом V при наявності інерційних сил, обмеженого поверхнею S, описується рівнянням, що є наслідком принципу Даламбера, покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат приймає вигляд [2]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, z^{j'}_{,k} \sigma^{ki} \right) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'} . \tag{13}$$

Однозначність розв’язання (13) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0, який приймається за початок часової координати:

$$u(z^{i'},t_0)=u_0(z^{i'}), \quad \dot{u}(z^{i'},t_0)=\dot{u}_0(z^{i'}), \quad z^{i'}\in V . \tag{14}$$

При цьому припускається, що на частині поверхні S_u задані кінематичні граничні умови:

$$u(z^{i'},t)=\tilde{u}(z^{i'},t), \quad z^{i'}\in S_u , \tag{15}$$

а на поверхні S_p з нормаллю $\vec{n}=n_j e^j$ - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z^{k'}_{,i}\sigma^{ij}n_j=\tilde{p}\left(z^{k'},t\right), \quad z^{k'}\in S_p . \tag{16}$$

В кожний момент часу пружно-деформований стан згаданого тіла повинен задовольняти варіаційному рівнянню руху яке згідно принципам Лагранжа-Даламбера подамо у вигляді:

$$\int\limits_V \rho \ddot{u}^{i'}\delta u_{i'}dV+\int\limits_V \tilde{\sigma}^{ij}\delta\tilde{\varepsilon}_{ij}dV-\int\limits_V f^{i'}\delta u_{i'}dV-\int\limits_{S_p} p^{i'}\delta u_{i'}dS=0 , \tag{17}$$

де $\tilde{\sigma}^{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ - фізичні компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно.

Неоднорідний круговий скінченний елемент з довільними граничними умовами на торцях. Скінченні елементи, що пропонуються, орієнтовані на розрахунок широкого класу неоднорідних тіл обертання. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного рішення. Як показано в роботах [1,3,4,6,7], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [8] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище “хибного зсуву”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Для дискретизації неоднорідних просторових тіл при динамічному навантаженні застосовуються кругові незамкнені скінченні елементи (СЕ) (рис.2). В місцевій системі координат їх переріз є квадратом з одиничними сторонами. Початок місцевої системи координат x^i

знаходиться у геометричному центрі елемента, вісі x^1 і x^2 направлені паралельно сторонам поперечного перерізу, а x^3 суміщена із $z^{3'}$.

Припускається, що щільність матеріалу ρ, компоненти тензора пружних постійних d^{ijkl} і визначник метричного тензора g незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі:

$$\rho = \rho\big|_{x^\alpha=0}, \quad d^{ijkl} = d^{ijkl}\Big|_{x^\alpha=0}, \quad \sqrt{g} = \sqrt{g}\Big|_{x^\alpha=0}. \tag{18}$$

В той же час ρ *і* d^{ijkl} довільно змінюються вздовж осі x^3 і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування

За невідомі при розв’язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ в базисній системі координат $(u\!:\!\dot{u}\!:\!\ddot{u})_{k'}$, де k' - напрямок в базисній системі координат. Позначка “:” відповідає логічному оператору “або”, що означає вибір для розгляду однієї з компонент в круглих дужках.

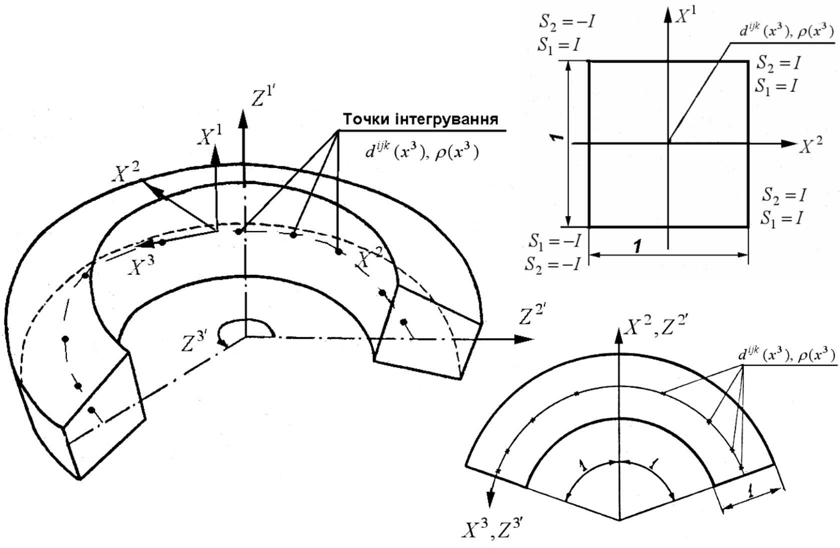

Рис.2. Неоднорідний незамкнений кільцевий скінченний елемент із довільними граничними умовами на торцях

Якщо обмежитися білінійним розподілом переміщень, швидкостей і прискорень в площині перетину елемента і подати їх через вузлові значення поліномами Лагранжа першого ступеня:

$$\mathrm{P}_{(S_1,S_2)} = \prod_{n=1}^{2}\left(S_{(n)}x^{(n)} + \frac{1}{2}\right), \tag{19}$$

можна записати:

$$(u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1}\sum_{S_2} P_{(S_1,S_2)}(u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})_{k'(S_1,S_2)}\,. \tag{20}$$

Індекси S_1 та S_2 визначають положення вузла відносно центру поперечного перерізу елемента і набувають значень ± 1 (рис. 2).

В центрі поперечного перерізу СЕ переміщення, швидкості, прискорення і їх похідні виражаються формулами:

$$\begin{gathered} (u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})_{k'}\Big|_{x^\alpha=0} = \frac{1}{4}\sum_{S_1}\sum_{S_2}(u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})_{k'(S_1,S_2)}\,; \\ (u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})_{k',\beta}\Big|_{x^\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{S_1}\sum_{S_2}(u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})_{k'(S_1,S_2)}S_\beta\,; \\ (u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})_{k',12}\Big|_{x^\alpha=0} = \sum_{S_1}\sum_{S_2}(u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})_{k'(S_1,S_2)}S_1 S_2\,. \end{gathered} \tag{21}$$

Для апроксимації переміщень, швидкостей та прискорень в напрямку утворюючої використовується система координатних функцій ψ^l:

$$\begin{gathered} (u\colon \dot{u}:\ddot{u})_{k'(S_1,S_2)} = \sum_{l=l_0}^{L}(u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})^l_{k'(S_1,S_2)}\psi^l\,; \\ (u\colon \dot{u}:\ddot{u})_{k',3}\Big|_{x^\alpha=0} = \sum_{l=l_0}^{L}(u\colon \dot{u}\colon \ddot{u})^l_{k'(S_1,S_2)}\psi^l_{,3}\,. \end{gathered} \tag{22}$$

Для кільцевого незамкненого СЕ із довільними граничними умовами на торцях ψ^l – поліноми Лагранжа при l = 0, 1 і Міхліна при l = 2, ..., L:

$$\begin{gathered} \psi^0 = \frac{1}{2}\left(1 - x^3\right), \qquad \psi^l = \frac{1}{2}\left(1 + x^3\right), \\ \psi^l = f^{(l)}p^{(l)} - f^{(l-2)}p^{(l-2)}, \qquad f^{(l)} = \sqrt{\left(4l^2 - 1\right)^{-1}}\,, \end{gathered} \tag{23}$$

$$p^{(l)}=\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\sum_{s=0}^{l}\frac{(-1)^s(l+s)!}{(l-s)!(s!)^2\,2^{s+1}}\left[\left(1-x^3\right)^s+(-1)^l\left(1+x^3\right)^s\right].$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

У відповідності до моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [7,8] компоненти тензору фізичних деформацій в поперечному перетині для кожної точки інтегрування подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)}\ ;\ \tilde{\varepsilon}_{12}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}\ ;$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)};\ \ \tilde{\varepsilon}_{33}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}\,x^{\beta}\ , \tag{24}$$

де $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij}=\tilde{\varepsilon}_{ij}\Big|_{x^2=0}$, $\quad\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta}=\dfrac{\partial\tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^3}\Big|_{x^2=0}$.

Визначимо зв’язок між фізичними компонентами тензора переміщень $\tilde{\sigma}^{ij}$ та тензора деформацій на основі (10) і (12):

$$\tilde{\sigma}^{ij}=\tilde{d}^{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl}\,, \tag{25}$$

Тоді для компонент тензора напружень використовуючи (24) і (25) можна записати:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{ij}={}&\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij11}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2}\,x^2\right)+2\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij12}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}+\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij22}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1}\,x^1\right)+\\&+2\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij13}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13,2}\,x^2\right)+2\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij23}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23,1}\,x^1\right)+\\&+\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij33}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1}\,x^1+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2}\,x^2\right).\end{aligned} \tag{26}$$

Застосовуючи позначення:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}=\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ijkl}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl}\,;$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,2}=\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij11}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2}+\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij13}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13,2}+\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij33}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2}\,; \tag{27}$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,1} = \overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij11}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1} + \overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij23}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23,1} + \overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij33}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1},$$

отримаємо

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,2}x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,1}x^1. \tag{28}$$

Компоненти $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{i(i)}_{,\alpha}$ $(\alpha \neq i)$ відображають напруження згину і їх впливом на точність розв’язку нехтувати не можна, в особливості для оболонок. Відкидаючи з (28) члени вигляду $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{i\alpha}_{,\alpha}$ як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елементу, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)};\quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12};$$

$$\tilde{\sigma}^{\alpha 3} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)};\quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha}x^{\alpha}. \tag{29}$$

Запишемо коефіцієнти розкладання фізичних компонент тензора напружень в ряд Маклорена з урахуванням (12):

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)};\quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{11}\overset{\circ}{g}_{22}}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{12};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\overset{\circ}{g}_{33}}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3};\quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} = \overset{\circ}{g}_{33}\overset{\circ}{\sigma}{}^{33}; \tag{30}$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)};\quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\overset{\circ}{g}_{33}}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)};\quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} = \overset{\circ}{g}_{33}\overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,(3-\alpha)};$$

Для тонких оболонок з навантаженням, що приведене до серединної поверхні в класичній теорії запроваджуються умови рівності нулю нормальних напружень на площадках, які паралельні площині, що дотична до серединної поверхні. Цій умові в рамках МССЕ відповідає наступна гіпотеза:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(\alpha)(\alpha)} = 0, \tag{31}$$

яка визначає постійність нормальних напружень $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(\alpha)} = 0$.

З умови (31) отримуємо зв'язок між коефіцієнтами розкладів (29) і (24) в центрі меридіонального перетину СЕ на основі узагальненого закону Гука:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl}, \tag{32}$$

а також зв'язок між похідними напружень і деформацій для лінійно-пружного матеріалу, який забезпечує універсальність СЕ, що пропонуються:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,\alpha} = \overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ijkl}_{\alpha} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl,\alpha}, \tag{33}$$

де

$$\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ijkl}_{\alpha} = \overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ijkl} - \frac{\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{ij(\alpha)(\alpha)} \overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{(\alpha)(\alpha)kl}}{\overset{\circ}{\tilde{d}}{}^{(\alpha)(\alpha)(\alpha)(\alpha)}}. \tag{34}$$

Запишемо коефіцієнти розкладання фізичних компоненти тензора деформацій в ряд Маклорена з урахуванням (12):

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}. \tag{35}$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \left.\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^{\tau}=0} = \left.\frac{\partial\left(\dfrac{\varepsilon_{\alpha(\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}}\right)}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^{\tau}=0} =$$

$$= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \left.\left(\varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}} \right)\right|_{x^{\tau}=0} =$$

$$= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right);$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \left.\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^\tau=0} = \left.\frac{\partial\left(\dfrac{\varepsilon_{\alpha 3}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}}\right)}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^\tau=0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}}\left[\varepsilon_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha 3}\left(\frac{g_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}}{g_{\alpha\alpha}} + \frac{g_{33,(3-\alpha)}}{g_{33}}\right)\right]\Bigg|_{x^\tau=0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}\,\overset{\circ}{g}_{33}}}\left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}\left(\overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)}\right)\right]. \qquad (36)$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} = \left.\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^{\beta}}\right|_{x^\tau=0} = \left.\frac{\partial\left(\dfrac{\varepsilon_{33}}{g_{33}}\right)}{\partial x^{\beta}}\right|_{x^\tau=0} =$$

$$= \frac{1}{g_{33}}\left(\varepsilon_{33,\beta} - \varepsilon_{33}\frac{g_{33,\beta}}{g_{33}}\right)\Bigg|_{x^\tau=0} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}\,\overset{\circ}{h}_{33,\beta}\right), \qquad (37)$$

де $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}\big|_{x^\tau=0}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \left.\dfrac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}}\right|_{x^\tau=0}$, $\overset{\circ}{h}_{ij,\delta} = \dfrac{\overset{\circ}{g}_{ij,\delta}}{\overset{\circ}{g}_{ij}}$, $\overset{\circ}{g}_{ij,\delta} = \left.\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\delta}}\right|_{x^\tau=0}$.

Вирази коефіцієнтів деформацій через переміщення з урахуванням незалежності $z^{3'}_{,3}$ від x^{α} мають вигляд:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\left(z^{\gamma'}_{,\alpha}u_{\gamma',\alpha} + z^{\gamma'}_{,\alpha}u_{\gamma',\alpha}\right)\Big|_{x^\tau=0} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\,\overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha} + \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\,\overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha}\right),$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}\left(z^{\gamma'}_{,1}u_{\gamma',2} + z^{\gamma'}_{,2}u_{\gamma',1}\right)\Big|_{x^\tau=0} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,1}\,\overset{\circ}{u}_{\gamma',2} + \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,2}\,\overset{\circ}{u}_{\gamma',1}\right),$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\left(z^{3'}_{,3}u_{3',\alpha} + z^{\gamma'}_{,\alpha}u_{\gamma',3} - \frac{2z^{2'}_{,\alpha}z^{3'}_{,3}u_{3'}}{z^{2'}}\right)\Bigg|_{x^\tau=0} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\overset{\circ}{u}_{3',\alpha}+\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\overset{\circ}{u}_{\gamma',3}-\frac{2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\overset{\circ}{u}_{3'}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right), \tag{38}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}=\left.\left(z^{3'}_{,3}u_{3',3}+z^{2'}\left(z^{3'}_{,3}\right)^2u_{2'}\right)\right|_{x^\tau=0}=\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\overset{\circ}{u}_{3',3}+\overset{\circ}{z}{}^{2'}\left(\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)^2\overset{\circ}{u}_{2'},$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3\text{-}\alpha)}=\left.\frac{\partial\varepsilon_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^\tau=0}=\left.\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(z^{\gamma'}_{,\alpha}u_{\gamma',(\alpha)}+z^{\gamma'}_{,(\alpha)}u_{\gamma',\alpha}\right)\right)}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^\tau=0}=$$

$$=\left.\left(z^{\gamma'}_{,\alpha(3-\alpha)}u_{\gamma',\alpha}+z^{\gamma'}_{,\alpha}u_{\gamma',\alpha(3-\alpha)}\right)\right|_{x^\tau=0}=\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha(3-\alpha)}\overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha}+\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha(3-\alpha)},$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha3,(3\text{-}\alpha)}=\left.\frac{\partial\varepsilon_{\alpha3}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^\tau=0}=\left.\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(z^{3'}_{,3}u_{3',\alpha}+z^{\gamma'}_{,\alpha}u_{\gamma',3}-\frac{2z^{2'}_{,\alpha}z^{3'}_{,3}u_{3'}}{z^{2'}}\right)\right)}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^\tau=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\Bigg(z^{3'}_{,3}u_{3',\alpha(3-\alpha)}+z^{\gamma'}_{,\alpha(3-\alpha)}u_{\gamma',3}+z^{\gamma'}_{,\alpha}u_{\gamma',3(3-\alpha)}-$$

$$\left.-\frac{2z^{2'}_{,\alpha(3-\alpha)}z^{3'}_{,3}u_{3'}}{z^{2'}}-\frac{2z^{2'}_{,\alpha}z^{3'}_{,3}u_{3',(3-\alpha)}}{z^{2'}}+\frac{2z^{2'}_{,\alpha}z^{3'}_{,3}u_{3'}z^{2'}_{,(3-\alpha)}}{\left(z^{2'}\right)^2}\Bigg)\right|_{x^\tau=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\Bigg(\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\overset{\circ}{u}_{3',\alpha(3-\alpha)}+\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha(3-\alpha)}\overset{\circ}{u}_{\gamma',3}+\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\overset{\circ}{u}_{\gamma',3(3-\alpha)}-$$

$$-\frac{2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha(3-\alpha)}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\overset{\circ}{u}_{3'}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}-\frac{2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\overset{\circ}{u}_{3',(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}+\frac{2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\overset{\circ}{u}_{3'}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,(3-\alpha)}}{\left(\overset{\circ}{z}{}^{2'}\right)^2}\Bigg),$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}=\left.\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^{\beta}}\right|_{x^{\tau}=0}=\left.\frac{\partial\left(z_{,3}^{3'}u_{3',3}+z^{2'}\left(z_{,3}^{3'}\right)^{2}u_{2'}\right)}{\partial x^{\beta}}\right|_{x^{\tau}=0}=$$

$$=\left.\left(z_{,3}^{3'}u_{3',3\beta}+z_{,\beta}^{2'}\left(z_{,3}^{3'}\right)^{2}u_{2'}+z^{2'}\left(z_{,3}^{3'}\right)^{2}u_{2',\beta}\right)\right|_{x^{\tau}=0}=$$

$$=\overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'}\,\overset{\circ}{u}_{3',3\beta}+\overset{\circ}{z}{}_{,\beta}^{2'}\left(\overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'}\right)^{2}\overset{\circ}{u}_{2'}+\overset{\circ}{z}{}^{2'}\left(\overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'}\right)^{2}\overset{\circ}{u}_{2',\beta}\,.$$

де

$$\overset{\circ}{z}{}^{2'}=\left.z^{2'}\right|_{x^{\tau}=0},\quad \overset{\circ}{z}{}_{,j}^{i'}=\left.z_{,j}^{i'}\right|_{x^{\tau}=0},\quad \overset{\circ}{z}{}_{,12}^{\gamma'}=\left.z_{,12}^{\gamma'}\right|_{x^{\tau}=0},$$

$$\overset{\circ}{u}_{i'}=\left.u_{i'}\right|_{x^{\tau}=0},\ \overset{\circ}{u}_{i',\alpha}=\left.u_{i',\alpha}\right|_{x^{\tau}=0},\ \overset{\circ}{u}_{3',3}=\left.u_{3',3}\right|_{x^{\tau}=0},\ \overset{\circ}{u}_{i',\alpha(3-\alpha)}=\left.u_{i',\alpha(3-\alpha)}\right|_{x^{\tau}=0}.$$

При заданому законі апроксимації переміщень (20), коефіцієнти ряду Маклорена обчислюються по формулах:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}\sum_{S_1}\sum_{S_2}\left[\overset{\circ}{z}{}_{,\alpha}^{\gamma'}u_{\gamma'(S_1,S_2)}S_{\beta}+\overset{\circ}{z}{}_{,\beta}^{\gamma'}u_{\gamma'(S_1,S_2)}S_{\alpha}\right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha3}=\frac{1}{4}\sum_{S_1}\sum_{S_2}\left[\overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'}u_{3'(S_1,S_2)}S_{\alpha}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}_{,\alpha}^{\gamma'}u_{\gamma',3(S_1,S_2)}-\frac{\overset{\circ}{z}{}_{,\alpha}^{2'}\,\overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}u_{3'(S_1,S_2)}\right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}=\frac{1}{4}\sum_{S_1}\sum_{S_2}\left[\overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'}u_{3',3(S_1,S_2)}+\overset{\circ}{z}{}^{2'}\left(\overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'}\right)^{2}u_{2'(S_1,S_2)}\right],\tag{39}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{S_1}\sum_{S_2}\left[\overset{\circ}{z}{}_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma'}u_{\gamma'(S_1,S_2)}S_{\alpha}+2\overset{\circ}{z}{}_{,\alpha}^{\gamma'}u_{\gamma'(S_1,S_2)}S_{\alpha}S_{(3-\alpha)}\right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha3,(3-\alpha)}=\frac{1}{4}\sum_{S_1}\sum_{S_2}\left[2\overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'}u_{3'(S_1,S_2)}S_{\alpha}S_{(3-\alpha)}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma'}u_{\gamma',3(S_1,S_2)}+\right.$$

$$+\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\,u_{\gamma',3(S_1,S_2)}S_{(3-\alpha)}-\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}u_{3'(S_1,S_2)}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+2\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}u_{3'(S_1,S_2)}S_{(3-\alpha)}-\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}\,\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,(3-\alpha)}}{\left(\overset{\circ}{z}{}^{2'}\right)^2}u_{3'(S_1,S_2)}\right)\right]\right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}=\frac{1}{2}\sum_{S_1}\sum_{S_2}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left[u_{3',3(S_1,S_2)}S_\alpha+\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}}{2}u_{2'(S_1,S_2)}+\overset{\circ}{z}{}^{2'}\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\,u_{2'(S_1,S_2)}S_\alpha\right].$$

Із урахуванням прийнятого у вигляді (22) розкладу переміщень в напрямку утворюючої на основі формули (39) отримаємо для кільцевого СЕ:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}\sum_{S_1\pm1}\sum_{S_2\pm1}\sum_{l=0}^{L}\left(\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}u^l_{\gamma'(S_1,S_2)}S_\beta+\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\beta}u^l_{\gamma'(S_1,S_2)}S_\alpha\right)\psi^l\ ;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha3}=\frac{1}{4}\sum_{S_1\pm1}\sum_{S_2\pm1}\sum_{l=0}^{L}\left[\left(u^l_{3'(S_1,S_2)}S_\alpha-\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}u^l_{3'(S_1,S_2)}\right)\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\,\psi^l+\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\,u^l_{\gamma'(S_1,S_2)}\psi^l_{,3}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}=\frac{1}{4}\sum_{S_1\pm1}\sum_{S_2\pm1}\sum_{l=0}^{L}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(u^l_{3'(S_1,S_2)}\psi^l_{,3}+u^l_{2'(S_1,S_2)}\,\overset{\circ}{z}{}^{2'}\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\,\psi^l\right);$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{L}\left(2\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\,S_1S_2+\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\,S_\alpha\right)u^l_{\gamma'(S_1,S_2)}\psi^l\ ; \qquad (40)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha3,(3-\alpha)}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{L}\left[\left(\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\,S_{(3-\alpha)}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)u^l_{\gamma'(S_1,S_2)}\psi^l_{,3}+\right.$$

$$+\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(2S_\alpha S_{(3-\alpha)}-\frac{1}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\left(\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,12}+2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}S_{(3-\alpha)}-\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right)u^l_{3'(S_1,S_2)}\psi^l\right)\Bigg]\,;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{L}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(2\overset{\circ}{z}{}^{2'}S_\alpha+\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}\right)u^l_{2'(S_1,S_2)}\psi^l+2S_\alpha u^l_{3'(S_1,S_2)}\psi^l_{,3}\right);$$

Представимо

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}=\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)ij}+\overset{\circ}{\varepsilon}_{(2)ij}\,, \tag{41}$$

де

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)\alpha\beta}=\frac{1}{4}\sum_{S_1\pm1}\sum_{S_2\pm1}\sum_{l=0}^{L}\left(\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}u^l_{\gamma'(S_1,S_2)}S_\beta+\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\beta}u^l_{\gamma'(S_1,S_2)}S_\alpha\right)\psi^l\ ;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)\alpha3}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{l=0}^{L}u^l_{3'(S_1S_2)}\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(S_\alpha-\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right)\psi^l\ ;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)33}=\frac{1}{4}\sum_{S_1\pm1}\sum_{S_2\pm1}\sum_{l=0}^{L}\overset{\circ}{z}{}^{2'}\left(\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)^2u^l_{2'(S_1,S_2)}\psi^l\ ;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(2)\alpha3}=\frac{1}{8}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{l=0}^{L}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}u^l_{\gamma'(S_1S_2)}\psi^l_{,3}\ ;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(2)33}=\frac{1}{4}\sum_{S_1\pm1}\sum_{S_2\pm1}\sum_{l=0}^{L}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}u^l_{3'(S_1S_2)}\psi^l_{,3}\ ; \tag{42}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)\alpha\alpha,(3-\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{L}\left(2\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_1S_2+\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}S_\alpha\right)u^l_{\gamma'(S_1,S_2)}\psi^l\ ;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)\alpha3,(3-\alpha)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{L}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(2S_\alpha S_{(3-\alpha)}-\frac{1}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\left(\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,12}+2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{z,\alpha}S_{(3-\alpha)}-\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{\alpha}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right)u^l_{3'(S_2S_2)}\psi_l\right);$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)33,\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{L}\left(\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)^2\left(2\overset{\circ}{z}{}^{2'}S_\alpha+\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,\alpha}\right)u^l_{2'(S_1,S_2)}\psi^l\ ;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(2)\alpha3,(3-\alpha)}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{L}\left(\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(3-\alpha)}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)u^l_{\gamma'(S_1,S_2)}\psi^l_{,3}\ ;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(2)33,\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{L}2\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}S_\alpha u^l_{3'(S_1,S_2)}\psi^l_{,3}\ .$$

Побудова матриці жорсткості і матриці мас СЕ. Виходячи з виразу (17), варіація потенційної енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W=\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\tilde{\sigma}^{ij}\delta\tilde{\varepsilon}_{ij}\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3\,. \qquad (43)$$

Фізичні компоненти тензорів напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ і деформацій $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ представимо відрізками ряду Маклорена (24) і (29) згідно основних положень МССЕ:

$$\delta W=\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\Bigg[\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}+\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)\delta\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)}\right)+$$

$$+2\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12}\delta\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}+\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha3}+\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha3}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)\delta\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha3}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha3,(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)}\right)+$$

$$+\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}+\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha}x^{\alpha}\right)\delta\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}\,x^{\beta}\right)\Bigg]\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3\ . \qquad (44)$$

Використання МССЕ та прийнятих гіпотез відповідно розподілення компонентів тензору пружних сталих d^{ijkl} ,. та визначника матриці компонентів метричного тензору $\sqrt{g}$ (18), дозволяє виконати інтегрування в межах меридіонального перетину СЕ по x^1 та по x^2 в замкнутому вигляді. Для цього достатньо обчислити наступні інтеграли:

$$\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1; \quad \int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0;$$

$$\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \dfrac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}. \tag{45}$$

Після відповідних перетворень для варіації потенційної енергії δW, отримаємо наступний вираз:

$$\delta W = \int\limits_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\tilde{\tilde{\sigma}}}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\tilde{\tilde{\sigma}}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \overset{\circ}{\tilde{\tilde{\sigma}}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\tilde{\sigma}}}{}^{33}_{,\alpha} \delta \overset{\circ}{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 . \tag{46}$$

Представляючи в (46) фізичні компоненти коефіцієнтів розкладу деформацій та напружень згідно (30) і (35) запишемо:

$$\delta W = \int\limits_{x_3=-1}^{x_3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \right.\right.$$

$$+ \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} \delta \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \left(\overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)} \right) \right] +$$

$$\left.\left. + \overset{\circ}{\sigma},^{33}_{\alpha} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\beta} \right) \right] \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 . \tag{47}$$

Сформуємо наступні вектори коефіцієнтів розкладу деформацій та напружень в ряд Маклорена:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \right\}; \tag{48}$$

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,1}\right\}^T=\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}\overset{\circ}{h}_{22,1}\;\;\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}\overset{\circ}{h}_{33,1}\;\;\;2\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{23,1}-\frac{1}{2}\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}\left(\overset{\circ}{h}_{22,1}+\overset{\circ}{h}_{33,1}\right)\right)\right\};$$

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,2}\right\}^T=\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}\overset{\circ}{h}_{11,2}\;\;\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}\overset{\circ}{h}_{33,2}\;\;\;2\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{13,2}-\frac{1}{2}\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}\left(\overset{\circ}{h}_{11,2}+\overset{\circ}{h}_{33,2}\right)\right)\right\}.$$

$$\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}^T=\left\{\overset{\circ}{\sigma}^{11}\;\overset{\circ}{\sigma}^{22}\;\overset{\circ}{\sigma}^{33}\;\overset{\circ}{\sigma}^{12}\;\overset{\circ}{\sigma}^{13}\;\overset{\circ}{\sigma}^{23}\right\}; \tag{49}$$

$$\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,1}\right\}^T=\left\{\overset{\circ}{\sigma}^{22}_{,1}\;\overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,1}\;\overset{\circ}{\sigma}^{23}_{,1}\right\};\qquad\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,2}\right\}^T=\left\{\overset{\circ}{\sigma}^{11}_{,2}\;\overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,2}\;\overset{\circ}{\sigma}^{13}_{,2}\right\}.$$

Тоді вираз варіації потенційної енергії скінченного елемента може бути поданий у векторній формі:

$$\delta W=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}^T\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}+\frac{1}{12}\left[\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,1}\right\}^T\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,1}\right\}+\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,2}\right\}^T\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,2}\right\}\right]\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3. \tag{50}$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}=\sum_{l=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]\psi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]\psi^{(l)}_{,3}\right)\{u\}_l;$$

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}=\sum_{l=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]\psi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]\psi^{(l)}_{,3}\right)\{u\}_l, \tag{51}$$

де $\{u_{i'}\}_l^T=\left\{u^l_{i'(-1;-1)}\;u^l_{i'(1;-1)}\;u^l_{i'(-1;1)}\;u^l_{i'(1;1)}\right\}$.

$$\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]=\left[\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(-1;-1)}\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(1;-1)}\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(-1;1)}\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(1;1)}\right]. \tag{52}$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]=\left[\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(-1;-1)}\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(1;-1)}\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(-1;1)}\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(1;1)}\right]. \tag{53}$$

Значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha}\right]^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(S_1,S_2)}$ у виразі (53) для неоднорідних косокутних кругових елементів визначаються відповідно до формул (42):

$$\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_1\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,1} & \frac{1}{2}S_1\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,1} & 0\\ \frac{1}{2}S_2\overset{\circ}{z}{}^{1}_{,2} & \frac{1}{2}S_2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{2'}\left(\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)^2 & 0\\ \frac{1}{2}\left(S_2\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,1}+S_1\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,2}\right) & \frac{1}{2}\left(S_2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,1}+S_1\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2}\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(S_1-\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,1}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right)\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(S_2-\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right) \end{bmatrix}; \quad (54)$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{4}z^{1'}_{,1} & \frac{1}{4}z^{2'}_{,1} & 0\\ \frac{1}{4}z^{1'}_{,2} & \frac{1}{4}z^{2'}_{,2} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{1,1}\right]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix} \left(B^{22}_{1,1}\right)_{11} & \left(B^{22}_{1,1}\right)_{12} & 0\\ 0 & \left(B^{33}_{1,1}\right)_{22} & 0\\ 0 & 0 & \left(B^{23}_{1,1}\right)_{33} \end{bmatrix},$$

де

$$\left(B_{1,1}^{22}\right)_{11} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,2} + \frac{S_2}{2}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,12} - \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,2}\overset{\circ}{h}_{22,1};$$

$$\left(B_{1,1}^{22}\right)_{12} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2} + \frac{S_2}{2}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,12} - \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2}\overset{\circ}{h}_{22,1};$$

$$\left(B_{1,1}^{33}\right)_{22} = \frac{1}{4}\left(\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)^2 \left(2\overset{\circ}{z}{}^{2'} S_1 + \overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,1} - \overset{\circ}{z}{}^{2'}\overset{\circ}{h}_{33,1}\right);$$

$$\left(B_{1,1}^{23}\right)_{33} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(2S_1S_2 - \frac{1}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\left(\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,12} + 2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2} S_1 - \frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{1}\,\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{2}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right) - \frac{1}{2}\left(S_2 - \frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{2}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right)\left(\overset{\circ}{h}_{22,1} + \overset{\circ}{h}_{33,1}\right)\right).$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{2,1}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(B_{2,1}^{22}\right)_{23} \\ \left(B_{2,1}^{23}\right)_{31} & \left(B_{2,1}^{23}\right)_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$\left(B_{2,1}^{22}\right)_{23} = \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(2S_1 - \overset{\circ}{h}_{33,1}\right);$$

$$\left(B_{2,1}^{23}\right)_{31} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,2} S_1 + \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,12} - \frac{1}{8}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,2}\left(\overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2}\right);$$

$$\left(B_{2,1}^{23}\right)_{32} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2} S_1 + \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,12} - \frac{1}{8}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2}\left(\overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2}\right).$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{1,2}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \left(B_{1,2}^{22}\right)_{11} & \left(B_{1,2}^{22}\right)_{12} & 0 \\ 0 & \left(B_{1,2}^{33}\right)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \left(B_{1,2}^{23}\right)_{33} \end{bmatrix},$$

де

$$\left(B^{33}_{1,2}\right)_{22}=\frac{1}{4}\left(\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)^2\left(2\overset{\circ}{z}{}^{2'}S_2+\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2}-\overset{\circ}{z}{}^{2'}\overset{\circ}{h}_{33,2}\right);$$

$$\left(B^{23}_{1,2}\right)_{33}=\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\left(2S_1S_2-\frac{1}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\left(\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,12}+2\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,1}S_2-\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{1}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{2}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right)-\frac{1}{2}\left(S_1-\frac{\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{1}}{\overset{\circ}{z}{}^{2'}}\right)\left(\overset{\circ}{h}_{11,2}+\overset{\circ}{h}_{33,2}\right)\right).$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{2,2}\right]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\left(B^{22}_{2,2}\right)_{23}\\\left(B^{23}_{2,2}\right)_{31}&\left(B^{23}_{2,2}\right)_{32}&0\end{bmatrix},$$

де

$$\left(B^{23}_{2,2}\right)_{31}=\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,1}S_2+\frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,12}-\frac{1}{8}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,1}\left(\overset{\circ}{h}_{11,2}+\overset{\circ}{h}_{33,2}\right);$$

$$\left(B^{23}_{2,2}\right)_{32}=\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,1}S_2+\frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,12}-\frac{1}{8}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,1}\left(\overset{\circ}{h}_{11,2}+\overset{\circ}{h}_{33,2}\right).$$

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій у ряд Маклорена через коефіцієнти розкладу переміщень, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\delta W=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left(\delta\{u_l\}^T\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\psi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\psi^{(l)}_{,3}\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\delta\{u_l\}^T\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T\psi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T\psi^{(l)}_{,3}\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}_{,\alpha}\right)\right)\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3. \qquad (55)$$

Коефіцієнти розкладення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}=\left[\overset{\circ}{D}\right]\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\};\qquad\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}=\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}, \qquad (56)$$

де, у відповідності із законом Гука,

$$\left[\overset{\circ}{D}\right]=\left[\overset{\circ}{d}{}^{ijkl}\right];$$

$$\left[\overset{\circ}{D},_{\alpha}\right]=\left[\left[\overset{\circ}{d}{}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)}\right]\left[\overset{\circ}{d}{}^{ij33}\right]\left[\overset{\circ}{d}{}^{ij(3-\alpha)}\right]\right]. \qquad (57)$$

З урахуванням цього вираз для варіації енергій деформування СЕ (55) набуває вигляду:

$$\delta W=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}^T\left[\overset{\circ}{D}\right]\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon},_{\alpha}\right\}^T\left[\overset{\circ}{D},_{\alpha}\right]\left\{\overset{\circ}{\varepsilon},_{\alpha}\right\}\right)\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3. \qquad (58)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W=\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{L}\left(\delta\{u\}_l^T\right)[K]_{ln}\{u\}_n, \qquad (59)$$

де $[K]_{ln}$ – матриця жорсткості неоднорідного незамкнутого кільцевого скінченного елементу з довільними граничними умовами на торцях:

$$[K]_{ln}=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\psi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\psi^{(l)}_{,3}\right)\left[\overset{\circ}{D}\right]\times\sum_{n=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]\psi^{(n)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]\psi^{(n)}_{,3}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T\psi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T\psi^{(l)}_{,3}\right)\left[\overset{\circ}{D},_{\alpha}\right]\times\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{n=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]\psi^{(n)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]\psi^{(n)}_{,3}\right)\right]\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx. \qquad (60)$$

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком x^3 з урахуванням неоднорідності, введемо позначення:

$$[D]_{00}^{ln}=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\psi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\psi_m^{(n)}\,dx^3=\sum_{m=1}^{M}\psi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\psi_m^{(n)}H_m;$$

$$[D]_{30}^{ln}=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\psi_{,3\ m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\psi_m^{(n)}\,dx^3=\sum_{m=1}^{M}\psi_{,3\ m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\psi_m^{(n)}\,H_m;$$

$$[D]_{03}^{ln}=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\psi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\psi_{,3\ m}^{(n)}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\psi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\psi_{,3\ m}^{(n)}H_m;$$

$$[D]_{33}^{ln}=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\psi_{,3\ m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\psi_{,3\ m}^{(n)}\,dx^3=\sum_{m=1}^{M}\psi_{,3\ m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\psi_{,3\ m}^{(n)}\,H_m;$$

(61)

$$[D]_{00\alpha}^{ln}=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\psi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\psi_m^{(n)}\,dx^3=\sum_{m=1}^{M}\psi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\psi_m^{(n)}\,H_m;$$

$$[D]_{30\alpha}^{ln}=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\psi_{,3\ m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\psi_m^{(n)}\,dx^3=\sum_{m=1}^{M}\psi_{,3\ m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\psi_m^{(n)}\,H_m;$$

$$[D]_{03\alpha}^{ln}=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\psi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\psi_{,3\ m}^{(n)}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\psi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\psi_{,3\ m}^{(n)}H_m;$$

$$[D]_{33\alpha}^{ln}=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\psi_{,3\ m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\psi_{,3\ m}^{(n)}\,dx^3=\sum_{m=1}^{M}\psi_{,3\ m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\psi_{,3\ m}^{(n)}\,H_m.$$

З урахуванням цих виразів для матриці жорсткості СЕ отримаємо:

$$[K]_{ln}=\Bigg\{[\overset{\circ}{B}_1]^T[D]_{00}^{ln}[\overset{\circ}{B}_1]+[\overset{\circ}{B}_2]^T[D]_{30}^{ln}[\overset{\circ}{B}_2]+[\overset{\circ}{B}_1]^T[D]_{03}^{ln}[\overset{\circ}{B}_2]+$$
$$+[\overset{\circ}{B}_2]^T[D]_{33}^{ln}[\overset{\circ}{B}_2]+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg([\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}]^T[D]_{00\alpha}^{ln}[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}]+$$
$$+[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}]^T[D]_{30\alpha}^{ln}[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}]+[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}]^T[D]_{03\alpha}^{ln}[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}]+$$
$$+[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}]^T[D]_{33\alpha}^{ln}[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}]\Bigg)\Bigg\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\ . \qquad (62)$$

Виходячи з виразу (17) варіація роботи інерційних сил одного скінченного елемента описується співвідношенням:

$$\delta K^e = -\int\limits_{x^1}\int\limits_{x^2}\int\limits_{x^3} \rho \ddot{u}^{k'} \delta u_{k'} \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3 . \qquad (63)$$

У виразі (63), виконаємо перетворення $\ddot{u}^{k'}$ за формулою:

$$\ddot{u}^{k'} = g^{k'j'}\, \ddot{u}_{j'} \qquad (64)$$

Тоді:

$$\delta K^e = -\int\limits_{x^1}\int\limits_{x^2}\int\limits_{x^3} \delta^{(k')}_{(n')} \rho g^{k'j'} \ddot{u}_{j'} \delta u_{k'} \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3 , \qquad (65)$$

де $\delta^{(k)'}_{(j')}$ – символ Кронекера.

Представляючи прискорення та переміщення через розкладання по поліномам (22), подамо вираз для варіації кінетичної енергії скінченного елементу у наступному вигляді:

$$\delta K^e = -\int\limits_{x^1}\int\limits_{x^2}\int\limits_{x^3} \delta^{(k')}_{(n')} \rho g^{k'j'} \sum_{l=0}^{L} \ddot{u}^l_{j'} \psi^l \sum_{m=0}^{M} \delta u^m_{k'} \psi^m \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3 .$$

Використовуючи припущення про осереднення маси біля вузла, який розглядається, і враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає одній четвертій частині мас елементів примикаючих до даного вузла, перепишемо варіацію кінетичної енергії у векторній формі:

$$\delta K^e = -\sum_{l=l_0}^{L} \sum_{m=m_0}^{L} \delta\left\{ \{u_{k'}\}^l_{(S_1,S_2)} \right\}^T [m]_{lm} \left\{ \{\ddot{u}_{k'}\}^m_{(S_1,S_2)} \right\}, \qquad (66)$$

де $\{\ddot{u}_{k'}\}^T_l = \left\{ \ddot{u}^l_{k'(-1;-1)} \quad \ddot{u}^l_{k'(1;-1)} \quad \ddot{u}^l_{k'(-1;1)} \quad \ddot{u}^l_{k'(1;1)} \right\}$.

В наведеному співвідношенні (66) $[m]_{lm}$ - амплітудна “неузгоджена” матриця мас неоднорідного елемента, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \left[\left[m^{k'} \right]^{lm}_{(S_1,S_2)(S_1,S_2)} \right] = \frac{1}{4} \sqrt{g}\, \rho_{lm} \left[\left[g^{k'(k')} \right]_{(S_1,S_2)} \right] , \qquad (67)$$

де

$$\left[\left[g^{k'j'} \right]_{(P_1,P_2)} \right] = diag \left[\left[g^{k'j'} \right]_{(-1,-1)} \quad \left[g^{k'j'} \right]_{(1,-1)} \quad \left[g^{k'j'} \right]_{(-1,1)} \quad \left[g^{k'j'} \right]_{(1,1)} \right],$$

$$\left\lfloor g^{k'j'} \right\rfloor_{(P_1,P_2)} = diag\left\lfloor g^{1'1'} \quad g^{2'2'} \quad g^{3'3'} \right\rfloor.$$

$$\rho_{lm} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \rho\psi^l\psi^m dx^3 = \sum_{k=1}^{K} \left(\rho\psi^l\psi^m\right)_k H_k \ .$$

Тут: $\rho_{k'}$ - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає *k*-ій точці інтегрування.

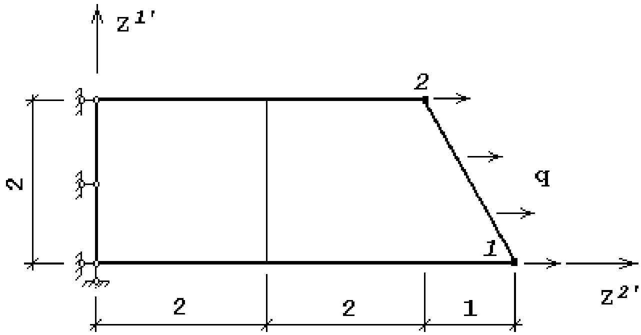

Рис. 3. Розрахункова схема двомірного пружного стержня

Дослідження впливу компонент розкладу деформацій в ряд Маклорена, що виникають за рахунок диференціювання фізичних компонент тензора деформацій, на збіжність моментної схеми методу скінченних елементів, розглянемо на прикладі двомірного пружного стержня під дією вісьового розтягуючого тиску, інтенсивністю $q = 2/\sqrt{5}$ (рис.3). Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона дорівнюють відповідно $E = 2.2\times10^4$, $\nu = 0$.

Проведено розв'язання ряду задач із зміною сіткових параметрів моделі при урахуванні диференціювання метрики (запропонований підхід) та без нього [1]. В табл.1.1 представлені значення переміщень в контрольних точках *1, 2,* в залежності від числа СЕ по товщині стержня.

Рис.4 відображає ці результати у вигляді кривих похибки визначення переміщень, лінії *a, b* – [1], *c,d* – запропонована методика. Криві *b, c* відповідають точці *1*, а *a, d* – точці *2*. Збільшення кількості СЕ по довжині моделі не призводило до значного уточнення результатів.

Таким чином, запропонований підхід для скінченних елементів з енергією деформації на базі фізичних компонент тензорів напружень і деформацій та усередненими значеннями фізико-механічних і геометричних параметрів в області поперечного перетину СЕ забезпечують високу швидкість збіжності результатів до точного і значне скорочення об'ємів обчислень, що пов'язані з чисельним інтегруванням.

Таблиця 1

Кіл-сть СЕ	**[1],** $\times 10^{-4}$		**Запропонований підхід,** $\times 10^{-4}$	
	1	***2***	***1***	***2***
1	1.81818	2.27273	2.25851	1.82897
2	2.13705	1.94979	2.26864	1.84322
3	2.20367	1.89888	2.27037	1.84638
4	2.23140	1.87944	2.27116	1.84805
5	2.24536	1.87000	-"-	-"-
6	2.25331	1.86473	-"-	-"-
7	2.25824	1.86149	-"-	-"-
8	2.26150	1.85936	-"-	-"-

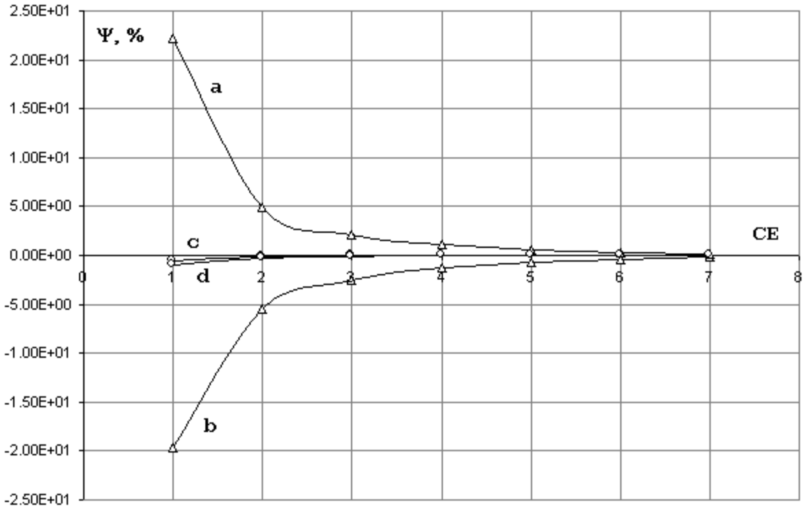

Рис. 4. Результати розрахунку

Розрахункові співвідношення НМСЕ отримані в рамках просторових задач динаміки, що дозволяють розглядати неоднорідні незамкнені тіла обертання із складною формою і структурою поперечного перетину, з довільними граничними умовами на торцях. При виведенні рівнянь не накладались обмеження на характер розподілення масових і механічних властивостей матеріалів вздовж направляючої.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
2. *Блох В.И.* Теория упругости Харьков: Изд-во Харьк. ун-та .- 1964. –483с.
3. *Гуляр А.И., Козак А.Л., Сахаров А.С.,Чорный С.М.* “Применение МСКЭ к расчету круглых пластин и оболочек вращения” // Сопротивление материалов и теория сооружений. –1978. –Вып.33. –С.81-85.
4. *Гуляр А.И., Сахаров А.С., Чорный С.М.* “Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования” // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1978, №32 – с.3-10.
5. *Друккер Д.* Вариационные принципы в математическом теории пластичности // Механика.- М.: ИП, 1959.- № 6.
6. *Кислоокий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А.* “Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек” // Проблемы прочности. –1977. -№7. –С.25-33.
7. *Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. - Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
8. *Сахаров А.С.* “Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений” // Сопротивление материалов и теория сооружений. –1974. –Вып.24. –С.147-156.
9. Сніжко Н.А., Солодей І.І.,Овсянніков О.С., Шевченко Ю.В. Вимушені коливання баштової градирні АЕС під дією вітрового навантаження. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2004 р. - Вип. 74. - С. 92-103.

Надійшла до редколегії 20.11.2005 р.