УДК 539.3

**Соловей М.О.,** канд. техн. наук

# МОДИФІКОВАНИЙ ПРОСТОРОВИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТОНКИХ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК

Розглянута методика підвищення універсальності просторового скінченного елемента в задачах нелінійного деформування та стійкості тонких неоднорідних оболонок.

При розрахунках оболонкових конструкцій звичайно застосовують теорії, що розроблені для окремого типу оболонок, наприклад, для оболонок з канонічними формами серединної поверхні, змінної товщини, ребристих, з отворами, з виїмками, з багатошаровою структурою матеріалу. З кожним видом конструктивних особливостей пов'язані свої відмінності у напружено-деформованому стані (НДС) оболонок. Це потребує корегування розв'язувальних рівнянь для відповідного варіанта теорії оболонок. Одночасне врахування різноманітних геометричних особливостей та неоднорідностей матеріалу призводить до значних ускладнень і необхідності розробки нових розрахункових методик, що призначені для оболонок більш загального типу.

Сучасним підходом до розробки нових методів розрахунків є застосування співвідношень тривимірної теорії пружності, що дозволяє ефективно досліджувати тонкі оболонки з різноманітними конструктивними особливостями. Найбільш успішно ця проблема розв'язується методом скінчених елементів (МСЕ) на основі використання для неоднорідних оболонок універсальних просторових скінчених елементів (СЕ) [1-4]. В роботах [5-13] запропоноване та реалізоване розширення універсальності просторового СЕ на статичні задачі нелінійного деформування, стійкості та позакритичної поведінки тонких неоднорідних оболонок при навантаженні зовнішніми силами та нерівномірним об'ємним нагрівом. Під неоднорідністю оболонки розуміються: 1) геометричні особливості у вигляді неперервно-змінної та ступінчато-змінної товщини, зломи серединної поверхні та отвори; 2) неоднорідність матеріалу оболонки за товщиною та в плані у вигляді комбінації різних багатошарових пакетів. При розробці скінченноелементної моделі (СЕМО) неоднорідної оболонки застосований ефективний підхід апроксимації тонкої оболонки за товщиною одним просторовим скінченним елементом.

Геометрично оболонка представляється як тривимірне тіло, що обмежене двома граничними і контурною поверхнями (рис. 1). Розглядаються тонкі змінної товщини багатошарові оболонки складної геометричної форми, які можуть бути підкріплені ребрами та накладками або послаблені виїмками й отворами, мати зломи серединної поверхні. Ділянки оболонки, на яких розміщені обшивка, ребра, накладки та виїмки, розглядаються як ділянки неперервно-змінної або ступінчасто-змінної товщини. Обшивка оболонки, ребра та накладки можуть складатися з довільного числа шарів змінної товщини, що поєднані між собою в єдиний пакет без проковзування та відриву по поверхнях контактів. У загальному випадку в кожному шарі матеріал може бути анізотропним та різним.

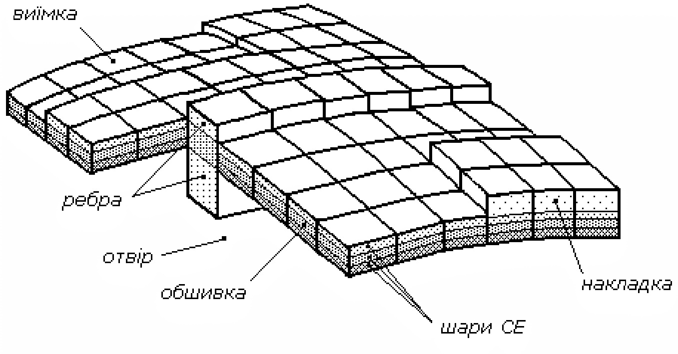


Рис. 1. Фрагмент скінченноелементної моделі неоднорідної оболонки

Дослідження процесів нелінійного деформування неоднорідних оболонок у даній роботі виконується на основі загальної лагранжевої постановки варіаційної задачі у приростах [14], коли траєкторія деформацій та вектора напружень будується за компонентами прирощень скінченних деформацій та прирощень напружень у базисі лагранжевої (супутньої) системи координат. НДС тонкої оболонки на всіх кроках її навантаження розглядається з точки зору геометрично нелінійних співвідношень тривимірної теорії термопружності з урахуванням усіх нелінійних членів і компонент тензорів деформацій та напружень. Використана модель пружного нелінійно деформівного суцільного середовища при великих переміщеннях і малих деформаціях, компоненти яких є лінійними функціями напружень. Матеріали шарів оболонки розглядаються як лінійно-пружні, властивості яких відповідають узагальненому закону Дюамеля-Неймана [15].

Використовуючи класифікацію матеріалів, що прийнята в [16], розглядаються як однорідні, так і неоднорідні матеріали. У запропонованій просторовій скінченноелементній моделі оболонки (СЕМО) ці неоднорідності зведені до "дискретних", що структуруються як за товщиною, так і у плані [11]. Прийнято, що в загальному випадку пружні властивості анізотропних матеріалів шарів скінченних елементів оболонки за трьома напрямками (вздовж товщини та у плані від елемента до елемента) змінюються ступінчато. Звідси випливає припущення про незмінність в об'ємі скінченного елемента пружних властивостей матеріалів шарів. Для моделювання властивостей неоднорідного матеріалу оболонки використовуються ізотропні, трансверсально-ізотропні та ортотропні матеріали, які є найбільш розповсюдженими типами моделей конструктивних матеріалів. У кожному окремому СЕ головні осі трансверсально-ізотропних та ортотропних матеріалів шарів можуть розміщуватись на серединній поверхні кожного шару під довільним кутом до місцевих осей [11]. Таким чином, при структуруванні неоднорідностей матеріалу є можливість виконувати апроксимацію криволінійної анізотропії матеріалу в шарах оболонки.

Застосована некласична гіпотеза деформівної прямої, яку визначаємо таким чином: пряма у напрямку товщини оболонки до деформування залишається прямою і після деформування, скорочуючись або подовжуючись при цьому. Ця пряма не обов'язково є нормаллю до серединної поверхні оболонки. Розподіл переміщень в напрямку товщини прийнятий лінійним, що є загально прийнятим припущенням у теорії тонких оболонок. Прийнята кінематична гіпотеза при певних обмеженнях на властивості матеріалів шарів дає достатньо достовірні результати в задачах стійкості та коливань тонких багатошарових оболонок [3].

Розглядається усталений температурний процес, при якому температурне поле за об'ємом оболонки вважається відомою та незалежною від НДС функцією координат. Таким чином, вихідна задача термопружності розглядається у квазістатичній постановці [15]. Розподіл температури за товщиною кожного шару оболонки прийнятий лінійним. Тому, як наслідок, ця залежність за товщиною багатошарового пакета має вигляд ламаної, що дає можливість моделювати нелінійні закони розподілу температури в об'ємі оболонки.

Дія на оболонку різних статичних силових і температурних полів розглядається як єдиний процес навантаження. При розв'язанні окремих задач задаються відповідні залежності між загальним параметром навантаження та параметрами силових і температурних полів.

При отриманні розв’язувальних рівнянь для неоднорідних оболонок існують труднощі врахування спільної роботи елементів конструкції різної мірності. Наприклад, для ребристих оболонок застосовується декілька способів урахування спільної роботи системи обшивка-ребра. Заміна ребристої оболонки гладкою конструктивно-ортотропною призводить до використання рівнянь анізотропних або ортотропних оболонок [17]. Такий підхід застосовується в тих випадках, коли напівхвиля в отримуємих формах втрати стійкості припадає на декілька ребер при їх відносно малій жорсткості. Більш узагальненим є спосіб, у якому враховується дискретне розташування ребер. У цьому випадку ребриста оболонка може розглядатись на основі наступних підходів: як стержнева система, що приєднана до обшивки; як обшивка, що підкріплена дискретно розміщеними ребрами; як оболонка ступінчато-змінної товщини.

При розрахунках тонких ребристих оболонок, у яких використовуються просторові СЕ, застосовуються такі два підходи:

1) обшивка та підкріплюючі її конструктивні елементи (ребра та накладки) моделюються за товщиною декількома СЕ, що звичайно визнається неекономічним [1];

2) гладкі ділянки обшивки та ділянки ступінчато-змінної товщини оболонки моделюються за товщиною одним просторовим СЕ, який може збільшувати свою товщину та розташовуватися ексцентрично відносно серединної поверхні обшивки [5].

Другий спосіб використовується в роботі для підвищення універсальності просторового СЕ і за рахунок цього – для розширення кола досліджуємих оболонок. У розробленому методі запропоноване врахування не тільки ступінчатого збільшення товщини СЕ, а й ступінчатого її зменшення. Це дозволяє за єдиною розрахунковою схемою враховувати наявність в оболонці не тільки одно- та двосторонніх ребер і накладок, а й одно- та двосторонніх виїмок і каналів. Чисельне вивчення й обґрунтування такого способу врахування ступінчато-змінної товщини оболонок у задачах міцності та стійкості при дії силових навантажень представлено в роботах [5, 6, 10, 13], при дії термосилових навантажень – в [7- 9, 12, 13].

Побудова скінченноелементної моделі неоднорідної оболонки виконується з застосуванням “модифікованого” СЕ (СЕМ) (рис. 2, а), який розроблений на основі відомого (“стандартного”) ізопараметричного просторового СЕ з полілінійними функціями форми [18]. Полілінійний закон зміни координат в об'ємі СЕ визначається як

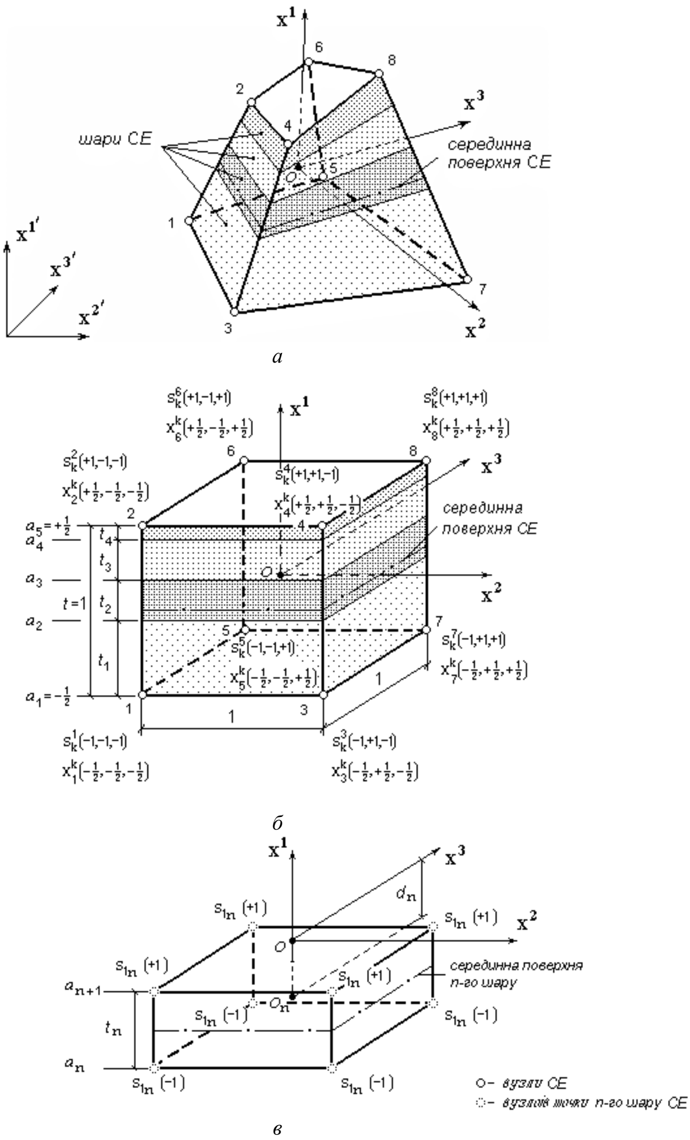

Рис. 2. Багатошаровий просторовий СЕ оболонки: а) геометрична форма; б) топологічна модель; в) параметри *n*-го шару

$$x^{i'}(x^k) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^{3} \left( s_{(k)} x^{(k)} + \frac{1}{2} \right) x^{i'}_{s_1 s_2 s_3} \,, \tag{1}$$

де $x^{i'}(x^k)$ – глобальні декартові координати точки СЕ; $x^{i'}_{s_1 s_2 s_3}$ – задані глобальні декартові координати вузлів СЕ; $x^k$ – місцеві нормалізовані координати точки СЕ; $x^k_{s_1 s_2 s_3} = \pm\frac{1}{2}$ – місцеві нормалізовані координати вузлів СЕ (рис. 2, б); $s_k = sign(x^k_{s_1 s_2 s_3})$ – умовні (сіткові) лагранжеві координати вузлів СЕ.

Перетворення скінченного елемента обшивки (СЕО) (шестигранник $ABCDEFGH$) у СЕМ зі зміненими розмірами (шестигранник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{G}\tilde{H}$) виконується вздовж осі $x^1$ за товщиною обшивки (рис. 3, а).

Приймемо наступні позначення (рис. 3): $t_{s_2 s_3}$ та $\tilde{t}_{s_2 s_3}$ – довжини ребер $AB$ та $\tilde{A}\tilde{B}$; $t^{i'}_{s_2 s_3}$ та $\tilde{t}^{i'}_{s_2 s_3}$ – проекції довжин ребер $AB$ та $\tilde{A}\tilde{B}$ на декартові осі $x^{i'}$; $r_{s_2 s_3}$ – відстань між серединами ребер $AB$ та $\tilde{A}\tilde{B}$ (точками $S$ та $\tilde{S}$).

Задача перетворення СЕО в СЕМ зводиться до заміни ребер СЕО ($AB$, $CD$, $EF$, $GH$) на ребра СЕМ ($\tilde{A}\tilde{B}$, $\tilde{C}\tilde{D}$, $\tilde{E}\tilde{F}$, $\tilde{G}\tilde{H}$). Ребра розглядаємо як вектори, оскільки точки $A, C, E, G$, $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{G}$ та $B, D, F, H$, $\tilde{B}, \tilde{D}, \tilde{F}, \tilde{H}$ зафіксовані як "нижні" та "верхні" відносно серединних поверхонь елементів. Етапи перетворення ребер СЕО пояснюються на рис. 3 на прикладі ребер $AB$ та $\tilde{A}\tilde{B}$.

Перший етап перетворень полягає у зміні довжини ребер СЕО $t_{s_2 s_3} = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ на довжину ребер СЕМ $\tilde{t}_{s_2 s_3} = \left|\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}\right|$. Розглядаючи ребра як вектори, перетворення будемо виконувати для їхніх проекцій на декартові осі $t^{i'}_{s_2 s_3}$ та $\tilde{t}^{i'}_{s_2 s_3}$. На другому етапі визначаються декартові координати $\tilde{x}^{i'}_{s_2 s_3}$ середин ребер СЕМ (точка $\tilde{S}$) через координати $x^{i'}_{s_2 s_3}$ середин ребер СЕО (точка $S$) з урахуванням вектора зсуву $\vec{r}_S$.

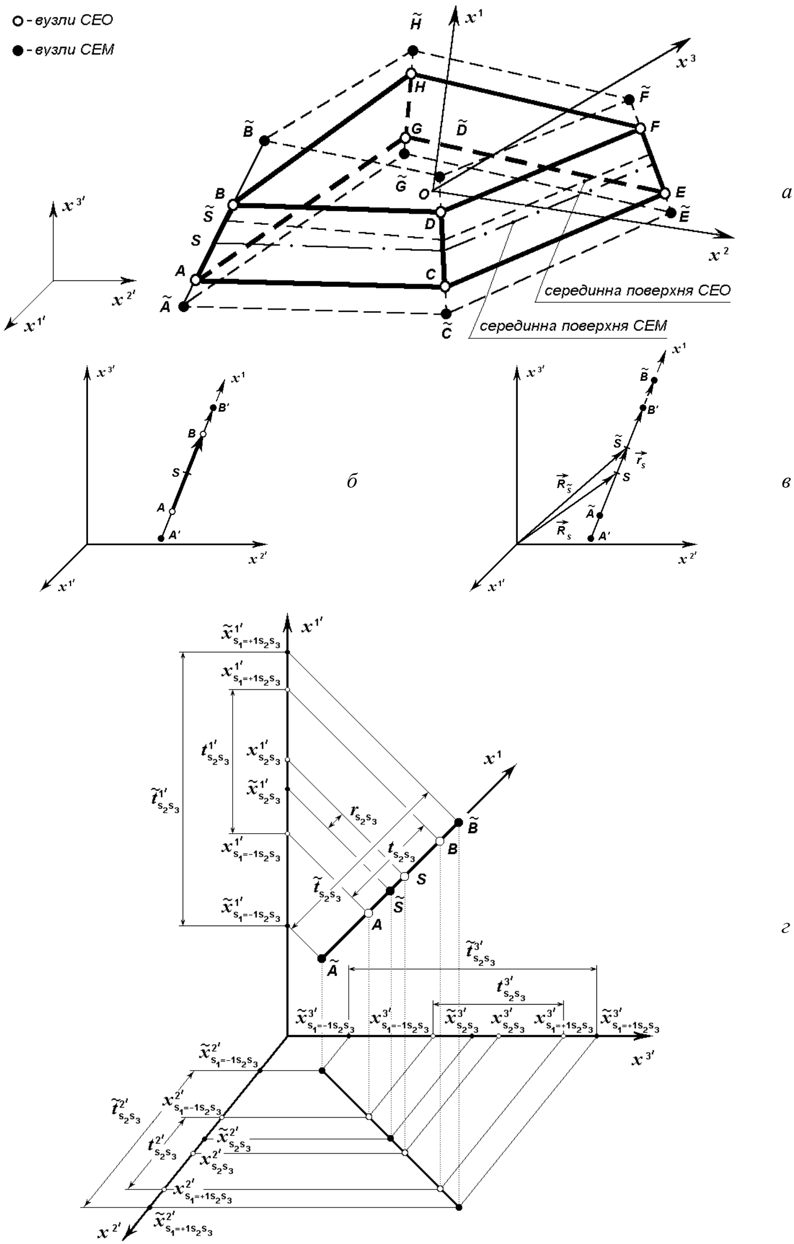


Рис. 3. Перетворення координат ребер просторового скінченного елемента

Обчислення величин $x_{s_2 s_3}^{i'}$ та $t_{s_2 s_3}^{i'}$ для СЕО виконується за формулами

$$x_{s_2 s_3}^{i'} = \frac{x_{s_1=+1 s_2 s_3}^{i'} + x_{s_1=-1 s_2 s_3}^{i'}}{2}, \qquad t_{s_2 s_3}^{i'} = x_{s_1=+1 s_2 s_3}^{i'} - x_{s_1=-1 s_2 s_3}^{i'} . \tag{2}$$

Необхідну трансформацію ребер СЕ зручно задавати вузловими коефіцієнтами перетворень: $b_{s_2 s_3} = \tilde{t}_{s_2 s_3} / t_{s_2 s_3}$ – коефіцієнт зміни довжини ребра; $a_{s_2 s_3} = \pm \left| \vec{r}_{s_2 s_3} \right| / t_{s_2 s_3}$ – коефіцієнт зміщення ребра ( $a_{s_2 s_3}$ >0, якщо напрямок $\vec{r}_{s_2 s_3}$ співпадає з напрямком осі $x^1$). Звідси маємо, що СЕО, як частинний випадок, є СЕМ, для якого коефіцієнти $b_{s_2 s_3} = 1$, $a_{s_2 s_3} = 0$ .

Вузлові координати на серединній поверхні СЕМ та відповідні вузлові проекції товщин СЕМ у декартовій системі координат обчислюються за формулами

$$\tilde{x}_{s_2 s_3}^{i'} = x_{s_2 s_3}^{i'} + a_{s_2 s_3} t_{s_2 s_3}^{i'} , \qquad \tilde{t}_{s_2 s_3}^{i'} = b_{s_2 s_3} t_{s_2 s_3}^{i'} . \tag{3}$$

У нашій задачі координати вузлів просторового СЕО $x_{s_1 s_2 s_3}^{i'}$ задаються як вихідна інформація, а координати вузлів просторового СЕМ $\tilde{x}_{s_1 s_2 s_3}^{i'}$ знаходяться через обчислені у (3) величини

$$\tilde{x}_{s_1 s_2 s_3}^{i'} = \tilde{x}_{s_2 s_3}^{i'} + \frac{s_1}{2} \tilde{t}_{s_2 s_3}^{i'} . \tag{4}$$

Послідовність моделювання геометрії СЕМО є наступною.

1. Задаються геометричні характеристики СЕМО у вигляді вузлових декартових координат на граничних поверхнях обшивки оболонки, яка природним шляхом проходить через ділянки стутінчато-змінної товщини.

2. У побудованій СЕМО спеціальними ознаками позначаються ті СЕО, в яких необхідно виконати перерахунок вузлових координат для моделювання ділянок ступінчато-змінної товщини модифікованими скінченними елементами.

3. При наявності в СЕО спеціальних ознак згідно до заданих коефіцієнтів $b_{s_2 s_3}$ та $a_{s_2 s_3}$ по співвідношенням (2)-(4) виконується перетворення вузлових координат СЕО у вузлові координати СЕМ. Метою цих перетворень є необхідне збільшення (або зменшення) розмірів

ребер СЕО та їх зміщення вздовж координатних ліній $x^1$ місцевої системи координат (у напрямку товщини оболонки – вздовж ребер СЕО).

Розроблений спосіб утворення геометрії СЕМО ступінчато-змінної товщини можна віднести до класу так званих топологічних перетворень [19]. Таке перетворення форми СЕО у форму СЕМ у нашому випадку виконується за співвідношеннями (2)-(4) як взаємно неперервне та однозначне. Незмінність топологічних властивостей форми СЕО та СЕМ необхідно забезпечувати при задаванні напрямків координатних ліній $x^1$, які повинні окреслювати поверхні, лінії та точки характерних ділянок оболонки ступінчато-змінної товщини (включень, виїмок, ребер, зломів та отворів).

Обчислення за співвідношеннями (2)-(4), які переводять кожну пряму лінію знову в пряму, відносяться до класу афінних перетворень. Коефіцієнт $a_{s_2 s_3}$ можна назвати коефіцієнтом розтягу або стиснення ребер СЕ відносно його серединної поверхні (зі зміною відстаней між їхніми точками), а коефіцієнт $b_{s_2 s_3}$ – коефіцієнтом перенесення ребер СЕ вздовж координатних ліній $x^1$ (без зміни відстаней між їхніми точками).

Запропонована та реалізована в роботі ідея трансформації (модифікації) форми СЕО у форму СЕМ може бути прикладом створення нових типів універсальних СЕ на основі відомих елементів за допомогою топологічних перетворень, але вже по іншим ніж (2)-(4) співвідношенням. При цьому можна запропонувати ввести класифікацію модифікованих скінченних елементів за різними типами топологічних перетворень. Наприклад, СЕ з паралельним перенесенням об'єму форми; СЕ, що отримані рухом форми (при збереженні відстаней між точками об'єму); СЕ з розтягом або стисненням об'єму відносно серединної поверхні форми (зі зміною відстаней між точками об'єму) та інші.

Параметри модифікованого СЕ, які поділяються на **топологічні**, **геометричні** та **фізико-механічні**, можуть бути **сталими** та **змінними** (табл. 1). Сталі топологічні та геометричні параметри характеризують елемент як просторовий (вимірність 3), що має 8 вузлів, 6 граней та 12 ребер (рис. 2, а) з заданими сітковими та місцевими координатами вузлів (рис. 2, б). **Основні** змінні геометричні параметри призначені для задавання через декартові координати вузлів на обшивці оболонки необхідної геометричної форми СЕ. В отриманих співвідношеннях МСЕ застосовуються метричні характеристики СЕ, які осереднені в центрах його об’єму, граней та ребер. Це дозволило, у випадках коли сусідні вузли знаходяться в одній точці (тобто їхні координати співпадають), застосовувати СЕ, які геометрично перетворюються з криволінійного шестигранника в інші більш прості форми. Така властивість елемента збільшує можливості його застосування при побудові СЕМО з особливими точками та складної геометричної форми. Прикладами можуть бути СЕМО круглих пластинок і оболонок обертання, в центрах яких СЕ звичайно перетворюються в трикутні призми.

Розширення властивостей "стандартного" просторового СЕ отримане за рахунок перевизначення його основних параметрів та введення нових змінних **додаткових** топологічних, геометричних і фізико-механічних параметрів. Призначення цих параметрів полягає в наступному (табл. 1).

Перший параметр задає ознаку необхідності перетворення скінченного елемента обшивки (СЕО) у СЕ зі зміненими геометричними параметрами (СЕМ) (рис. 3, а). Якщо необхідно виконати цю модифікацію, то елемент позначається як СЕМ, якщо ні – як СЕО.

Другий параметр задає кількість шарів $m$, яка необхідна для моделювання неоднорідностей матеріалу та розподілу температури вздовж товщини елемента.

Третій параметр задає товщини ребер СЕМ в шарах $\underset{n}{t}_{s_2 s_3}$ ($n$=1,…,$m$) (рис. 2).

Четвертий параметр задає відстані між серединами ребер СЕО і СЕМ $r_{s_2 s_3}$ (рис. 3, г).

П'ятий параметр задає типи матеріалів шарів скінченого елемента $\underset{n}{M}$, які можуть бути ізотропними, ортотропними або трансверсально-ізотропними.

Шостий параметр задає технічні термопружні сталі матеріалів шарів СЕ $\underset{n}{E''}, \underset{n}{\nu''}, \underset{n}{G''}$; $\underset{n}{\alpha''}$; $\underset{n}{\rho}$ (умовні позначення наведені для випадку ортотропного матеріалу).

Сьомий параметр задає кути орієнтації базису ортотропії для ортотропних матеріалів шарів $\underset{n}{\alpha}$.

Додаткові топологічні та фізико-механічні параметри СЕМ дозволяють описувати властивості елементів з різною кількістю шарів, кожен з яких може бути виконаний з різного типу матеріалів. З визначення змінних додаткових параметрів СЕМ випливає, що основні змінні параметри "стандартного" СЕ є частинним випадком, коли елемент є одношаровим і має ознаку СЕО.

Таблиця 1

Параметри універсального просторового скінченного елемента

| Види параметрів | | |
|---|---|---|
| сталі | змінні | |
| | основні | додаткові |
| топологічні | | |
| 1. вимірність – 3<br>2. кількість вузлів – 8<br>3. кількість граней – 6<br>4. кількість ребер – 12 | | 1. ознака СЕ: СЕО або СЕМ<br>2. кількість шарів – $m$ |
| геометричні | | |
| 5. сіткові координати вузлів – $s_k = \pm 1$<br>6. місцеві координати вузлів – $x^i_{s_1 s_2 s_3} = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ | 1. декартові координати вузлів СЕО – $x^{k'}_{s_1 s_2 s_3}$ | 3. товщини ребер в шарах СЕМ – $\underset{n}{t}_{s_2 s_3}$<br>4. відстані між серединами ребер СЕО і СЕМ – $r_{s_2 s_3}$ |
| фізико-механічні | | |
| | | 5. типи матеріалів шарів – $\underset{n}{M}$<br>6. технічні термопружні сталі матеріалів шарів – $\underset{n}{E''}, \underset{n}{\nu''}, \underset{n}{G''}; \underset{n}{\alpha''}; \underset{n}{\rho}$<br>7. кути орієнтації базису ортотропії матеріалів шарів – $\underset{n}{\alpha}$ |

Основні та додаткові геометричні параметри дозволяють розглядати оболонки зі складною формою серединної поверхні та з різними особливостями за товщиною (зломи серединної поверхні, гладко- та ступінчато-змінна товщина).

Описані параметри універсального просторового СЕ певним чином увійшли в отримані скінченноелементні співвідношення побудованої методики розрахунку широкого класу неоднорідних оболонок. Запропонований у роботі підхід до моделювання геометричних особливостей за товщиною та неоднорідностей матеріалу в конструктивних елементах тонкої оболонки відповідає принципу застосування єдиної розрахункової схеми – універсального просторового скінченного елемента. На рис. 4 показані дев'ять можливих варіантів геометрії СЕМ, які використовуються при моделюванні обшивки оболонки з одно- або двосторонніми ребрами та виїмками.

Застосування універсального просторового скінченного елемента дозволило удосконалити розрахункові схеми неоднорідних оболонок, враховуючи при цьому:

– особливості спільного геометрично нелінійного деформування різновимірних конструктивних елементів оболонкових конструкцій, що складаються з стержнів, пластин, оболонок та гнучких і жорстких масивних ребер;

– особливості поведінки в різноманітних процесах силового та температурного навантажень оболонкових конструкцій зі складною геометричною формою та багатошаровою структурою матеріалу при наявності ребер, накладок, виїмок, каналів, отворів, точкових, неперервних, жорстких, шарнірних та інших опор і з'єднань, змінності фізико-механічних характеристик матеріалів шарів.

Реалізований у роботі підхід дозволяє в рамках єдиної методології досліджувати НДС широкого класу оболонок. На рис. 5 подана схема типів неоднорідних оболонок, що підпадають під розроблену дискретну розрахункову модель. Оболонки поділені за наступними характерними ознаками.

1. За товщиною оболонки можуть бути одношаровими або багатошаровими (дво-, три- або $m$-шаровими).

2. Матеріал шару оболонки може бути одним з трьох типів: ізотропним, ортотропним або трансверсально-ізотропним.

3. Оболонка може мати геометричні особливості за товщиною та складну форму серединної поверхні.

4. Оболонки з геометричними особливостями за товщиною поділяються на гладкі (сталої та гладко-змінної товщини) та негладкі (ступінчато-змінної товщини). Оболонки зі складною формою серединної поверхні можуть бути як гладкими, так і мати зломи.

5. Негладкі оболонки ступінчато-змінної товщини за розмірами в плані геометричних особливостей поділяються на оболонки з одно-направленими ("вузькими") особливостями (ребра, канали) та оболонки з двох-направленими ("широкими") особливостями (накладки, виїмки, отвори).

6. Геометричні особливості, такі як ребра, накладки, канали та виїмки, можуть розміщуватись відносно серединної поверхні оболонки симетрично або несиметрично з ексцентриситетами різного знаку.

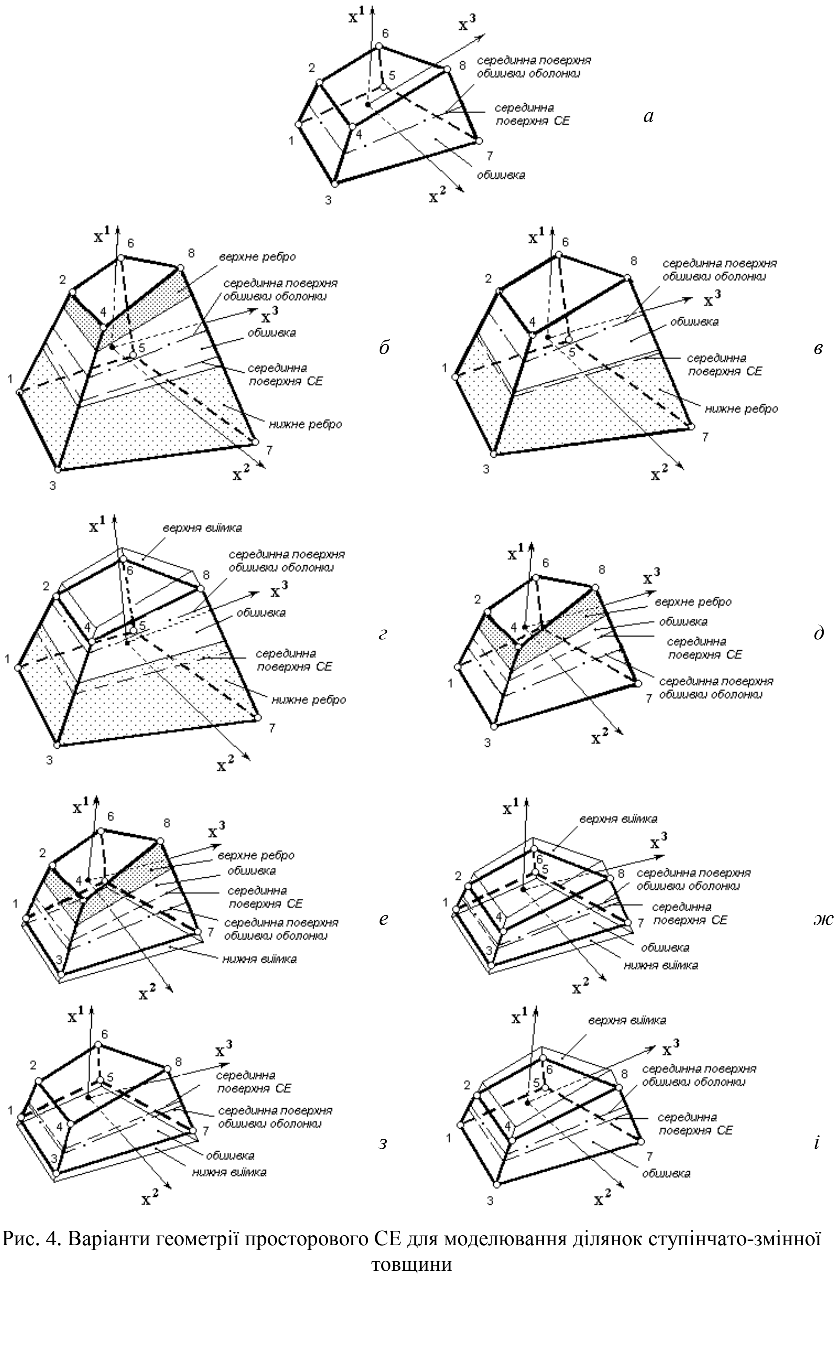


Рис. 4. Варіанти геометрії просторового СЕ для моделювання ділянок ступінчато-змінної товщини

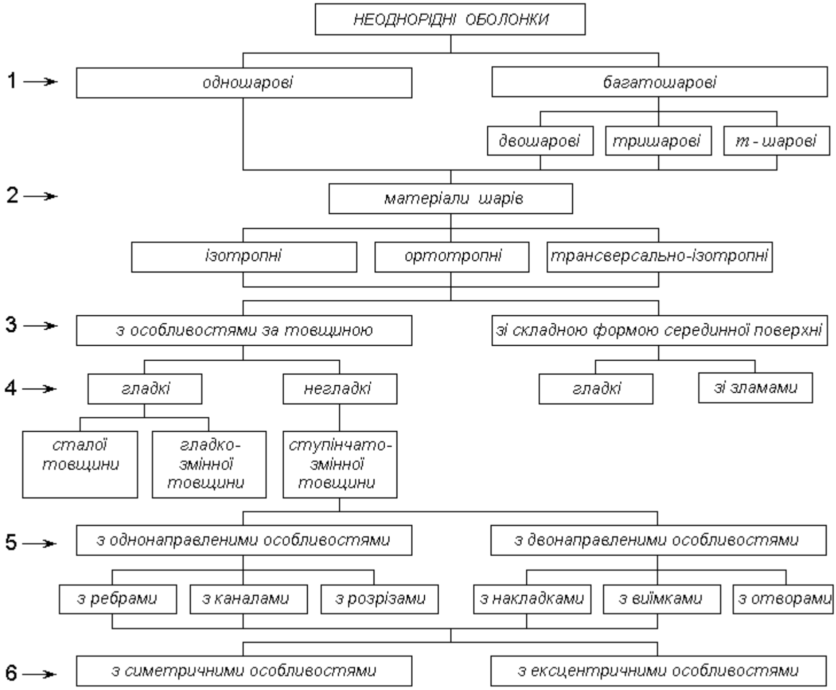


Рис. 5. Типи оболонок, що підпадають під розрахункову модель

Внаслідок застосування гіпотези деформівної прямої маємо певні обмеження на висоту ребра та жорсткість матеріалів шарів. При збільшенні висоти ребер (починаючи з деяких розмірів) і при значній (на 1-2 порядки) різниці у жорсткостях матеріалів шарів розрахункова модель не може враховувати всі особливості НДС та втрати стійкості.

На рис. 6 представлені приклади характерних конструктивних елементів оболонки, що моделюються за допомогою універсального СЕ. Різними відтінками в шарах обшивки, ребер і накладок зображені різні матеріали. Для загального випадку реалізована можливість врахування в кожному шарі кожного елемента свого типу матеріалу. Ребра, накладки, канали та виїмки можуть бути односторонніми та двохсторонніми, розміщуючись при цьому симетрично або ексцентрично відносно серединної поверхні обшивки. Моделювання вузьких ребер і каналів за їхньою шириною звичайно виконується одним СЕ. Моделювання отворів, широких ребер, накладок і виїмок потребує в залежності від НДС конструкції такої кількості елементів, яка визначається чисельними експериментами. При побудові СЕМО є можливість враховувати нахил стінок ребер, накладок, каналів , виїмок та отворів. В обшивці оболонки можлива поява вставок – ділянок, що виконані з інших ніж в основній частині обшивки матеріалів. Зломи в оболонці, яка розглядається як тривимірне тіло, моделюються просторовими СЕ природним шляхом.

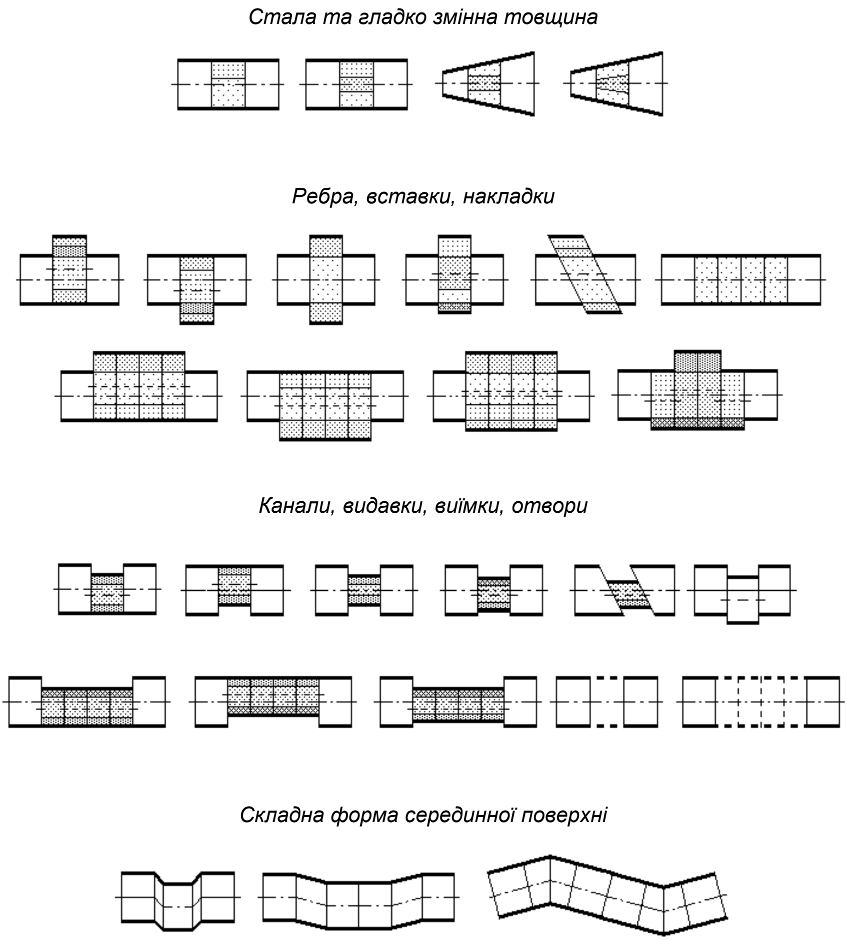


Рис. 6. Характерні типи конструктивних елементів неоднорідної оболонки

Можливе моделювання окремих комбінацій описаних вище конструктивних особливостей оболонки за товщиною. Наприклад, моделювання відштампованої видавки можна розглядати як комбінацію одностороннього ребра та одностороннього каналу або як ділянку оболонки складної форми за рахунок вигину її серединної поверхні.

При отримані співвідношень для універсального скінченного елемента (матриць реакцій, жорсткості, геометричної жорсткості та еквівалентних температурних навантажень), регулюючи значення його додаткових змінних параметрів, ми подаємо в ці матриці вихідні дані для СЕО або для СЕМ. При цьому необхідно враховувати, що при отримуванні матриць для СЕО та СЕМ у якості поверхонь відліку прийняті їх серединні поверхні, які можуть між собою не співпадати. Тому, при чисельній побудові для СЕМО системи розв’язувальних рівнянь завжди виконується корегування матриць СЕМ відносно прийнятої єдиної поверхні відліку – серединної поверхні обшивки оболонки.

Враховуючи, що функції форми для координат та переміщень ізопараметричного просторового СЕ однакові, маємо подібні до (2)-(4) співвідношення, які пов’язують між собою вузлові переміщення СЕО та СЕМ

$$\upsilon^{i'}_{s_2 s_3} = \frac{u^{i'}_{s_1=+1 s_2 s_3} + u^{i'}_{s_1=-1 s_2 s_3}}{2}, \qquad \nu^{i'}_{s_2 s_3} = u^{i'}_{s_1=+1 s_2 s_3} - u^{i'}_{s_1=-1 s_2 s_3},$$

$$\tilde{\upsilon}^{i'}_{s_2 s_3} = \upsilon^{i'}_{s_2 s_3} + a_{s_2 s_3} \nu^{i'}_{s_2 s_3}, \qquad \tilde{\nu}^{i'}_{s_2 s_3} = b_{s_2 s_3} \nu^{i'}_{s_2 s_3},$$

$$u^{i'}_{s_1 s_2 s_3} = \upsilon^{i'}_{s_2 s_3} + \frac{s_1}{2} \nu^{i'}_{s_2 s_3}, \qquad \tilde{u}^{i'}_{s_1 s_2 s_3} = \tilde{\upsilon}^{i'}_{s_2 s_3} + \frac{s_1}{2} \tilde{\nu}^{i'}_{s_2 s_3},$$

де $\upsilon^{i'}_{s_2 s_3}$, $\nu^{i'}_{s_2 s_3}$ та $\tilde{\upsilon}^{i'}_{s_2 s_3}$, $\tilde{\nu}^{i'}_{s_2 s_3}$ – вузлові переміщення, що віднесені відповідно до серединних поверхонь СЕО та СЕМ; $u^{i'}_{s_1 s_2 s_3}$, $\tilde{u}^{i'}_{s_1 s_2 s_3}$ – вузлові переміщення, що віднесені відповідно до обмежуючих поверхонь СЕО та СЕМ.

Отримані для модифікованого СЕ співвідношення мають універсальний характер: в розв'язувальних рівняннях враховані всі нелінійні складові та всі компоненти тензорів деформацій і напружень як для обшивки, так і для ребер та накладок будь-якої жорсткості. Така постановка задачі в дослідженнях нелінійної стійкості тонких неоднорідних оболонок, має наступні переваги:

1) суттєво уточнюється розрахункова модель;

2) можливе застосування єдиної розрахункової моделі як до жорстких, так і до гнучких ребер і накладок, а також до ділянок з виїмками та каналами;

3) розширюються межі використання скінченного елемента;

4) збільшується коло класів оболонок, які можна досліджувати.

Таким чином, виконана модифікація просторового скінченного елемента підвищила його універсальність та дозволила суттєво розширити межі застосування розробленого методу дослідження нелінійного деформування та втрати стійкості тонких неоднорідних оболонок.


1. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислоокий, В.В.Киричевский и др.* - К.: Вища шк. Головное изд-во, 1982. - 480 с.
2. *Николаев А.П., Киселев А.П.* Расчет оболочек с использованием трехмерных конечных элементов в виде треугольной призмы и восьмиугольника // Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: Труды Международной научной конференции. - М.: Изд-во РУДН, 2001. С. 319-323.
3. *Белостоцкий А.М.* Конечноэлементные модели пространственных пластин, оболочек и массивов: построение, программная реализация и исследования. Сб. науч. трудов Гидропроекта. 1985, вып. 100, с. 24-35.
4. *Лиао К.Л., Редди Дж. Н.* Анализ геометрических нелинейных задач с помощью конечного элемента подкрепленной композитной оболочки, подчиняющегося законам механики сплошной среды. Аэрокосмическая техника, 1989, N 8, с. 117-124.
5. *Соловей Н.А.* Исследование напряженно-деформированного состояния и устойчивости пластин и оболочек ступенчато-переменной жесткости с применением модифицированного конечного элемента // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1983. - Вып. 43. - С. 30-35.
6. *Соловей Н.А.* Решение геометрически нелинейных задач устойчивости многослойных ребристых оболочек на основе моментной схемы конечных элементов // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1992. - Вып. 60. - С. 110-117.
7. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатошарових поребрених оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КДТУБА, 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
8. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
9. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности, 1999. - N 5. - С. 96-102.
10. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гладких ребристих та послаблених вирізами гнучких пологих панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2000 р. - Вип.67. - С. 92-103.
11. *Соловей М.О.* Моделювання термопружних властивостей багатошарових матеріалів у задачах стійкості неоднорідних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2003 р. - Вип. 73. - С. 17-30.

12. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість гранованих пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2004 р. - Вип. 75. - С. 91-97.
13. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Вплив режимів термосилового навантаження на стійкість і позакритичну поведінку оболонок сталої та ступінчато-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук. -тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 77. - С. 30-42.
14. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М.: Мир, 1976. - 464 с.
15. *Новацкий В*. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.
16. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. - 416 с.
17. *Амбарцумян С.А*. Общая теория анизотропных оболочек.- М.: Наука, 1974. - 446 с.
18. *Зенкевич О*. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир. - 1975. 287 - 541 с.
19. Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 3. - М.:Изд. АН СССР,1956. - 336 с.

*Надійшла до редколегії 15.12.2006 р.*