УДК 534-21

Шульга Н.Д., канд. техн. наук

ЧАСТОТИ ПРОПУСКАННЯ І ГРАНИЧНІ ФОРМИ ОБ'ЄМНИХ ХВИЛЬ ПОПЕРЕК СТРУКТУРИ ДВОКОМПОНЕНТНИХ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТІВ З МІЖФАЗНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ

Перебіг хвильових процесів в композитних матеріалах визначається механічними властивостями компонент, геометричною структурою матеріалу та якістю міжфазних поверхонь [3]. Адекватний теоретичний опис останнього фактору пов'язаний з суттєвими складностями. Для моделювання тонкого шару з міжфазними недосконалостями та дефектами, який розділяє дві фази (компоненти) шаруватого композиту з різними фізико-механічними властивостями, вводиться [1, 2, 6] гіпотетична міжфазна поверхня з певними властивостями. Кількісним виразником цих властивостей виступають міжфазні сталі, що входять в механічні умови спряження.

Розглянемо двокомпонентний регулярно-шаруватий композит з міжфазними недосконалостями та дефектами, механічні властивості ортотропних компонент якого позначимо через $c_{ij,1}$, ρ_1 для шарів товщиною h_1 і $c_{ij,2}$, ρ_2 для шарів товщиною h_2. Координатні вісі x_1, x_2, x_3 направимо вздовж головних напрямів ортотропії шарів. При поширенні хвиль впоперек структури шарів (вздовж x_3) переміщення, деформації і напруження не залежать від координат x_1 і x_2 і тривимірні рівняння малих коливань пружного тіла розпадаються на три незалежні системи

$$\rho(x_3)\frac{\partial^2 u_{6-m}}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{3,6-m}}{\partial x_3}, \quad \sigma_{3,6-m}=c_{mm}(x_3)\frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_3}, \quad m=3,4,5. \qquad (1)$$

Рівняння (1) справедливі поза площинами $x_3=x_{3,2n-2+q}$ ($q=1,2$, n – ціле число) розриву властивостей матеріалу, а на самих цих площинах повинні виконуватися [1, 2, 6] контактні умови

$$\begin{gathered}\sigma_{3,6-m}\left(x_{3,2n-2+q}+0,t\right)=\sigma_{3,6-m}\left(x_{3,2n-2+q}-0,t\right),\\ u_{6-m}\left(x_{3,2n-2+q}+0,t\right)=u_{6-m}\left(x_{3,2n-2+q}-0,t\right)+\eta_{3,6-m}\sigma_{3,6-m}\left(x_{3,2n-2+q}-0,t\right). \qquad (2)\end{gathered}$$

Розв'язок рівнянь (1) для кожного з шарів при гармонічних коливаннях запишемо так

$$u_{6-m} = h\,\mathrm{Re}\left[A_{2n-1}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,1}\left(x_3 - nh + h\right)}{\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}} + A_{2n-1}^{(2)} \cos k_{mm,1}\left(x_3 - nh + h\right)\right] e^{-i\omega t},$$

$$\left(n-1\right)h < x_3 < \left(n-1\right)h + h_1;$$

$$u_{6-m} = h\,\mathrm{Re}\left[A_{2n}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,2}\left(x_3 - nh + h_2\right)}{\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}} + A_{2n}^{(2)} \cos k_{mm,2}\left(x_3 - nh + h_2\right)\right] e^{-i\omega t},$$

$$\left(n-1\right)h + h_1 < x_3 < nh. \qquad (3)$$

В формулах (3) і далі використовуються позначення $\bar{\rho}_q \rho_{00} = \rho_q$, $\bar{c}_{mm,q} c_{00} = c_{mm,q}$, $\bar{k}_{mm,q} = h_{00} k_{mm,q}$, $k_{mm,q} = \omega\sqrt{\rho_q / c_{mm,q}}$, $\bar{\eta}_{3,6-m} = \eta_{3,6-m}\dfrac{c_{00}}{h}$, причому величини $\bar{\rho}_q$, $\bar{c}_{mm,q}$, $\bar{k}_{mm,q}$, $\bar{\eta}_{3,6-m}$ як і сталі інтегрування $A_n^{(i)}$, безрозмірні; нормуючі параметри ρ_{00}, c_{00}, h мають розмірності відповідно густини ($кг \cdot м^{-3}$), модуля пружності (Па), довжини (м).

Контактні умови (3) на межах $x_3 = x_{3,2n-1} \equiv \left(n-1\right)h + h$ між $\left(2n-1\right)$-им і $2n$-им шарами і на межах $x_3 = x_{3,2n} \equiv nh$ між $2n$-им і $\left(2n+1\right)$-им шарами приводять до однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}_{2n+1} = \mathbf{M}_{mm}\left(h_2\right)\mathbf{A}_{2n}, \qquad \mathbf{A}_{2n} = \mathbf{M}_{mm}\left(h_1\right)\mathbf{A}_{2n-1}, \qquad (4)$$

в яких введені вектор-стовпці $\mathbf{A}_n = col\left[A_n^{(1)}, A_n^{(2)}\right]$ і матриця $\mathrm{M}_{mm}^{(ik)}\left(h_q\right)$:

$$\mathrm{M}_{nn}^{(ik)}\left(h_q\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{mm}^{(11)}\left(h_q\right) & \mathrm{M}_{mm}^{(12)}\left(h_q\right) \\ \mathrm{M}_{mm}^{(12)}\left(h_q\right) & \mathrm{M}_{mm}^{(22)}\left(h_q\right) \end{bmatrix},$$

де $\mathrm{M}_{mm}^{(11)}\left(h_q\right) = \cos k_{mm,q} h_q$, $\qquad \mathrm{M}_{mm}^{(12)}\left(h_q\right) = -\bar{c}_{mm,q}\bar{k}_{mm,q} \sin k_{mm,q} h_q$

$$\mathrm{M}_{mm}^{(21)}\left(h_q\right) = \frac{\sin k_{mm,q} h_q}{\bar{c}_{mm,q}\bar{k}_{mm,q}} + \bar{\eta}_{3,6-m} \cos k_{mm,q} h_q,$$

$$\mathrm{M}_{mm}^{(22)}\left(h_q\right) = \cos k_{mm,q} h_q - \bar{\eta}_{3,6-m}\bar{c}_{mm,q}\bar{k}_{mm,q} \sin k_{mm,q} h_q.$$

Якщо розв'язок нескінченної системи однорідних алгебраїчних рівнянь (4) представити [2, 4-6] у вигляді

$$\mathbf{A}_{2n} = \chi_{mm}^{n} \mathbf{M}_{mm}(h_1)\mathbf{X}_{mm}, \qquad \mathbf{A}_{2n-1} = \chi_{mm}^{n} \mathbf{X}_{mm}, \tag{5}$$

то для визначення скаляру χ_{mm} і вектора $\mathbf{X}_{mm}$ одержимо систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\left(\mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) - \chi_{mm}^{-1}\, \mathbf{I}_2\right)\mathbf{X}_{mm} = 0 . \tag{6}$$

Тут $\mathbf{I}_2$ – одинична матриця другого порядку, $\mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) = \mathbf{M}_{mm}(h_2)\mathbf{M}_{mm}(h_1)$ – передаточна матриця для двох шарів товщини h_1 і h_2.

З умови існування нетривіального розв'язку однорідної системи (6) одержимо характеристичне рівняння

$$\chi_{mm}^2 - 2b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right)\chi_{mm} + 1 = 0 , \tag{7}$$

оскільки безпосередніми перетвореннями знаходимо, що $\det \mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) = 1$, а коефіцієнт

$$\begin{aligned} b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right) = {} & \cos k_{mm,1} h_1 \cos k_{mm,2} h_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}}{\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}} + \frac{\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}}{\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}} - \right. \\ & \left. - \bar{\eta}_{3,6-m}^2 \bar{c}_{mm,1}\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,1}\bar{k}_{mm,2}\right)\sin k_{mm,1}h_1 \sin k_{mm,2}h_2 - \\ & - \bar{\eta}_{3,6-m}\left(\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}\sin k_{mm,1}h_1 \cos k_{mm,2}h_2 + \right. \\ & \left. + \bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}\sin k_{mm,2}h_2 \cos k_{mm,1}h_1\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Кожному з нерівних між собою характеристичних чисел $\chi_{mm,1}$, $\chi_{mm,2}$ відповідають лінійно незалежні між собою власні вектори $\mathbf{X}_{mm,1}$, $\mathbf{X}_{mm,2}$ і невідомі $\mathbf{A}_n$ в розв'язку (5) будуть суперпозицією

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2n} &= Q_1\chi_{mm,1}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1)\mathbf{X}_{mm,1} + Q_2\chi_{mm,2}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1)\mathbf{X}_{mm,2}, \\ \mathbf{A}_{2n-1} &= Q_1\chi_{mm,1}^n\, \mathbf{X}_{mm,1} + Q_2\chi_{mm,2}^n\, \mathbf{X}_{mm,2} . \end{aligned} \tag{9}$$

Невідомі сталі Q_1, Q_2 повинні бути визначені з граничних умов.

Для аналізу поширення об'ємних хвиль в характеристичному рівнянні (7) зробимо заміну $\chi_{mm} = \exp(\pm ihs_{mm})$ і запишемо його в тригонометричному вигляді

$$\cos hs_{mm} = b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right). \tag{10}$$

З представлення (9) випливає, що розв’язок (3) буде обмеженим при $n \to \pm\infty$ $(-\infty < x_3 < +\infty)$, якщо дисперсійне рівняння (10) матиме дійсні корені. Це матиме місце при умові

$$-1 < b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right) < +1, \tag{11}$$

яка і визначає зони пропускання хвиль поперек структури матеріалу.

Фізично обґрунтований однозначний розв’язок рівняння (10) при умові (11) визначається за правилом відбору мод [5]

$$hs_{mm} = (-1)^{N_{mm}^{-1}} \arccos b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right) + 2\pi\left[\frac{N_{mm}}{2}\right]. \tag{12}$$

Тут $\arccos b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right)$ – головне значення оберненої тригонометричної функції, $N_{mm} = 1,2,...$ – порядковий номер зони пропускання об’ємних хвиль (11), $\left[\frac{N_{mm}}{2}\right]$ – ціла частина числа.

На межах зон пропускання об’ємних хвиль (11) частота задовольняє одному з рівнянь

$$b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right) = +1, \qquad b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right) = -1. \tag{13}$$

В першому випадку $b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right) = +1$ мультиплікатор $\chi_{mm} = +1$, а в другому випадку $b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}\right) = -1$ мультиплікатор $\chi_{mm} = -1$. Тоді з формул (5) випливає, що в першому випадку між сталими інтегрування мають місце залежності

$$A_{2n-1}^{(i)} = A_1^{(i)}, \qquad A_{2n}^{(i)} = A_2^{(i)}, \tag{14}$$

тобто період розв’язку дорівнює періоду структури h, а в другому випадку між сталими інтегрування мають місце залежності

$$A_{2n-1}^{(i)} = (-1)^n A_1^{(i)}, \qquad A_{2n}^{(i)} = (-1)^n A_2^{(i)}, \tag{15}$$

тобто період розв’язку дорівнює двом періодам структури $2h$.

Повніший аналіз частотних рівнянь на межах зон пропускання хвиль (13) одержимо, виходячи з наступних симетричних і антисиметричних розв’язків відносно серединних площин шарів товщинною $h_1 = 2H_1$ і $h_2 = 2H_2$

$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}^{(1)}_{2n-1}\frac{\sin k_{mm,1}(x_3-nh+h-H_1)}{\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}}+\tilde{A}^{(2)}_{2n-1}\cos k_{mm,2}(x_3-nh+h-H_1),$$
$$nh-h<x_3<nh-h+h_1;$$
$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}^{(1)}_{2n}\frac{\sin k_{mm,2}(x_3-nh+H_2)}{\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}}+\tilde{A}^{(2)}_{2n}\cos k_{mm,2}(x_3-nh+H_2),$$
$$nh-h+h_1<x_3<nh. \qquad (16)$$

Користуючись умовами спряження (2) і залежностями (14), (15) між сталими інтегрування прийдемо до наступного.

На межах зон пропускання $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2},\bar{k}_{mm,1})=+1$ відбуваються симетричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (SS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}^{(2)}_1\cos k_{mm,1}(x_3-nh+h-H_1),\quad nh-h<x_3<nh-h+h_1;$$
$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}^{(2)}_2\cos k_{mm,2}(x_3-nh+H_2),\quad nh-h+h_1<x_3<nh \qquad (17)$$

і антисиметричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (AA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}^{(1)}_1\frac{\sin k_{mm,1}(x_3-nh+h-H_1)}{\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}},\quad nh-h<x_3<nh-h+h_1;$$
$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}^{(1)}_2\frac{\sin k_{mm,2}(x_3-nh+H_2)}{\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}},\quad nh-h+h_1<x_3<nh. \qquad (18)$$

З умов спряження (2) між шарами товщиною $h_1=2H_1$ та $h_2=2H_2$ одержуємо алгебраїчні рівняння

$$\tilde{A}^{(2)}_1\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}\sin\bar{k}_{mm,1}H_1+\tilde{A}^{(2)}_2\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}\sin\bar{k}_{mm,2}H_2=0,$$
$$\tilde{A}^{(2)}_1\left(\cos\bar{k}_{mm,1}H_1-\frac{1}{2}\bar{\eta}_{3,6-m}\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}\sin\bar{k}_{mm,1}H_1\right)-$$
$$-\tilde{A}^{(2)}_2\left(\cos\bar{k}_{mm,2}H_2-\frac{1}{2}\bar{\eta}_{3,6-m}\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}\sin\bar{k}_{mm,2}H_2\right)=0 \qquad (19)$$

для SS-коливань (17) і алгебраїчні рівняння

$$\tilde{A}^{(1)}_1\cos k_{mm,1}H_1-\tilde{A}^{(1)}_2\cos k_{mm,2}H_2=0$$

$$\tilde{A}_1^{(1)}\left(\frac{\sin\bar{k}_{mm,1}H_1}{\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}}+\frac{1}{2}\bar{\eta}_{3,6-m}\cos\bar{k}_{mm,1}H_1\right)+$$
$$+\tilde{A}_2^{(1)}\left(\frac{\sin\bar{k}_{mm,2}H_2}{\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}}+\frac{1}{2}\bar{\eta}_{3,6-m}\cos\bar{k}_{mm,2}H_2\right)=0 \tag{20}$$

для AA-коливань (18).

З умов існування ненульових розв’язків однорідних систем (19) і (20) випливають частотні рівняння і відношення між сталими інтегрування.

На межах зон пропускання $b_{mm}\left(\bar{k}_{mm,2},\bar{k}_{mm,1}\right)=-1$ відбуваються симетричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (SA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}_1^{(2)}\cos k_{mm,1}(x_3-nh+h-H_1),\qquad nh-h<x_3<nh-h+h_1;$$
$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}_2^{(1)}\frac{\sin k_{mm,2}(x_3-nh+H_2)}{\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}},\qquad nh-h+h_1<x_3<nh \tag{21}$$

і антисиметричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (AS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}_1^{(1)}\frac{\sin k_{mm,1}(x_3-nh+h-H_1)}{\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}},\qquad nh-h<x_3<nh-h+h_1;$$
$$u_{6-m}(x_3)=\tilde{A}_2^{(2)}\cos k_{mm,2}(x_3-nh+H_2),\qquad nh-h+h_1<x_3<nh. \tag{22}$$

З умов спряження (2) між шарами товщиною $h_1=2H_1$ та $h_2=2H_2$ одержуємо алгебраїчні рівняння

$$\tilde{A}_1^{(2)}\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}\sin\bar{k}_{mm,1}H_1+\tilde{A}_2^{(1)}\cos\bar{k}_{mm,2}H_2=0,$$
$$\tilde{A}_1^{(2)}\left(\cos\bar{k}_{mm,1}H_1-\frac{1}{2}\bar{\eta}_{3,6-m}\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}\sin\bar{k}_{mm,1}H_1\right)+$$
$$+\tilde{A}_2^{(1)}\left(\frac{\sin\bar{k}_{mm,2}H_2}{\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}}+\frac{1}{2}\bar{\eta}_{3,6-m}\cos\bar{k}_{mm,2}H_2\right)=0 \tag{23}$$

для SA-коливань і алгебраїчні рівняння

$$\tilde{A}_1^{(1)}\cos k_{mm,1}H_1-\tilde{A}_2^{(2)}\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}\sin\bar{k}_{mm,2}H_2=0$$

$$\tilde{A}_1^{(1)}\left(\frac{\sin \bar{k}_{mm,1}H_1}{\bar{c}_{mm,1}\bar{k}_{mm,1}}+\frac{1}{2}\bar{\eta}_{3,6-m}\cos\bar{k}_{mm,1}H_1\right)-$$

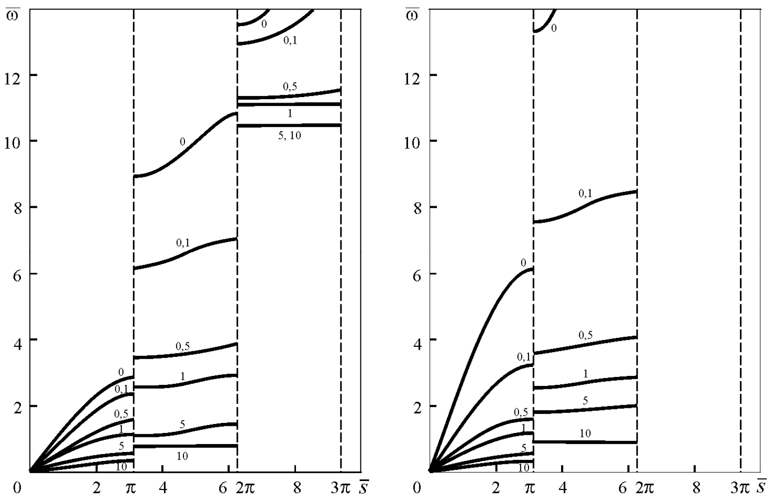
$$-\tilde{A}_2^{(2)}\left(\cos\bar{k}_{mm,2}H_2-\frac{1}{2}\bar{\eta}_{3,6-m}\bar{c}_{mm,2}\bar{k}_{mm,2}\sin\bar{k}_{mm,2}H_2\right)=0\,. \qquad (24)$$

для AS-коливань.

З умов існування ненульових розв'язків однорідних систем (23) і (24) одержимо частотні рівняння і відношення між сталими інтегрування.

Одержані результати дозволяють визначити граничні значення частот, що обмежують зони пропускання хвиль впоперек структури матеріалу, і побудувати форми хвиль, які відповідають цим частотам. При чисельному аналізі розглядався композит з механічними властивостями шарів $\bar{\rho}_1=1$, $\bar{c}_{33,1}=13/3$, $\bar{c}_{44,1}=\bar{c}_{55,1}=1$, $\bar{\rho}_2=2$, $\bar{c}_{33,2}=70$, $\bar{c}_{44,2}=\bar{c}_{55,2}=20$ при нормуючих параметрах $\rho_{00}=\rho_1$, $c_{00}=c_{44,1}$. Товщини шарів приймалися рівними $h_1=0{,}3h$ і $h_2=0{,}7h$.

На рис. 1 показані дисперсійні залежності для поперечних (рис. 1,а) і поздовжніх (рис. 1,б) хвиль, де по вісях відкладені величини $\bar{\omega}=\omega h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$, $\bar{s}=sh$. Значення міжфазних параметрів $\bar{\eta}_{33}=\bar{\eta}_{32}=\bar{\eta}_{31}=0{,}0$ (міжфазні недосконалості відсутні), 0,1, 0,5, 1,0, 5,0, 10,0 вказані біля кривих на рис.1.

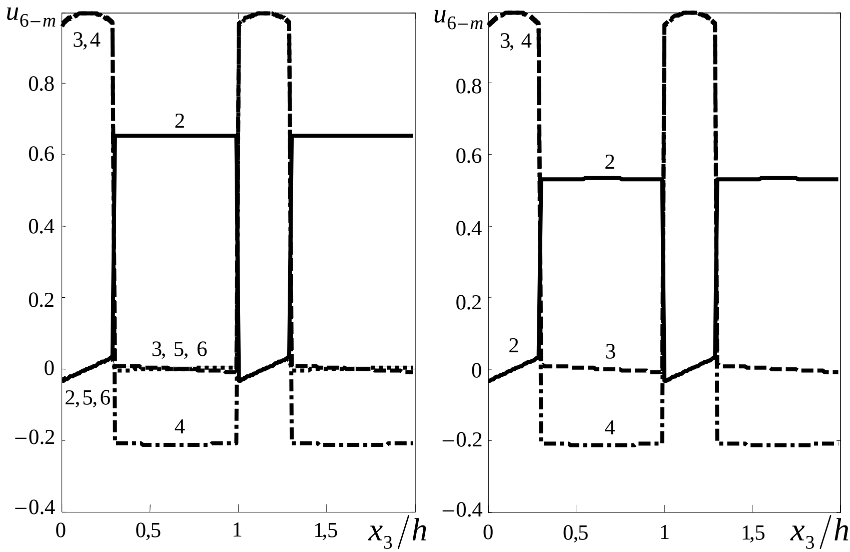


а *б*

Рис. 1

З наведених графіків випливає, що при збільшенні фазових параметрів зони пропускання хвиль звужуються і вироджуються в дискретний спектр власних частот товщинних коливань шарів товщини h_1 і h_2. Зони пропускання хвиль при великих значеннях міжфазних параметрів простіше визначати з частотних рівнянь для граничних форм коливань.

На рис. 2 наведені результати розрахунку форм поперечних (рис. 2, а) та поздовжніх (рис. 2, б) хвиль на граничних частотах зон пропускання на двох періодах структури. Фізико-механічні і геометричні параметри такі ж, як і для рис. 1, міжфазні сталі $\overline{\eta}_{33} = \overline{\eta}_{32} = \overline{\eta}_{31} = 0{,}5$. На рис. 2, а показані форми поперечних хвиль, причому крива 2 відповідає верхній границі першої зони пропускання ($\omega_2 = 1{,}4731$, AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\omega_3 = 3{,}42205$, SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\omega_4 = 3{,}81221$, SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ($\omega_5 = 11{,}524375$, AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання ($\omega_5 = 11{,}61749$, AS-коливання).



а *б*

Рис. 2

На рис. 2, б показані форми поздовжніх хвиль, причому крива 2 відповідає верхній границі першої зони пропускання ($\omega_2 = 1{,}6319$, AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\omega_3 = 3{,}5921$, SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\omega_4 = 3{,}97136$, SS-коливання). При побудові форм приймалося, що максимальна амплітуда коливань в першій зоні пропускання рівна одиниці. Зауважимо, що на нижній границі першої зони пропускання частота $\overline{\omega} = 0$, що відповідає поступальному руху жорсткого тіла, зміщення прийнято рівним нулеві і на рис. 2 не показані.

Різка зміна характеру форм на міжфазних прошарках (розриви першого роду на міжфазних площинах в прийнятій феноменологічній моделі) залежить від величини міжфазного параметру $\overline{\eta}_{3,6-m}$ і зникає при $\overline{\eta}_{33} = \overline{\eta}_{32} = \overline{\eta}_{31} = 0{,}0$ (міжфазні недосконалості відсутні). Неперервні ділянки форм мають пологий характер в зв'язку з великим періодом відповідних тригонометричних функцій.

1. *Баженов В.А., Шульга Н.Д.* Скорости распространения длинных волн в слоистых композитах с тонкими прослойками // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 55. – С. 6-10.
2. *Баженов В.А., Шульга Н.Д.* Распространение волн поперек структуры слоистого материала с межфазными прослойками // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1990. – Вып. 56. – С. 3-7.
3. *Композиционные материалы.* В 8-и т. Т.1. поверхности раздела в металлических композитах. – Москва: Мир, 1978. – 438 с. Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – Москва: Мир, 1978. – 294 с.
4. *Механика композитов.* В 12 т. Т.2. Динамика и устойчивость материалов. – Киев: Наукова думка, 1993. – 431 с. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: ПТОО «А.С.К.», 1997. – 394 с.
5. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наукова думка, 1981. – 200 с.
6. *Шульга М.О., Шульга Н.Д.* Дисперсія хвиль поперек структури шаруватих композитів з міжфазними недосконалостями //Деп. в ДНТБ України 13.02.1995 р. № 302 –Ук.95 (Донецький ун-т. – Донецьк, 1994). – 34 с.

Надійшло до редакції 12.12.2006 р.