

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук,
В.П. Носенко,
І.В. Горбунович

ПРЕЦЕСІЙНІ РЕЗОНАНСИ ПРУЖНОГО ДИСКУ З ЛОПАТЯМИ ПРИ СКЛАДНОМУ ОБЕРТАННІ

Побудовані диференціальні рівняння, що описують пружні коливання системи, які обумовлені періодичними переносними, відносними і коріолісовими силами інерції. Запропоновано методику їх розв'язання. Досліджено прецесійні коливання швидко обертового пружного диска з вінцем лопаток, вісь обертання якого робить плоский поворот. Установлено, що збуджені складним обертанням коливання можуть мати резонансний характер.

Досліджені прецесійні коливання системи швидко обертового пружного диска з вінцем лопаток, вісь обертання якого робить плоский поворот. Побудовано диференціальні рівняння, що описують пружні коливання системи, які обумовлені періодичними переносними, відносними й коріолісовими силами інерції. Запропоновано методику їх розв'язання. Установлено, що збуджені складним обертанням коливання носять резонансний характер і що підрахований з урахуванням вібрацій момент сил пружності, що діє на вал ротора, істотно відрізняється від відповідного гіроскопічного моменту, прикладеного до еквівалентного жорсткого ротора. Виявлені явища мають місце в роторах авіаційних двигунів у моменти зміни орієнтації їх осі.

Відомо, що переважна більшість відмов авіаційних двигунів відбувається при зльотах, посадках і маневрах літаків, коли ротор двигуна перебуває в стані складного обертання й піддається додатковим пружним коливанням, що обумовлені гіроскопічною взаємодією різних видів руху. У той же час при аналізі динамічної поведінки пружних роторів основна увага проектувальників приділяється лише врахуванню впливу на їх міцність на перший погляд більше відчутних відцентрових сил інерції простого обертання, що відбувається з високою швидкістю, аеродинамічних сил і теплових впливів. Незважаючи на те, що ресурс двигуна визначається числом маневрів літака, вплив додаткових прецесійних коливань пружних елементів двигуна, що збуджені гіроскопічною взаємодією обертових рухів ротора у зв'язку з передбачуваною малістю викликаних ними напружень, не береться до уваги.

Наближено, без врахування коливань підраховується й діючий на ротор у цілому і його загальний гіроскопічний момент, що передається через його опори на всю конструкцію літака, і визначається добутком $M_g = I_z \omega \omega_0$ осевого моменту інерції I_z гіпотетичного жорсткого ротора на кутові швидкості обертального ω і поворотного ω_0 рухів [1].

Нехтування цими коливаннями не завжди виявляється виправданим, оскільки вони є змушеними, супроводжуються прецесійними ефектами, відбуваються із частотою обертання ротора й при певних значеннях механічних і геометричних параметрів, і швидкості обертання носять резонансний характер. Врахування пружної піддатливості ротора приводить до істотного уточнення гіроскопічного моменту M_g , який може виявитися на порядок більше й мати інший знак.

Характерна особливість задачі про пружні коливання гнучкого обертового ротора полягає в тому, що спектр частот і форм його власних коливань залежить від кутової швидкості його обертання й еволюціонує при зміні останньої. Тому методи спектрального аналізу виявляються мало придатними для дослідження зазначених явищ і для їх вивчення повинні застосовуватися прямі методи їх математичного моделювання. Деякі окремі питання дослідження динаміки пружного ротора при складному обертанні розглянуто в роботах [2-5].

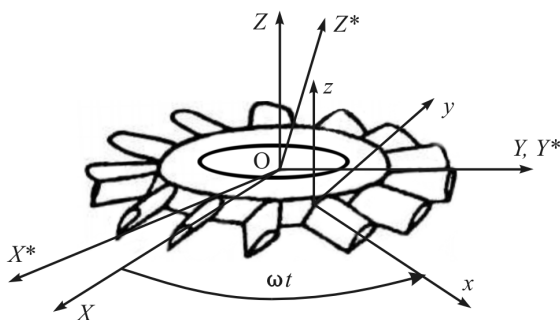


Рис. 1

Нехай ротор (рис. 1) складається із пружного диска товщиною h і N пружних закручених лопаток довжиною S . Вважається, що диск насаджений на жорсткий вал діаметром $2R_0$, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω , вісь якого робить плоский поворот з кутовою швидкістю ω_0 . Уведемо інерційну систему координат $OX^*Y^*Z^*$ і систему $OXYZ$, що обертається навколо осі OY^* , вісь OZ якої є віссю власного

обертання ротора, а вісь OY збігається з віссю OY^* . Для описання коливань лопаток зв'яжемо з кореневим перерізом однієї з них локальну систему координат $oxuz$ так, щоб вісь ox збігалася з поздовжньою віссю лопатки, а вісь oz була паралельна осі обертання системи. Досліджуємо збуджувані цими обертаннями прецесійні коливання елементів ротора й підрахуємо момент M_θ , що діє на вал зі сторони пружного диска.

При виведенні рівнянь коливань диска й лопатей будемо вважати, що $\omega \gg \omega_0$. Таке припущення дозволяє виділити в загальному русі ротора два стани. У першому стані система здійснює просте обертання з кутовою швидкістю ω і коливань не здійснює, диск напружений у своїй площині, а в лопатях виникає тільки поздовжня сила, викликана дією відцентрових сил інерції. У другому стані, викликаному поворотом системи, на елементи диска й лопатей діють додаткові періодичні сили інерції, що збуджують малі згинні коливання системи відносно вихідного напруженого стану. Умова $\omega \gg \omega_0$ дозволяє розглядати ці стани окремо. При цьому рівняння коливань системи в другому стані будуються за допомогою лінеаризації рівнянь руху відносно першого стану.

Напружений стан диска при простому обертанні визначається за допомогою рівнянь [6]:

$$d\sigma_r/dr = \sigma_\theta - \sigma_r/r - \gamma\omega^2 r, \quad d\sigma_\theta/dr = \sigma_\theta - \sigma_r/r - \nu\gamma\omega^2 r,$$

де r, θ - відповідно радіальна й колова координати; σ_r, σ_θ - радіальне й кільцеве напруження; γ - щільність матеріалу диска; ν - коефіцієнт Пуассона.

Граничні умови на краях $r = R_0$ і $r = R_1$ відповідно представимо у вигляді $\varepsilon_\theta = (\sigma_\theta - \nu\sigma_r)/E = 0$, $\sigma_r = F_w(0)/(h\Delta\theta R_1)$, де $F_w(0)$ - поздовжня сила в кореновому перерізі лопатки, $\Delta\theta$ - секторний кут лопатки. Друге рівняння цієї системи отримано в результаті усереднення по координаті θ сил взаємодії диска й лопаток.

У стані простого обертання лопатка напружена поздовжніми відцентровими силами інерції інтенсивністю $m\omega^2(R_1 + s)ds$, де m - погонна щільність, $R_1 + s$ - відстань від осі обертання до розглянутого елемента лопатки. Тому

$$F_w(0) = \gamma F \omega^2 (R_2^2 - R_1^2)/2,$$

де F - площа перерізу лопатки, $R_2 = R_1 + s$, s - довжина лопатки.

Викликані складним обертанням згинні коливання диска описуються рівнянням [6]

$$D\Delta^2\Delta^2 w - (1/r)\partial(N_r r \partial w / \partial r) - (1/r^2)\partial / \partial \theta (N_\theta r \partial w / \partial \theta) + \gamma h \partial^2 w / \partial t^2 = q_{\text{ин}},$$

де w - нормальне до поверхні пластини переміщення; N_r, N_θ - викликані простим обертанням радіальне й колове зусилля; D - циліндрична жорсткість; $q_{\text{ин}}$ - інтенсивність додаткового інерційного навантаження, обумовленого складним обертанням.

Прийmemo, що лопатки є відносно довгими і їх можна вважати гнучкими закрученими стрижнями. Тоді рівняння згинно-крутильних коливань лопаток можна представити у формі [7, 8]

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} / ds &= \boldsymbol{\omega}_\chi \times \mathbf{F} + \mathbf{f}_{\text{ин}} = 0, \quad d\mathbf{M} / ds = \boldsymbol{\omega}_\chi \times \mathbf{M} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{F} = 0, \quad M_u = A(p - p_0), \\ M_u &= B(q - q_0), \quad M_w = C(r - r_0), \quad d\boldsymbol{\tau} / ds = (p + q)\mathbf{n}, \\ d\mathbf{n} / ds &= -(p + q)\boldsymbol{\tau} + (r - d\chi / ds)\mathbf{b}, \quad d\mathbf{r} / ds = \boldsymbol{\tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\mathbf{F}(s), \mathbf{M}(s)$ - головні вектори внутрішніх сил і моментів; $\mathbf{f}_{\text{ин}}$ - вектор інтенсивності зовнішніх сил; M_u, M_v - згинні моменти; M_w - крутний момент; p, q, r - функції кривини й крутіння; $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}$ - орти тригранника Френе; \mathbf{r} - радіус-вектор точок осьової лінії; s - координатна лінія, що збігається з осьовою лінією лопатки. Рівняння (1) повинне задовольняти граничним умовам на краях $r = R_0, r = R_1$:

$$\begin{aligned} w(R_0) &= 0, \quad \partial w / \partial r|_{r=R_0} = 0, \quad M_r(R_1) = M_\chi(0) / (R_1 \Delta \theta), \\ Q_r(R_1) &= Q_\chi(0) / (R_1 \Delta \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

де M_r, Q_r - відповідно згинний момент і сила, що перерізує, на зовнішньому краї диска; M_χ, Q_χ - згинний момент і сила, що перерізує, у площині hoz перетину лопаті $s = 0$.

Щоб підрахувати сили інерції складного руху введемо наступні праві системи координат: $OX_1Y_1Z_1$ - пов'язана із жорстким валом обертова прямокутна система, вісь OZ_1 якої збігається з віссю власного обертання ротора, а вісь OX_1 напрямлена радіально уздовж виділеної для розрахунку

лопатки; пов'язана із пружним диском полярна система координат r, θ , у якій θ відкладається від осі OX_1 з кожною точкою стрижня зв'язана локальна система осей (u, v, w) , початок який лежить у центрі ваги площі перерізу лопатки, вісь w спрямована по дотичній до пружної лінії, осі u і v - по головних центральних осях інерції площі перерізу. Положення точки на пружній лінії буде визначатися координатою s , рівної відстані від початкового перерізу стрижня уздовж пружної лінії.

Для обчислення сил інерції, що діють на елемент ротора при складному обертанні, підрахуємо за допомогою теореми Коріоліса [1,8] вектор його абсолютного прискорення

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^e + \mathbf{a}^r + \mathbf{a}^c \quad (4)$$

де $\mathbf{a}^e, \mathbf{a}^r, \mathbf{a}^c$ - вектори переносного, відносного й коріолісового прискорень відповідно. Вектор \mathbf{a}^e обчислюється за формулою $\mathbf{a}^e = \mathbf{e} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$, де $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}$ - відповідно вектори абсолютних кутовий швидкості й кутове прискорення рухомої системи координат $OX_1Y_1Z_1$, r - радіус-вектор елемента ротора в деформованому стані.

Компоненти вектора відносного прискорення визначаються другими похідними пружних переміщень елементів ротора. Компонентами коріолісова прискорення, пов'язаного із пружними коливаннями лопатки, будемо нехтувати, оскільки у випадку нерозтяжності лопатки уздовж осьової лінії й малості динамічних переміщень елементів пружного диска у своїй площині їх можна не брати до уваги.

При виведенні остаточних виразів для компонентів вектора абсолютного прискорення (4) елементів ротора врахуємо, що $\boldsymbol{\omega} \gg \boldsymbol{\omega}_0$.

Нехтуємо доданками, що містять як множники ω_0^2 і добуток ω_0 на малі пружні переміщення диска й лопаток. У результаті в рухомій системі координат $OX_1Y_1Z_1$ одержимо [2, 3] $a_{x1} = -\omega^2 X_1$, $a_{y1} = \partial^2 Y_1 / \partial t^2 - \omega^2 Y_1$, $a_{z1} = \partial^2 Y_1 / \partial t^2 + F_z / (\gamma F)$.

На основі цих співвідношень одержуємо компоненти додаткових інерційних навантажень q_{un} , f_z представлених у рівняннях (1), (2):

$$q_{un} = 2\gamma\omega\omega_0 hr \sin(\omega t + \theta), \quad f_z = 2\gamma F (R_1 + s)\omega \times \omega_0 \sin(\omega t + \theta) \quad (5)$$

Вид діючого на систему навантаження дозволяє замінити змінні θ і t однією фазовою координатою $\varphi = \theta + \omega t$ і понизити розмірність задачі. Для цього виділимо для розрахунку одну лопатку при $\theta = 0$ і шукані змінні представимо у вигляді

$$\begin{aligned} w(r, \theta, t) &= W(r) \sin(\omega t + \theta), \quad \Delta F_u(s, t) = \Delta F_u^s(s) \sin \omega t, \\ \Delta F_v(s, t) &= \Delta F_v^s(s) \sin \omega t, \dots, \Delta z(s, t) = \Delta z^s(s) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Введемо новий вектор $x(\tau)$ розмірності 16 шуканих змінних $W(r)$, ΔF_u^s , $\Delta F_v^s(s)$, $\Delta F_w^s(s)$, $\Delta p^s(s)$, $\Delta q^s(s)$, $\Delta r^s(s)$, $\Delta \tau_x^s(s)$, $\Delta \tau_y^s(s)$, $\Delta \tau_z^s(s)$, $\Delta n_x^s(s)$, $\Delta n_y^s(s)$, $\Delta n_z^s(s)$, $\Delta x^s(s)$, $\Delta y^s(s)$, $\Delta z^s(s)$, де τ - введена незалежна змінна, об'єднуюча змінні r і s . З їх допомогою рівняння із частинними похідними (1), (2) приводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dx / d\tau = A(\tau)x + \omega_0 f(\tau), \quad (6)$$

де $A(\tau)$ - матриця коефіцієнтів, обумовлена рівняннями (1), (2); $f(\tau)$ - заданий вектор правих частин, обумовлений діючими на диск і лопатки силами інерції.

Розв'язок системи (6) при граничних умовах (3) і умовах вільного краю на кінцях лопаток визначається методом початкових параметрів [9]. При цьому відповідна матриця фундаментальних розв'язків будується методом Рунге-Кутта з використанням методу ортогоналізації [9].

За допомогою запропонованої методики виконане дослідження впливу геометричних і інерційних параметрів ротора на його коливання при складному обертанні. Для значень кутової швидкості власного обертання ω , що змінюються в межах від 0 до ω_f з інтервалом 1с^{-1} , і $\omega_0 = 1\text{с}^{-1}$ були обчислені амплітудні значення переміщень $w(r, \theta, t)$ диска, переміщень $\Delta y(s, t)$, $\Delta z(s, t)$ лопаток, а також функції їх напруженого стану. З їх допомогою були підраховані величини діючі на центральний вал результуючого пружного моменту M_θ , підраховуваного по формулі

$$M_\theta = \pi(R_0^2 Q_r^{\max} - R_0 M_r^{\max}). \quad (7)$$

Ці значення порівнювали з гіроскопічним моментом $M_g = I_z \omega_0 \omega$, що діє на еквівалентний абсолютно жорсткий ротор. Відзначимо, що при малих значеннях ω , коли прецесійні коливання відбуваються з низькою частотою ω і є квазістатичними, значення M_θ , M_g практично збігаються. Однак зі збільшенням ω динамічний характер коливань пружних елементів ротора стає більш помітним і проявлення сил інерції відносних коливань пружних елементів ротора приводить до того, що M_θ починає помітно перевищувати M_g .

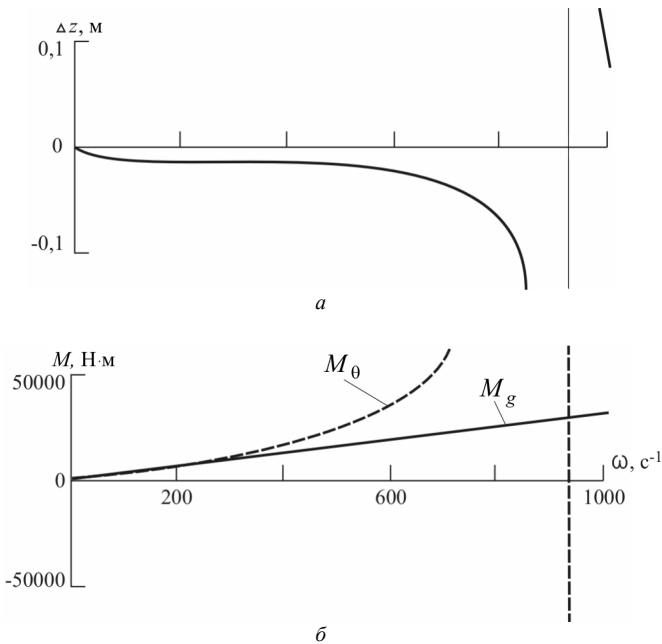


Рис. 2

Вид правих частин (5) рівнянь (1), (2) свідчить про те, що гіроскопічно збуджувані при складному обертанні коливання системи відбуваються із круговою частотою ω , рівної кутовій швидкості власного обертання ротора. Зі зміною ω змінюється також і системи, що впливають на власні частоти, відцентрові сили інерції. У зв'язку із цим при варіюванні ω може виникнути ситуація, коли вона стає рівній нижчій частоті власних коливань системи й виникає резонанс. Виконані розрахунки показали, що при деяких значеннях визначальних параметрів

в області вибраного діапазону зміни кутової швидкості $0 < \omega < \omega_f$ резонансні режими коливань не реалізуються, в інших випадках резонансні коливання мають місце. Тут ω_f - граничне значення ω , при якому досягається збіжність обчислень. Аналіз показує, що зміна кутів α й ψ мало впливає на резонансні значення ω , хоча зміна кута установки приводить до деякого зниження резонансних частот, а закручення лопаток - до їх деякого підвищення.

На рис. 2, а показаний графік зміни амплітуди коливань кінця лопатки залежно від ω для ротора з параметрами $\alpha = 0$, $\psi = 0$. Можна помітити, що при $\omega = 100 \text{ c}^{-1}$ досягається локальний максимум модуля цієї функції. Потім обумовлені збільшенням ω відцентрові сили інерції приводять до збільшення "жорсткості" конструкції ротора й $\Delta Z(\omega)$ падає. Незабаром проявляється вплив резонансного ефекту й $\Delta Z(\omega)$ різко зростає. На рис. 2,б наведені графіки зміни гіроскопічного моменту сил інерції M_g (суцільна лінія) і пружного моменту M_θ (пунктирна лінія), прикладених до вала ротора. Діючий на відповідний жорсткий ротор момент M_g залежить від ω лінійно, у той час як момент сил пружних коливань M_θ (7) зі збільшенням ω зростає і при резонансному ω прямує до нескінченності. В області щодо малих значень ω ($0 < \omega < 300 \text{ c}^{-1}$), коли сили інерції пружних коливань малі, ці моменти практично збігаються.

Робота виконана в рамках проекту 0109U002146 при фінансовій підтримці Міністерства освіти і науки України.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Наука, 1962. 824 с.
2. *Гуляев В.И., Лизунов П.П.* Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. Киев: Вища школа, 1989. 199 с.
3. *Гуляев В.И., Мирчевский А.В.* Колебания лопастей роторов при сложном вращении // *Машиноведение*. 1989. № 5. С. 81-88.
4. *Barlow J.* Inertia loading in finite element analysis of structures subject to compound motion // *Intern. J. for Numeric. Meth. in Engineering*. 1976. V. 10. P. 197-209.
5. *Sacata M., Kimura K., Park S.K., Ohnabe H.* Vibration of bladed flexible rotor due to gyroscopic moment // *J. Sound and Vibration*. 1989. V. 131. № 3. P. 417-430.
6. *Коваленко А.Д.* Пластины и оболочки в роторах турбомашин. Киев: Изд-во АН УССР, 1955. 304с.
7. *Светлицкий В.А.* Механика стержней. Ч. 1,2. М.: Высш. шк., 1987.

8. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л.* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. Киев: Наук. думка, 1992. 344 с.
9. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 487 с.

Отримано 28.05.09

Построены дифференциальные уравнения, описывающие упругие колебания системы, которые обусловлены периодическими переносными, относительными и кориолисовыми силами инерции. Предложена методика их решения. Исследованы прецессионные колебания быстро вращающегося упругого диска с венцом лопаток, ось вращения которого делает плоский поворот. Установлено, что возбужденные сложным вращением колебания могут иметь резонансный характер.

The differential equations describing elastic vibrations of the structural system are constructed with allowance made for relative, Coriolic and periodic bulk inertia forces. The techniques for their solution are proposed. Precession vibrations of a bladed elastic rotating disc whose axis performs plane turning is analyzed. It is established that the vibrations excited by the compound rotation can acquire resonant character.