УДК 539.3

Костіна О.В., к.т.н.
Аранчій Н.Є.

ЗБІЖНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СІТКОВИМИ МЕТОДАМИ ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ ТОРОЇДНОЇ ОБОЛОНКИ

Першим важливим кроком у розв'язанні задачі про випучування тора є роботи Махніга [9, 10], де досліджена стійкість тороїдної оболонки під дією постійного зовнішнього тиску. У статті [9] було показано, що осесиметричні форми втрати стійкості приводять до меншої величини критичного тиску, ніж несиметричні форми. І в [10] розглядалися тільки осесиметричні форми. Розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описують несиметричне випучування, було виконано з використанням методу збуджень. Койтер в [11] піддав критиці цю статтю, через те що при певному співвідношенні геометричних параметрів оболонки не-осесиметричне випучування може привести до зниження критичного тиску і застосований Махнігом вид розкладання є неприйнятним для тороїдної оболонки з малим відношенням *b/a* (рис. 1).

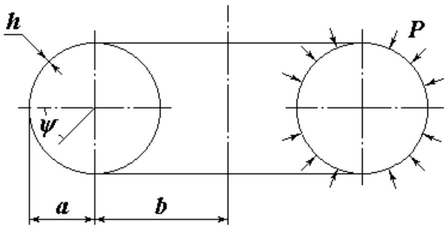

Рис. 1 Розрахункова схема тороїдної оболонки

Подібні задачі в різних постановках розглядалися в ряді робіт. В статті [12] був проведений асимптотичний розрахунок осесиметричного випучування тороїдної оболонки, що знаходиться під дією постійного тиску та осьового навантаження, прикладеного вздовж екваторів. Тут було застосоване припущення, що втрата стійкості виникає при величині зовнішнього тиску, при якій осьова жорсткість тора зменшується до нуля. Величини критичних значень, що містить робота [12], значно нижчі, ніж отримані в [9, 10]. Соубл Л. і Флюгге В. [7] розглянули стійкість тороїдної оболонки, що навантажена постійним гідростатичним тиском. Оскільки вважається, що до моменту випучування в оболонці діють тільки безмоментні напруження, тому рівняння стійкості тут виведені із загальних рівнянь стійкості оболонок обертання і розв'язані за допомогою розкладання в ряди Фур’є у кільцевому та меридіанальному напрямках компонент переміщень, що виникають при випучуванні.

З проблемою поганої збіжності зіткнулися автори статті [6] при розрахунку наведеної задачі з використанням методу скінченних різниць. Виявилось, що уточнення розв’язку пов’язане з необхідністю суттєвого згущення різницевої сітки і навіть при розбитті відрізка $0 \le x^1 \le 2\pi$ на 330 різницевих ділянок немає збіжності. У зв’язку з цим довелося перейти від формул скінченнорізницевої апроксимації порядку $O[(\delta x)^2]$ до співвідношень із похибкою $O[(\delta x)^4]$. Після уточнення різницевих аналогів диференціальних виразів була забезпечена збіжність обчислень при розбитті меридіана $0 \le x^1 \le 2\pi$ на 200 різницевих ділянок. При перевірці збіжності кількість розбиттів було доведено до 400, кількість ступенів свободи у цьому випадку склала 800.

Дана робота є продовженням дослідження стійкості тороїдної оболонки, що знаходиться під дією постійного зовнішнього тиску, з використанням сіткових методів. Розв’язання задачі виконано за допомогою МСЕ із застосуванням плоских скінченних елементів та за методом криволінійних сіток (МКС). Розглядається оболонка з наступними геометричними параметрами (рис. 1): $a / h = 100$ (Р = 2 10^5 Н/м^2), $a / h = 500$ (Р = 4 10^4 Н/м^2) та $b / a = 2$. Усі чисельні розрахунки виконані при значеннях Е = 2 · 10^{11} Н/м^2 і $\nu = 0{,}3$. Збіжність перевіряється шляхом визначення критичних навантажень при фіксованих значеннях параметрів оболонки та при послідовному згущенні сітки. Чисельні результати МСЕ і МКС наведені в табл. 1, де порівнюються з даними, що містить стаття Соубла Л. і Флюгге В. [7]. Результати цієї статті прийняті за точні, оскільки навіть у випадку наближення до сфери ($b/a \rightarrow 0$) критичне значення зовнішнього тиску наближається до класичного результату - p=1,21 Eh^2/a^2 . На рис. 2 наведені залежності відносних помилок обчислень МКЕ від кількості поділок сітки вздовж меридіанального кола для оболонок різної товщини, на рис. 3 показані аналогічні залежності для МКС.

Проведені дослідження виявили особливість застосування сіткових методів до розв’язання даної задачі, що полягає у немонотонній залежності похибки від кількості розбиттів (рис. 2, 3). Аналіз залежностей відносної помилки обчислень при поступовому згущенні сітки дозволив зробити наступний висновок. Розв’язання наведеної осесиметричної задачі є таким, що демонструє недоліки сіткових методів, оскільки точність результатів залежить від того, яким чином виконана дискретизація. Осциляційний характер похибки пояснюється тим, що серед множини скінченноелементних сіток існує два класи: до першого належать сітки, в яких у полюсі меридіана знаходиться скінченний елемент, а до другого – сітки, де у полюс потрапляє вузол скінченного елемента.

Таблиця 1

Кільк. поділ. вздовж мерид. кола	МСЕ на основі плоских скінченних елементів				МКС з урахуванням похибки жорстких зміщень			
	a / h = 100		a / h = 500		a / h = 100		a / h = 500	
	Влас. знач. λ	Відн. помил. η,%	Влас. знач. λ	Відн. помил. η,%	Влас. знач. λ	Відн. помил. η,%	Влас. знач. λ	Відн. помил. η,%
6	0,4310	-83,9	0,0258	-91,4	0,221	-91,75	0,0088	-97,06
7	28,617	967,8	26,229	9309,8	59,179	2108,2	58,953	19551,0
8	35,541	1226,2	35,101	11600,5	74,695	2687,1	74,430	24710,0
9	8,5010	217,2	7,5198	2406,6	17,418	549,9	16,979	5559,7
10	1,0844	-59,5	0,0455	-84,8	0,5157	-80,76	0,0208	-93,07
11	5,2402	95,5	4,2824	1327,5	9,892	269,1	9,396	3032,0
12	1,5193	-43,3	0,0649	-78,4	16,36	510,4	15,89	5196,7
13	3,5598	32,8	1,8880	529,3	4,962	85,15	4,123	1274,3
14	1,9403	-27,6	0,0831	-72,3	0,970	-63,8	0,0384	-87,2
15	2,9281	9,3	1,2813	327,1	3,629	35,41	2,723	807,7
16	3,6814	37,4	2,2119	637,3	6,195	131,2	5,362	1687,3
17	3,0115	12,4	0,7495	149,8	2,841	6,0	1,493	397,7
18	2,6186	-2,3	0,1336	-55,5	1,593	-40,6	0,0623	-79,2
19	2,7605	3,0	0,5832	94,4	2,486	-7,2	1,094	264,7
20	2,8903	7,8	0,9831	227,7	3,456	29,0	2,271	657,0
21	2,8397	6,0	0,4414	47,1	2,554	-4,7	0,710	136,7
22	2,7763	3,6	0,1921	-36,0	2,108	-21,3	0,092	-69,3
23	2,7763	3,6	0,3841	28,0	2,446	-8,7	2,446	89,9
24	3,8820	44,9	0,2225	-25,8	2,723	1,6	1,134	278,0
25	2,7545	2,8	0,3607	20,2	2,565	-4,3	0,432	44,0
26	2,7493	2,6	0,2514	-16,2	2,445	-8,8	0,127	-57,7
27	2,7272	1,8	0,3230	7,7	2,534	-5,4	0,374	24,7
28	2,7227	1,6	0,4015	33,8	2,577	-3,8	0,678	126,0
29	2,7216	1,6	0,3405	13,5	2,567	-4,2	0,329	9,7
30	2,7274	1,8	0,2966	-1,1	2,545	-5,0	0,167	-44,3
31	2,7081	1,0	0,3192	6,4	2,552	-4,8	0,300	0,0
32	2,6925	0,5	0,3430	14,3	2,577	-3,8	0,465	55,0
33	2,6900	0,4	0,3288	9,6	2,576	-3,9	0,296	-1,3
34	2,6915	0,5	0,2962	-1,3	2,570	-4,1	0,208	-30,7
35	2,6748	0,2	0,3177	5,9	2,575	-3,9	0,280	-6,7
Анал. розв. [7]	2,68		0,3		2,68		0,3	

Якщо кількість поділок вздовж меридіана є числом, що ділиться на чотири (рис. 2, 3), у полюсі маємо вузол скінченного елемента. Отже значно збільшується жорсткість на згин, і, в наслідок цього, величина критичного зусилля перевищує точне значення. Коли кількість поділок ділиться на два і не ділиться на чотири - у полюсі скінченний елемент, що приводить до зниження величини критичного зусилля порівняно з точним значенням. Цей факт значною мірою впливає на величину критичної сили, оскільки саме у полюсі меридіана при втраті стійкості оболонки за осесиметричною формою виникають згинні деформації. Цим обумовлена збіжність від двох протилежних за знаком похибок.

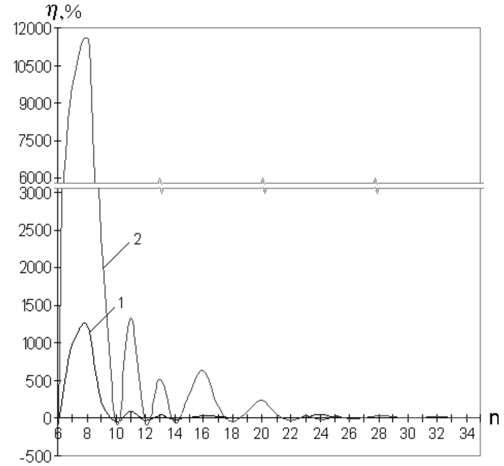

Рис. 2 Залежність відносної помилки обчислень МКЕ від кількості розбиттів:
1 – при $a / h = 100$ (Р = $2 \cdot 10^5$ Н/м^2),
2 – при $a / h = 500$ (Р = $4 \cdot 10^4$ Н/м^2).

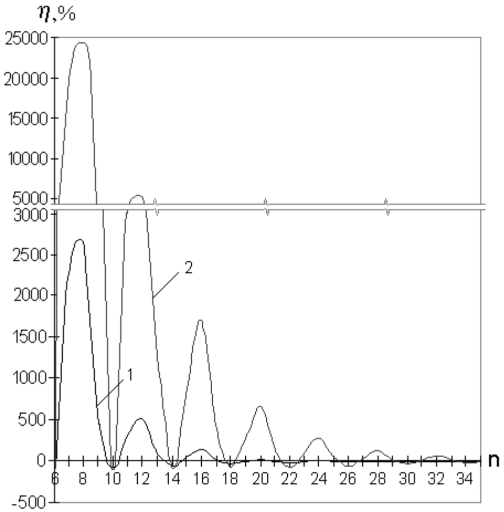

Рис. 3 Залежність відносної помилки обчислень МКС від кількості розбиттів:
1 – при a / h = 100 (Р = 2 · 10 5 Н/м2),
2 – при a / h = 500 (Р = 4 · 10 4 Н/м2).

Робота, що була проведена, виявила потребу у застосуванні до розрахунку даної задачі схеми методу скінченних елементів, що базується на новому підході до апроксимації розв'язувальних функцій, а саме на векторному поданні функції переміщень криволінійного скінченного елемента довільної форми, який точніше враховує геометрію оболонки. Методику створення нової скінченноелементної моделі, що виключає помилку жорстких зміщень завдяки застосуванню векторної апроксимації, викладено в публікаціях [1-5, 8]. Використання згаданої схеми МСЕ буде наступним кроком наведених досліджень.

1. *Гоцуляк Е.А.* О сеточной дискретизации векторных соотношений теории оболочек в криволинейной системе координат Прикладная механика: Междунар. научн. журнал. – 2001. – Т.37. - №6. – С.89-94.
2. *Гоцуляк Е.А., Костина Е.В.* Исследование сходимости метода конечных элементов в векторной аппроксимации // Сопротивление материалов и теория сооружений. К.: КГТУСА, 1997. – Вып. 63. – С. 38-47.
3. *Гоцуляк Є.О., Костіна О.В.* Про особливості застосування методу скінченних елементів до розрахунку оболонок загального типу // Доповіді НАН України, 1998.–№11.–С.72-75.
4. *Аранчій Н.Є., Костіна О.В.* Реалізація методу скінченних елементів з урахуванням векторної апроксимації функції форми // Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2000. – Вип. 68. – С. 3-15.
5. *Костіна О.В., Аранчій Н.Є.* Аналітичний спосіб тестування матриць жорсткості методу скінченних елементів // Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2001. – Вип. 69. – С. 80-85.
6. *В.В.Гайдайчук, Е.А.Гоцуляк, В.И.Гуляев* Ветвление решений нелинейных уравнений тороидальных оболочек при действии внешнего давления // Прикл. мех. 1978. – Т.XIV – №9. – С.38 – 45.
7. *Соубл Л., Флюгге В.* Устойчивость тороидальной оболочки, нагруженной постоянным внешним давлением // Ракетная техника и космонавтика – 1967. – № 3. – С. 51 – 58.
8. *Gotsulyak E.A., Kostina E.V.* Vector relations finite element digitization of the theory of thin shells of arbitrary form. // Proceedings of International Congress on Spatial Structures ICSS-98. – Moscow (Russia), 1998. – Vol. I. – P.252-259.
9. *Machnig O.* Über Stabilitats probleme von torusformigen Schalen // Wiss. Z. Hochseh. Verkehrswesen Dresden 4, – 1956. – P.179 – 204.
10. *Machnig O.* Über die Stabilitat von torusformigen Schalen // Techn. Mitt. Krupp 21, – 1963. – P.105 – 112.
11. *Koiter W.T.* APM Rev. 5670 (On the stability of torus-shaped shells by O.Machnig) // Appl. Mech. Rev. – 1964. – 17. – P. 786.
12. *Jordan P.F.* Vibration and buckling of pressurized torus shells // AIAA. – 1966. Paper 66 – 445.

Матеріал надійшов до редакції 28.06.04.