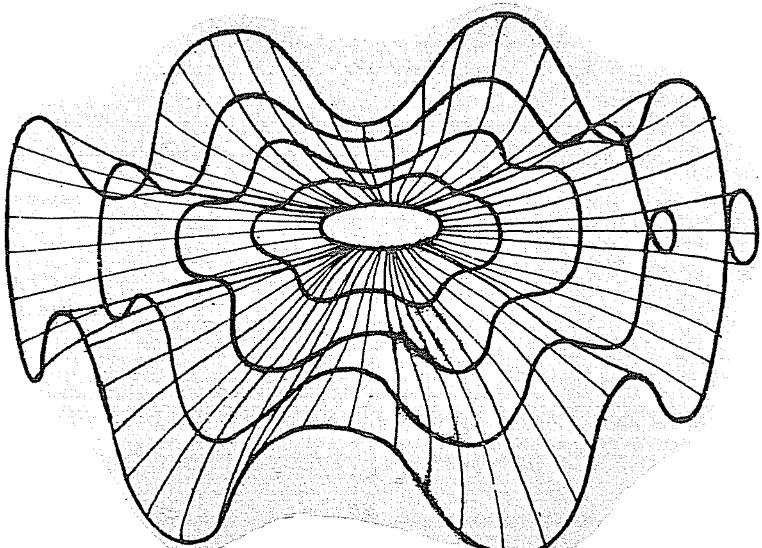
ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

2001 **ВИПУСК** 68



Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідомчий науково-технічний збірник. Випуск 68. Відповідальний редактор В.Є.Михайленко. – К.: КНУБА. 2000. – 200 с.

В збірку включені дослідження кривих ліній та поверхонь, способів їх формоутворення, апроксимації, зображення та практичного застосування. Ряд статей присвячено питанням теорії зображень, геометричному моделюванню об'єктів, процесів та явищ, проблемам комп'ютерної графіки, геометричним питанням САПР, деяким питанням технічної естетики.

Розрахована на працівників науково-дослідних і проектних організацій, викладачів, аспірантів та докторантів.

В сборник включены исследования кривых линий и поверхностей, способов их формообразования, аппроксимации, изображения и практических приложений. Ряд статей посвящен вопросам теории изображений, геометрическому моделированию объектов, процессов и явлений, проблемам компьютерной графики, геометрическим вопросам САПР, некоторым вопросам технической эстетики.

Рассчитан на работников научно-исследовательских и проектных организаций, преподавателей, аспирантов и докторантов.

Адреса редакції: Повітрофлотський проспект, 31, КНУБА
03037, Київ, УКРАЇНА
Телефон редакції 241-55-47.

Рекомендовано до випуску Вченою Радою КНУБА, протокол N 17.
від 22 . 12 . 2000

ISSN 0131-579X

Л.С.Іванова, канд.техн.наук

УДК 515.2

УМОВИ КОНСТРУЮВАННЯ СКЛАДЕНИХ ДИСКРЕТНО ПОДАНИХ КРИВИХ (ДПК) НА МНОЖИНІ РІВНОВІДДАЛЕНИХ ЗНАЧЕНЬ АРГУМЕНТУ

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

Розглянуті крайові умови конструювання складених кривих з використанням дискретно поданих поліномів 2-го та 3-го порядку як базових функцій для інтерполяції груп точок на рівномірній сітці. Проведено параметричний аналіз умов з'єднання та визначаючих параметрів окремих кусків складеної кривої. Результати можуть бути застосовані для побудови параметричних складених кривих при будь-якій комбінації крайових умов.

В задачах кускової інтерполяції та апроксимації дискретної множини точок, що є значенням функції дійсних змінних $y = y(x)$, будується складена крива, в якій використовуються поліноми низького ступеню для інтерполяції (апроксимації) груп точок, що дозволяє виключити небажані осциляції. Але неперервна інтерполююча кусково-поліноміальна функція у загальному випадку може мати розриви похідних у точках з'єднання окремих кусків кривих. Для більшості застосувань це неприпустимо [1]. Тому для конструювання складених кривих додатковою є умова гладкості, яка забезпечується збігом похідних у точках стику кусків.

Розглянемо, як забезпечуються умови гладкості складеної кривої, коли алгебраїчні вирази поліномів замінюються дискретними аналогами [1] на множині рівновіддалених значень аргументу:

$$x_i = x_0 + \Delta x \cdot i, \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \Delta x = h > 0) \tag{1}$$

В роботі [2] доведено, що форма ДПК, якщо її інтерпретувати як гнучку нитку, навантажену дискретно розподіленими зусиллями, залежить від закону розподілення зусиль $\{P_i\}$.

Виявлена в [2] залежність

$$P_i = y''(x_i)h^2 \tag{2}$$

дозволяє зробити висновок, що умова гладкості другого ступеню може бути забезпечена на рахунок збігу P_i у точках стику кусків складеної ДПК. Прямо пропорційна залежність закону розподілу P_i від $y''(x_i)$ обумовлює також наявність точок перегину у вузлах, де P_i змінює знак на протилежний.

Логічна закономірність у формулах для обчислення тангенса кута нахилу дотичної до ДПК – аналогів поліномів різної степені [2], дозволяє записати формулу, наприклад для $n = 5$:

$$\operatorname{tg}^F \alpha_i = \frac{\Delta y_i}{h} - \frac{P_i}{2h} - \frac{\Delta P_i}{6h} + \frac{Q_i}{24h} + \frac{14}{6}\frac{\Delta Q_i}{120h}. \tag{3}$$

а потім за умови:
для $n = 4$, $\Delta Q_i = 0$;
для $n = 3$, $\Delta Q_i = 0$, $Q = 0$;
для $n = 2$, $\Delta Q_i = 0$, $Q = 0$, $\Delta P_i = 0$,
отримати з (3) формули для обчислення $\mathrm{tg}\alpha_i$ для поліномів меншого степеню. В зв'язку з тим, що коефіцієнт у знаменниках доданків виразу (3) зростає у факторіальній залежності від степеню поліному $n!$, доданками, пов'язаними з надмножинами вище Q можна знехтувати, оскільки їх вплив на значення $\mathrm{tg}\alpha_i$ відбивається з точністю $\varepsilon < 10^3$.

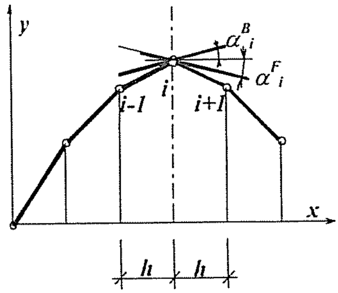


Рис.1

У формулі (3) використовуються зростаючі різниці: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, ΔP_i, ΔQ_i, отже (3) дозволяє визначити значення тангенса кута нахилу дотичної в i-му вузлі "вперед" $\mathrm{tg}^F\alpha_i$, що відповідає крайовій умові "зліва". Вираз для тангенса кута нахилу дотичної в i-му вузлі "назад" $\mathrm{tg}^B\alpha_i$, що відповідає крайовій умові "справа", можна отримати з умови симетричного відображення відносно вертикальної осі, що проходить через i-й вузол (рис.1):

$$\mathrm{tg}^B\alpha_i = \frac{\nabla y_i}{h} + \frac{P_i}{2h} - \frac{\nabla P_i}{6h} - \frac{Q_i}{24h} + \frac{14}{6}\frac{\nabla Q_i}{120h}. \tag{4}$$

де $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$, ∇P_i, ∇Q_i спадні різниці.

В зв'язку з тим, що однією з переваг складених кривих є використання в якості базових функцій поліномів низького степеню, можна обмежитися аналізом умов гладкого стику ДПК, що є аналогами поліномів 2-го та 3-го степеню.

1. Складена крива з поліномів 2-го порядку $\Phi(x)$ та $\Psi(x)$ в i-му вузлі стику кусків

$$\Phi(x) = \Psi(x) \tag{5}$$

може задовольнити гладкості першого ступеню, тобто мати спільну дотичну (рис.2). Умова наявності спільної дотичної для двох функцій, поданих у дискретному вигляді забезпечується рівнянням:

$$\mathrm{tg}^B\alpha_i = \mathrm{tg}^F\alpha_i, \tag{6}$$

де $\mathrm{tg}^B\alpha_i$ залежить від параметрів $\Phi(x)$, $\mathrm{tg}^F\alpha_i$ від параметрів $\Psi(x)$.

Враховуючи (3) і (4), це рівняння можна записати так:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \frac{P^{\Phi}}{2h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{P^{\Phi}}{2h}. \tag{7}$$

При послідовному конструюванні складеної кривої "зліва направо" слід вважати, шо 3 параметри, які визначають $\Phi(x)$ – відомі. Тоді в лівій частині рівняння (7) всі три змінні – фіксовані. Умови (5), (6) зв'язують два параметри, які визначають $\Psi(x)$. Отже, можна отримати однопараметричну множину кривих, які задовольняють цим умовам. Для того, щоб вилучити одну криву $\Psi(x)$ з цієї множини, достатньо зв'язати один параметр, тобто зафіксувати P^{Ψ} або y_{i+1}. Тоді умова (7) доповнює систему різницевих рівнянь, що реалізують ДПК [1]. Зміна знака P на протилежний обумовлює виникнення точки перегину у вузлі стику (рис.3).

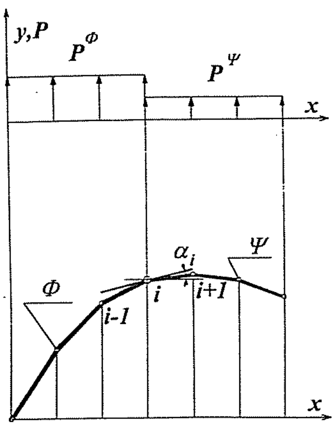


Рис.2

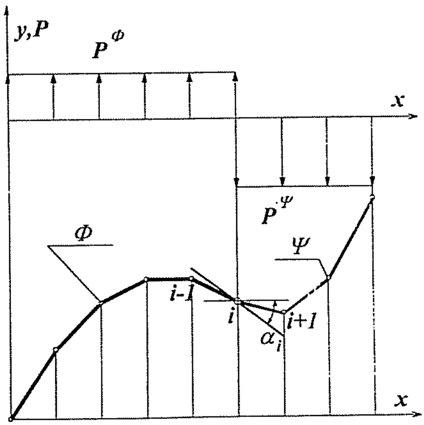


Рис.3

2. У вузлі стику двох поліномів $\Phi(x)$ та $\Psi(x)$ 3-го порядку (рис.4) можливо забезпечити гладкість 1-го та 2-го ступеню за умовами:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \frac{P^{\Phi}}{2h} - \frac{P_i^{\Phi} - P_{i-1}^{\Phi}}{6h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{P^{\Phi}}{2h} - \frac{P_i^{\Psi} - P_{i-1}^{\Psi}}{6h}. \tag{8}$$

$$P_i^{\Phi} = P_i^{\Psi}. \tag{9}$$

Умови (8), (9) зв'язують три параметри кривої $\Psi(x)$, якщо $\Phi(x)$ вже визначена. Один параметр залишається вільним. Це можуть бути змінні з правої частини рівняння (8) y_{i+1} або $P^{\Psi}_{i+1}(\Delta P^{\Psi})$. В загальному випадку у якості параметра може задаватися координата y_k або величина узагальненого зусилля P^{Ψ}_k для будь-якого k-го вузла. Якщо умову (9) замінити виразом

$$P^{\Phi}_i = -P^{\Psi}_i, \tag{10}$$

i-й вузол стику стане точкою перегину (рис.5).

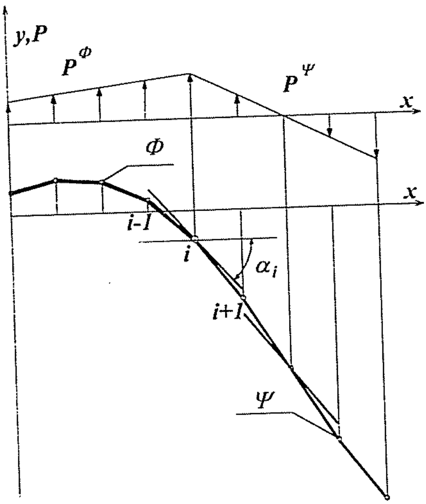


Рис.4

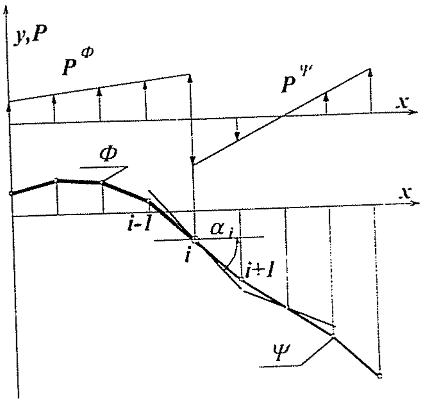


Рис.5

3. Кускова крива, складена з поліному 3-го $\Phi(x)$ та 2-го $\Psi(x)$ порядку (рис.6) у вузлі стику в загальному випадку може мати гладкість першого ступеню, що забезпечується умовою:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \frac{P^{\Phi}}{2h} - \frac{P^{\Phi}_i - P^{\Phi}_{i-1}}{6h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{P^{\Psi}}{2h}. \tag{11}$$

При послідовному конструюванні складеної кривої "зліва направо" вважаємо, що в лівій частині (11) визначені все параметри $\Phi(x)$. Тоді для $\Psi(x)$ вільним залишається один параметр y_{i+1} або P^{Ψ}. Якщо складена крива конструюється "справа наліво", то вважаємо, що $\Psi(x)$ визначена, тобто в правій частині (11) визначені всі змінні. Тоді для $\Phi(x)$ вільними залишаються 2 параметри y_{i-1} або P^{Φ}_i або P^{Φ}_{i-1}, які дозволяють з двопараметричної множини кривих вилучити $\Phi(x)$. В окремому випадку стику поліномів 2-го та 3-го порядку можливо забезпечити гладкість другого ступеню за умовою:

$$P^{\Phi}_i = P^{\Psi}. \tag{12}$$

Тоді при конструюванні "зліва направо" можна визначити єдину криву 2-го порядку $\Psi(x)$, яка відповідає умовам (11) або (12), а при конструюванні "справа наліво" вільним залишається лише один параметр y_{i-1} або $P^{\Phi}_{i-1}(\Delta P^{\Phi})$ для кривої $\Phi(x)$. Зміна знаку P на протилежний у вузлі стику визначає точку перегину (рис.7).

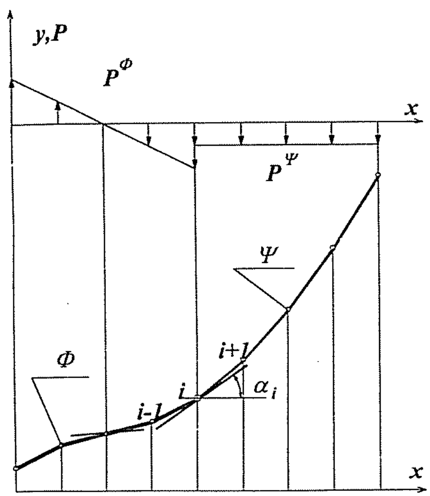


Рис.6

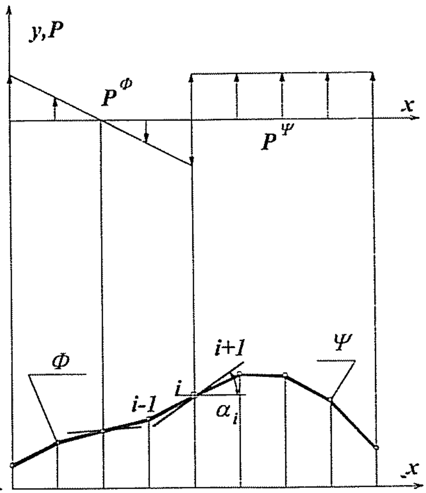


Рис.7

Використання ДПК як інтерполюючих функцій складених кривих виключає зайвий перехід від дискретного подання вихідних даних до континуальної моделі та навпаки – від континуальної аналітичної до дискретного подання результатів конструювання кривої. Викладені аналітичні залежності, що моделюють крайові умови та визначальні параметри базових функцій у дискретному вигляді дозволяють будувати широкий спектр складених параметричних кривих [1], поданих на рівномірній сітці.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 304 с.

2. Іванова Л.С. Дискретне завдання поліному n-го ступеню // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2000. – Вип.67. – С.96-100.