

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

АНАНЕНКО Тетяна Анатоліївна

УДК 514.18

**КОНСТРУЮВАННЯ ОБВІДНИХ ПОВЕРХОНЬ
ОДНОПАРАМЕТРИЧНОЇ МНОЖИНИ ПЛОЩИН ТА ПОБУДОВА ЇХ
РОЗГОРТOK**

05.01.01 – прикладна геометрія, інженерна графіка

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

КИЇВ – 2012

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Національному університеті біоресурсів і природокористування України Кабінету Міністрів України

Науковий керівник – доктор технічних наук, професор
Пилипака Сергій Федорович,
Національний університет біоресурсів і
природокористування України (м. Київ), завідувач
кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та
дизайну

Офіційні опоненти: – доктор технічних наук, професор
Гнатушенко Володимир Володимирович,
Дніпропетровський національний університет
ім. О. Гончара (м. Дніпропетровськ), професор кафедри
електронних засобів телекомунікацій ;

– кандидат технічних наук, доцент
Сименко Олена Василівна,
Красноармійський індустріальний інститут Донецького
національного технічного університету
(м. Красноармійськ), завідувач кафедри інженерної
механіки

Захист відбудеться «11» квітня 2012 р. о 13⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.06 у Київському національному університеті будівництва і архітектури за адресою:

03680, м. Київ, Повітрофлотський просп., 31, ауд. 466.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою:

03680, м. Київ, Повітрофлотський просп., 31, КНУБА.

Автореферат розісланий " 7 " березня 2012 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

О.А. Бондар

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Кожну поверхню можна розглядати як обвідну своїх дотичних площин. Рівняння сім'ї дотичних площин називається тангенціальним рівнянням поверхні. Множини дотичних площин та їх обвідні поверхні відіграють важливу роль в теорії інструментального формоутворення поверхонь деталей. Поверхня, яка утворюється при обробці деталі інструментом, є обвідною сім'ї формоутворюючих поверхонь інструмента. Типовим прикладом формування поверхні є нарізання косозубих коліс, профіль яких утворюється як обвідна різних положень поверхні інструмента. Якщо множина дотичних площин є однопараметричною, то обвідною поверхнею є розгортна поверхня (торс). Існують різні способи утворення однопараметричних множин площин, в тому числі відомі кінематичні способи. Досить широкого розвитку набув спосіб утворення алгебраїчних торсів обкочуванням площини по двох кривих другого порядку в працях проф. В.С. Обухової. Розвиток сучасних засобів обчислювальної техніки дозволяє швидко і з великою точністю розв'язувати задачі геометричного конструювання поверхонь і отримувати їх якісну візуалізацію. Це дає можливість далі розвивати способи формоутворення торсів, як обвідних поверхонь однопараметричної множини площин. Один із таких способів, який не міг раніше бути реалізованим повною мірою із-за відсутності потужних обчислювальних машин – це спосіб утворення однопараметричної множини площин з допомогою супровідного тригранника напрямної кривої. Його суть полягає в тому, що в кожен момент часу положення окремої площини в просторі визначається результатом двох рухів: відносного руху площини в триграннику і переміщенням самого тригранника по напрямній кривій. Такий підхід розширює можливості конструювання торсів як обвідних поверхонь.

В умовах технічного прогресу та розвитку програмно-технічного забезпечення комп'ютерних технологій до утворення і задання поверхонь висуваються вимоги, виконання яких забезпечує реалізацію технологічних, естетичних та економічних чинників. З таких позицій особливий клас поверхонь складають розгортні або торсові поверхні, оскільки процес конструювання технічних форм на їх основі значно спрощується через можливість побудови розгорток із заданим ступенем точності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, темами, планами. Дисертаційна робота виконувалась у Національному університеті біоресурсів і природокористування України у відповідності з планом наукових досліджень кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну «Конструювання поверхонь технічних форм та їх автоматизоване проектування» у відповідності з галузевими НДР.

Мета і задачі дослідження. Метою досліджень є знаходження способів конструювання поверхонь при заданих закономірностях утворення однопараметричних множин площин, вивчення властивостей утворених поверхонь та конструювання їх розгорток.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- виконати огляд існуючих методів конструювання торсових поверхонь за допомогою рухомої площини та способів конструювання їх розгорток;
- розробити математичну модель утворення однопараметричної множини площин за різними законами неперервного переміщення площини у просторі;
- розширити способи побудови полярних торсів та їх розгорток;
- побудувати торси, у яких напрямна крива переходить в наперед задану криву на їх розгортці;
- впровадити результати отриманих досліджень у практику та навчальний процес.

Об'єктом дослідження є обвідні поверхні однопараметричної множини площин та їх розгортки.

Предметом дослідження є способи конструювання поверхонь при заданих закономірностях утворення однопараметричних множин площин.

Теоретичною базою даних досліджень були наступні роботи вчених:

- у галузі конструювання розгортних поверхонь: Бубеннікова А.В., Булгакова В.Я., Ваніна В.В., Громова М.Я., Джанабаєва Д.Д., Мартиросова А.Л., Муквича М.М., Несвідоміна В.М., Обухової В.С., Підгорного О.Л., Пилипаки С.Ф., Рачковської Г.С., Скідана І.А. та ін.
- у галузі знаходження розгорток торсових поверхонь: Кардашевської Ю.Г., Обухової В.С., Панасюк Л.С., Пилипаки С.Ф., Скідана І.А. та ін.

При роботі над дисертацією використовувались фундаментальні праці вчених: Г. Монжа, В. Блашке, К. Гаусса, Л. Ейлера, Ж. Серре, Ж. Френе, Е. Картана та ін.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

1) *вперше*:

- розглянуто конструювання торсів за допомогою однопараметричної множини площин, утворених додаванням двох рухів: обертального руху площини навколо осі і одночасному переміщенні осі в просторі за заданим законом;
- побудовано торси для найпростіших комбінацій вказаних рухів та встановлено співвідношення між:
 - кутовою швидкістю обертання площини навколо вертикальної осі та поступальною швидкістю цієї осі в горизонтальному напрямі для отримання відомих циліндричних поверхонь;
 - кутовою швидкістю обертання площини навколо горизонтальної осі та кутовою швидкістю обертання самої осі навколо точки в горизонтальній площині для отримання конічних поверхонь;

2) *удосконалено*:

- способи конструювання полярних торсів, зокрема, для кривої укусу. З'ясовано, що ними є торси однакового нахилу твірних та встановлено зв'язок між кутом підйому кривої укусу та кутом нахилу

твірних полярного торса;

- спосіб конструювання торса обертанням площини навколо орта дотичної тригранника Френе просторової напрямної кривої, при якому напрямна крива буде спеціальною лінією торса;

3) *отримав подальший розвиток:*

- аналітичний опис торса, усі твірні якого перетинають плоску напрямну криву під сталим кутом та виведено параметричні рівняння розгортки;

- спосіб конструювання торсів на основі створення однопараметричної множини площин за допомогою тригранника Френе напрямної просторової кривої.

Обґрунтованість і достовірність результатів. Усі наукові положення представлені в аналітичному вигляді. Їх достовірність забезпечується перевіркою рівності коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхонь та їх розгорток і візуалізацією утворених поверхонь засобами комп'ютерної графіки.

Наукове значення роботи полягає у розвитку способів конструювання однопараметричних множин площин та розробці способів побудови відповідних обвідних торсів.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові дослідження знайшли своє застосування при конструюванні агромогового комплексу для культивування рослин посаджених рядками, що підтверджує отриманий патент на корисну модель. Результати досліджень впроваджено у:

- виробництво Науково-дослідного інституту механізації землеробства півдня України;

- навчальний процес Відокремленого підрозділу Національного університету біоресурсів і природокористування України „Ніжинський агротехнічний інститут”.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційних досліджень доповідались на наступних наукових конференціях: III всеукраїнській науково-практичній конференції «Перспективи розвитку агропромислового комплексу в поліському регіоні України» (м. Ніжин, червень 2009 року); VII міжнародній науково-практичній конференції «Геометричне моделювання і комп'ютерний дизайн» (м. Одеса, квітень 2010 року); XII міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні проблеми геометричного моделювання» (м. Мелітополь, червень 2010 року).

Публікації. Основні результати досліджень висвітлено у 9 наукових працях, з них 7 опубліковані у фахових виданнях, затверджених МОНмолодьспорту України, 1 патент на корисну модель України, 4 праці опубліковані одноосібно.

Структура дисертації. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 162 найменувань та 33

додатків. Робота містить 211 сторінок, з яких 136 сторінок основного тексту, 64 рисунки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ містить загальну характеристику роботи. В ньому обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та задачі досліджень, показано наукову новизну та практичне значення результатів дисертації. Наведено відомості про апробацію та публікації результатів досліджень.

У першому розділі здійснено огляд літературних джерел за обраною темою, розглянуто способи конструювання розгортних поверхонь за допомогою рухомої площини, яка утворює однопараметричну множину своїх положень у просторі. Наведено огляд джерел з області побудови розгорток торсів.

Розгортні поверхні достатньо вивчені як в аналітичній так і в синтетичній формі. Проф. Обухова В.С. та її учні конструювали торси 4-го порядку коченням площини по двох напрямних алгебраїчних кривих 2-го порядку. Твірні такого торса, проходять через відповідні точки кривих другого порядку, які утворюються при їх обкатці спільною дотичною площиною. Як окремий випадок розглянуто конструювання торса, при якому алгебраїчними кривими другого порядку є параболи, розміщені в паралельних площинах.

Є випадки, коли процес конструювання поверхонь значно спрощується при використанні спеціальних систем відліку. Проф. Скідан І.А. розробив спосіб конструювання торсової поверхні, який полягає у відшуванні твірної торса у площині-носію Ω^n , що обертається за заданим законом навколо осі Oz в різних системах координат: узагальнених циліндричних, гіперболічних та квазісферичних.

Використання натуральної системи координат (системи супровідного тригранника Френе) для кривої, заданої у функції довжини дуги s , дає можливість застосування формул Серре-Френе для аналітичних перетворень при конструюванні поверхонь.

Проф. Пилипакою С.Ф. було запропоновано здійснювати опис лінійчатих поверхонь у системі тригранника Френе прямої кривої за допомогою двох кутів, які визначають положення прямої лінійної твірної по відношенню до ортів тригранника: γ – кут між ортом дотичної і прямої лінійною твірною поверхні; ε – кут між дотичною площиною до конструйованої поверхні та стичною площиною тригранника Френе (рис. 1). Якщо ці кути зробити функціями довжини дуги s прямої кривої, то залежності $\varepsilon=\varepsilon(s)$ і $\gamma=\gamma(s)$ визначатимуть положення прямої лінійної твірної поверхні в кожній точці прямої кривої, тобто буде описана лінійчата поверхня. Для того, щоб поверхня була розгортною, між кутами ε і γ встановлюється певна функціональна залежність.

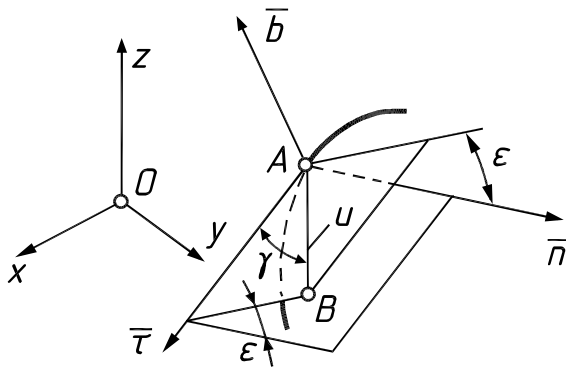


Рис.1. Задання положення прямолінійної твірної поверхні в системі тригранника Френе за допомогою кутів ϵ і γ

Муквич М.М. розглянув конструювання торса за допомогою супровідного тригранника напрямної кривої. Для цього він жорстко закріплював площину у відрізках на ортах або у вершині тригранника. При русі тригранника по заданій напрямній кривій утворюється однопараметрична множина площин, обвідною поверхнею якої є торс. Автором дано аналітичний опис цих поверхонь у вигляді параметричних рівнянь та

встановлені їх диференціальні характеристики.

Окремим випадком розгортних поверхонь є торси однакового нахилу твірних. Щоб обвідна поверхня була саме таким торсом, необхідно забезпечити постійність кута нахилу кожної площини однопараметричної множини до заданої площини. Торс однакового нахилу твірних може також бути отриманий, як обвідна поверхня однопараметричної множини конусів із незмінним напрямом осі обертання. Математична модель при такому утворенні поверхні розглянута в працях Пилипаки С.Ф.

Відшукування розгортки торса є однією з класичних задач диференціальної геометрії і називається прямою задачею згинання. При конструюванні технічних форм її розв'язання необхідне для відшукування кривих, що обмежують відсік торса, на розгортці, тобто для знаходження заготовки.

Кардашевською Ю.Г. був розглянутий координатний спосіб конструювання розгортки торса, коли він заданий ребром звороту у функції довжини власної дуги. Пізніше цей спосіб був узагальнений Скіданом І.А. для випадку довільного параметра.

При конструюванні технічних форм із розгортних поверхонь напрямні криві, як правило, входять у вихідні дані, а побудову розгортки пов'язують з відшукуванням ребра звороту. Тому в працях деяких авторів були розроблені способи відшукування розгортки торса, в основі якого лежить знаходження напрямних кривих торса на розгортці без використання ребра звороту. Пилипакою С.Ф. цей спосіб був застосований для окремого випадку конструювання торсів однакового нахилу твірних за напрямною плоскою кривою і заданим кутом нахилу твірних торса до площини кривої. Такий підхід дещо спрощував побудову розгортки.

У другому розділі розглянуто різні способи утворення однопараметричних множин площин без прив'язки до напрямної кривої. Знайдено обвідні поверхні цих множин площин та досліджено їх властивості.

Додаванням обертального руху об'єкта навколо осі і поступального руху самої осі можна одержати закон переміщення цього об'єкта у просторі. Якщо за об'єкт переміщення взяти площину, то її окремі положення у просторі утворюють однопараметричну множину площин, обвідною поверхнею якої буде торс. Якщо вісь обертання площини і напрям поступального руху осі взаємно

перпендикулярні, то обвідними поверхнями будуть циліндричні. Їх поперечний переріз залежатиме від співвідношення швидкостей поступального v і обертального ω рухів. Якщо швидкості поступального і обертального рухів є постійними, то крива поперечного перерізу циліндра опишеться рівняннями:

$$\begin{aligned} x &= vt - \frac{v}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t; \\ y &= \frac{v}{\omega} \cos^2 \omega t, \end{aligned} \quad (1)$$

де t – незалежна змінна (час руху).

Відшукуванням натурального рівняння кривої (1) було встановлено, що це циклоїда, параметр форми якої залежить від співвідношення швидкостей v і ω .

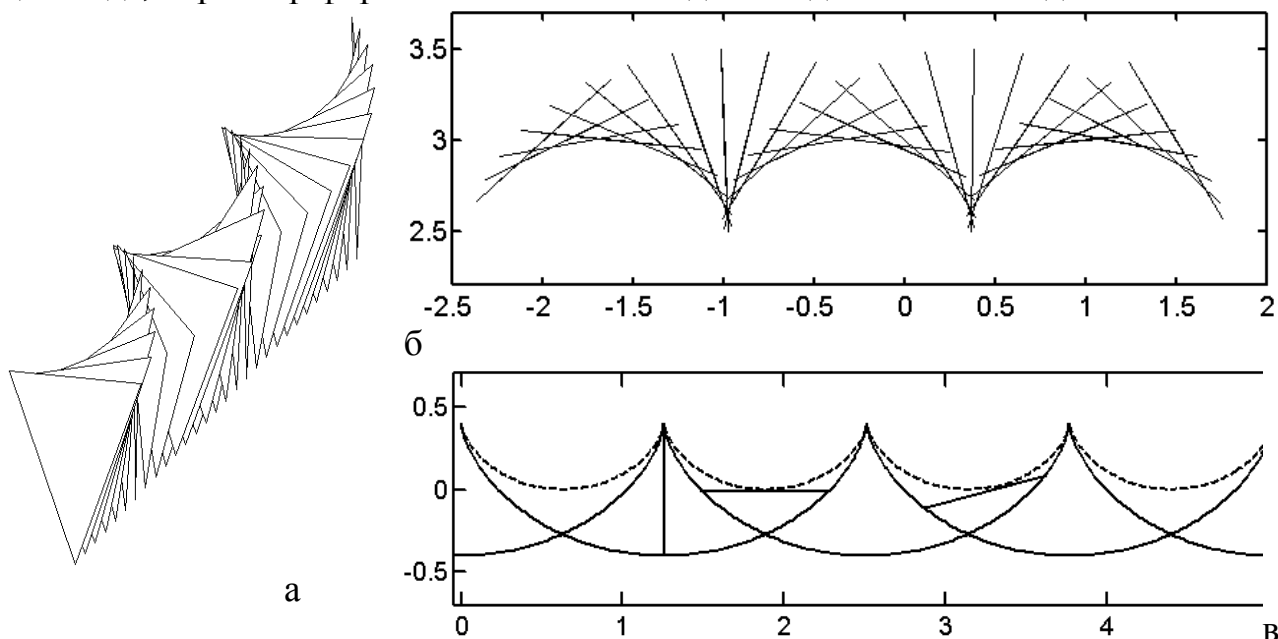


Рис. 2. Результати обертання площини з одночасним прямолінійним рухом:

а) однопараметрична множина площин;

б) вигляд зверху;

в) циклоїди – обвідна положень відрізка (штрихова лінія) і супутні – траєкторії кінців відрізка (суцільна лінія).

Твердження. Якщо площина одночасно перебуває у двох рухах – в обертальному навколо осі постійного напрямку з кутовою швидкістю ω і прямолінійному поступальному перпендикулярно до осі з швидкістю v – то обвідною поверхнею однопараметричної множини положень площини буде циліндр, поперечним перерізом якого є циклоїда, причому параметр форми циклоїди (радіус a твірного кола) визначається із співвідношення обертальної і поступальної швидкостей: $a = \frac{v}{2\omega}$.

Утворення обвідного циліндра можна уявити на плоскій задачі. Відомо, що при коченні кола по прямій лінії його точка описує циклоїду. Візьмемо на колі дві діаметрально протилежні точки і сполучимо відрізком. При коченні кола ці точки описуватимуть кожна свою циклоїду, а відрізок огинатиме ще одну циклоїду – обвідну криву. На рис. 2,в обвідна циклоїда зображена

штриховою лінією. Тут також показано окремі положення відрізка, який сполучає відповідні точки на двох інших циклоїдах і є дотичним до обвідної.

В розділі розглянуто також випадки, коли вісь обертання площини рухається по колу за або проти годинникової стрілки. Доведено, що в такому випадку перерізом обвідного циліндра буде гіпо- або епіциклоїда, форма яких також залежить від співвідношення відповідних швидкостей. Сформульовано відповідне твердження.

Щоб описати однопараметричну множину площин, утворену додаванням двох обертальних рухів (кутовою швидкістю обертання площини навколо горизонтальної осі та кутовою швидкістю обертання самої осі навколо точки в горизонтальній площині) було використано сферичну систему координат. Для цього розглядали сферичні трикутники (рис. 3,а), утворені дугами великих кіл (тобто кіл, утворених перетином сфери площиною, яка проходить через її центр). На основі формул сферичної тригонометрії було виведено параметричні рівняння конічних поверхонь, форма яких також залежить від співвідношення кутових швидкостей описаних рухів. Вони мають наступний вигляд для рівних кутових швидкостей ω (u – друга незалежна змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної):

$$\begin{aligned} X &= u \frac{\omega \cos t - \sin t \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}; \\ Y &= u \frac{\omega \sin t + \cos t \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}; \\ Z &= u \frac{\sin^2 \omega t}{\sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}. \end{aligned} \quad (2)$$

На рис. 3,б зображено поверхню, побудовану за рівняннями (2). Поверхня обмежена кривими її перетину із сферою одиничного радіуса.

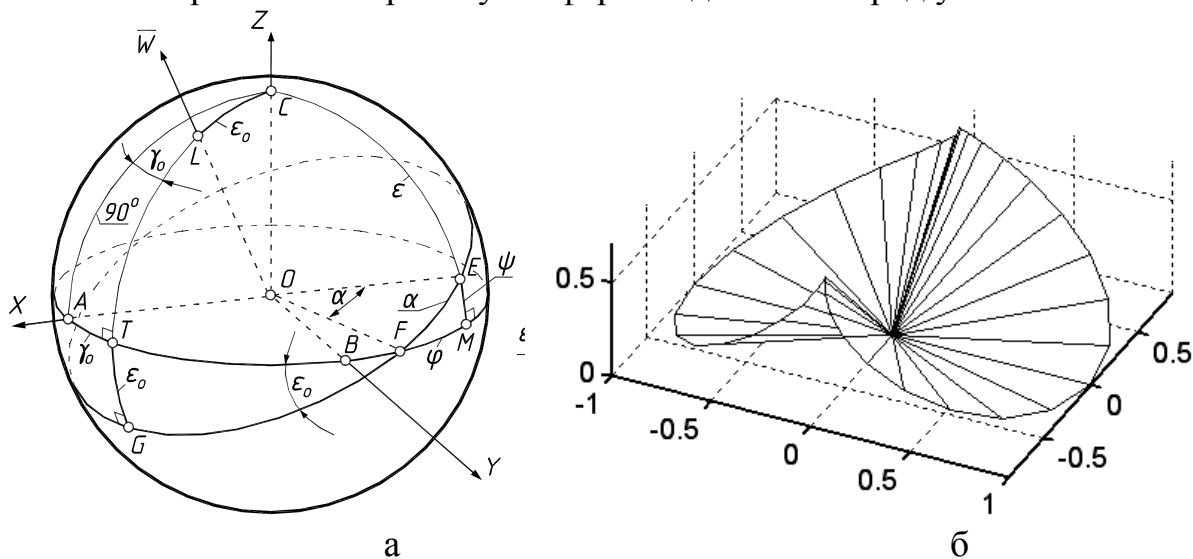


Рис. 3. До утворення конічної поверхні (2) із вершиною у центрі сфери:

- а) сфера одиничного радіуса із заданим вектором $\vec{W}$ осі обертання точки навколо неї;
- б) конічна поверхня, обмежена сферичною кривою.

Для різних співвідношень кутових швидкостей були отримані відповідні конічні поверхні (на рис. 4 показані прямокутні проекції кривих їх перетину із сферою, включаючи і випадок рівних кутових швидкостей). Оскільки кутову швидкість осі пучка прийнято за одиницю, то це співвідношення буде рівним ω - кутовій швидкості обертання площини в пучку.

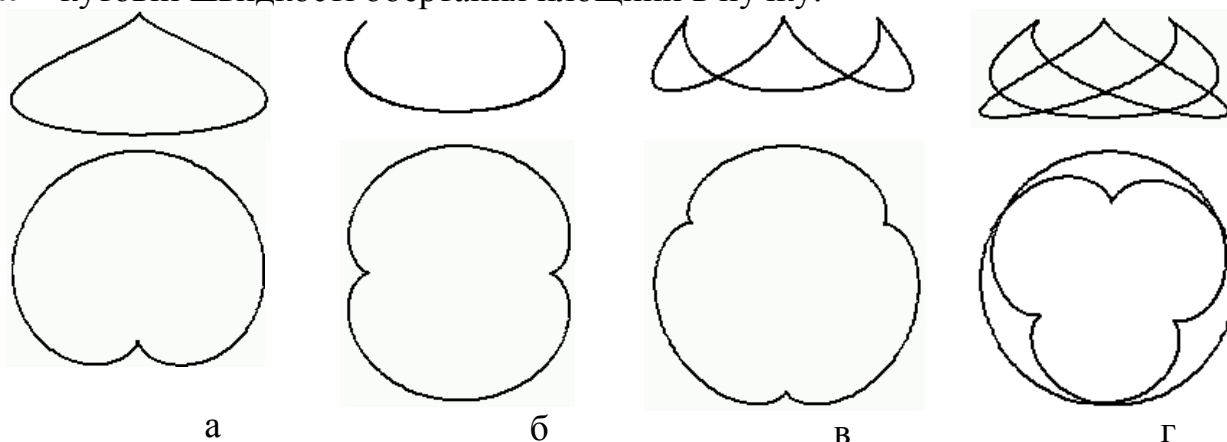


Рис. 4. Проекції сферичних кривих, що обмежують конус, при різних кутових швидкостях ω обертання площини в пучку:

а) $\omega = 0,5$; б) $\omega = 1$; в) $\omega = 1,5$; г) $\omega = 0,75$.

Характерною ознакою наведених кривих є те, що їх горизонтальні проекції подібні до відомих плоских кривих – епіциклоїд. Але це лише зовнішня схожість, оскільки натуральних рівнянь для цих кривих не існує.

У третьому розділі однопараметричних множин площин, утворених за допомогою тригранника Френе напрямної кривої, розглянуто конструювання торсів як обвідних поверхонь

Як відомо, з кожною точкою просторової кривої пов'язані три взаємно перпендикулярні площини – стична, спрямна і нормальна. При переміщенні точки вздовж кривої кожна з цих площин описує однопараметричну сім'ю площин, тобто огинає деякий торс. Можна поставити умову, щоб через кожну точку кривої пройшла площина із заданим нормальним вектором незмінного напрямку в системі супровідного тригранника Френе. Нехай таким вектором буде вектор дотичної до кривої; в такому випадку всі площини будуть перпендикулярними до кривої, а торс, який вони утворюють, називається полярним торсом. В роботі розглянуто конструювання полярного торса і побудови його розгортки для просторової кривої укусу, заданої параметричними рівняннями (3), де s – довжина дуги кривої; $k=k(s)$ – закономірність зміни кривини; $\beta=const$ – кут підйому кривої:

$$\begin{aligned} x &= \cos \beta \int \cos \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) ds; \\ y &= \cos \beta \int \sin \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) ds; \\ z &= s \sin \beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Виведено параметричні рівняння полярного торса у вигляді:

$$\begin{aligned} X &= \cos \beta \int \cos \psi \, ds + s \sin \beta \operatorname{tg} \beta \cos \psi - \frac{1}{k} \sin \psi - u \sin \beta \cos \psi; \\ Y &= \cos \beta \int \sin \psi \, ds + s \sin \beta \operatorname{tg} \beta \sin \psi + \frac{1}{k} \cos \psi - u \sin \beta \sin \psi; \\ Z &= u \cos \beta, \end{aligned} \quad (4)$$

де кут ψ є функцією довжини дуги s , а саме: $\psi = \frac{1}{\cos \beta} \int k \, ds$;

u – друга незалежна змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної.

В роботі показано, що полярний торс (4) кривої укосу (3) із кутом підйому β є торсом однакового нахилу твірних, причому доведено, що цей кут нахилу твірних рівний $\varphi = 90^\circ - \beta$. Властивістю полярного торса є те, що задана вихідна крива (3) не належить його поверхні. Ще одна особливість – в рівняннях (4) змінна s є довжиною дуги вихідної кривої, тобто є “чужою” дугою і для поверхні (4) не несе геометричного змісту.

Для відшукування ребра звороту торса (4) було використано відомий спосіб: рівняння площини однопараметричної множини було продиференційовано двічі по змінній s , тобто отримано рівняння ще двох площин. Параметричні рівняння ребра звороту було знайдено, як точки перетину трьох площин:

$$\begin{aligned} x_{pz} &= \cos \beta \left(\int \cos \psi \, ds + \frac{k'}{k^3} \cos \psi \right) - \frac{1}{k} \sin \psi; \\ y_{pz} &= \cos \beta \left(\int \sin \psi \, ds + \frac{k'}{k^3} \sin \psi \right) + \frac{1}{k} \cos \psi; \\ z_{pz} &= s \sin \beta - \frac{k' \cos^2 \beta}{k^3 \sin \beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

На основі інваріантності довжин ліній та кутів між лініями на поверхні при її згинанні отримано параметричні рівняння розгортки полярного торса (4):

$$\begin{aligned} X_{\text{роз}} &= \int \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \cos \left(\operatorname{tg} \beta \int k \, ds \right) ds + u \sin \left(\operatorname{tg} \beta \int k \, ds \right); \\ Y_{\text{роз}} &= \int \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \sin \left(\operatorname{tg} \beta \int k \, ds \right) ds - u \cos \left(\operatorname{tg} \beta \int k \, ds \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Показано, що коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (4) та її розгортки (6) однакові, що свідчить про достовірність отриманих результатів.

Для перевірки отриманих рівнянь (4), (5), (6) було побудовано полярний торс, ребро звороту та розгортку торса для кривої, заданої натуральним рівнянням $k = \operatorname{ctg} \beta / s$ при $\beta = 30^\circ$. Відсік торса, його ребро звороту та розгортка

представлені на рис. 5, причому окремі відсіки торса побудовані з різною густиною координатних ліній.

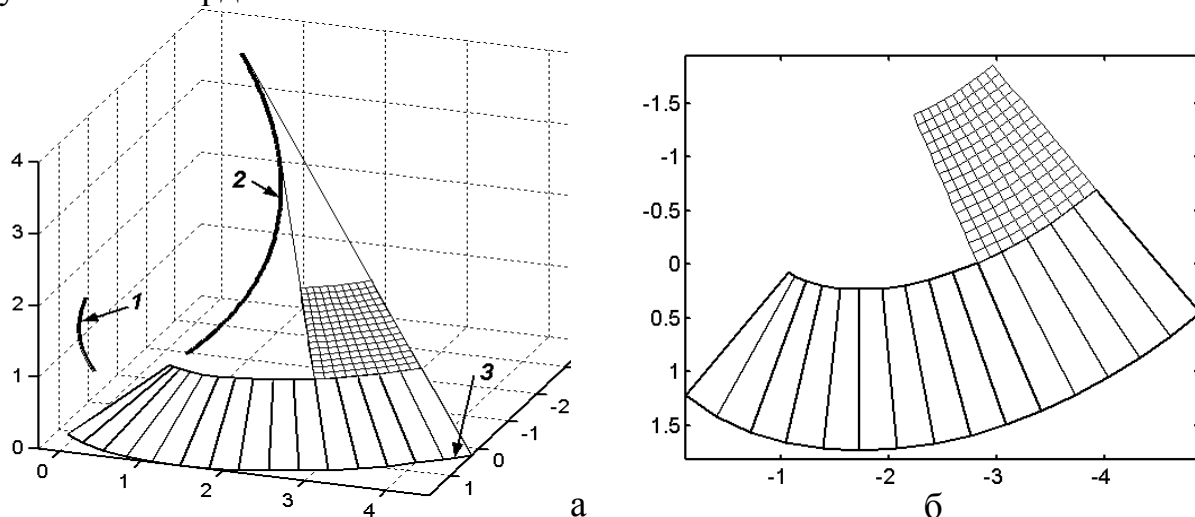


Рис. 5. Полярний торс кривої, заданої натуральним рівнянням $k = \frac{\text{ctg} \beta}{s}$:

а) полярний торс: 1 – напрямна крива, 2 – ребро звороту, 3 – крива перерізу торса горизонтальною площиною;
б) розгортка торса.

Досліджено також конструювання полярного торса, напрямною кривою якого є сферична крива та сферична крива укусу. Особливістю такого торса є те, що ребро звороту торса вироджується в точку – центр сфери. В роботі розглянуто конструювання полярного торса на прикладі сферичної кривої, заданої параметричними рівняннями (a – стала величина):

$$\begin{aligned} x &= \sin(as) \cos \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\text{tg} \frac{as}{2} \right) \right]; \\ y &= \sin(as) \sin \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\text{tg} \frac{as}{2} \right) \right]; \\ z &= \cos(as). \end{aligned} \quad (7)$$

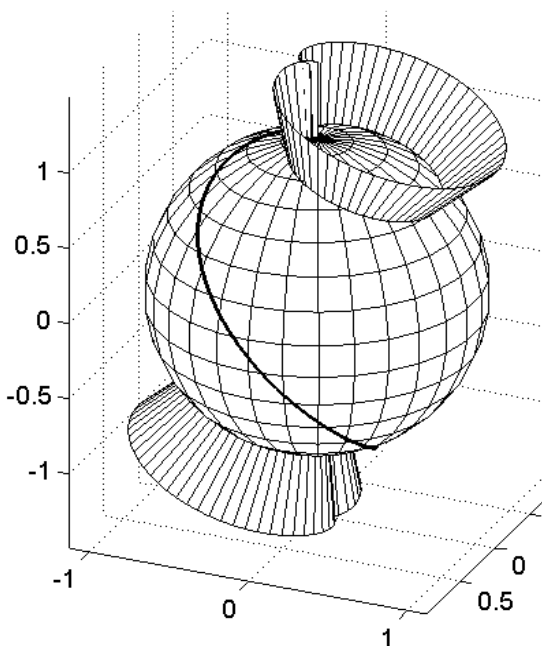


Рис. 6. Сфера, крива на її поверхні та відповідний полярний торс.

Знайдено параметричні рівняння полярного торса для кривої (7) та його розгортки:

$$\begin{aligned} X &= -u \frac{a \sin as}{\sqrt{1-a^2 \cos^2 as}} \sin \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\text{tg} \frac{as}{2} \right) \right]; \\ Y &= u \frac{a \sin as}{\sqrt{1-a^2 \cos^2 as}} \cos \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\text{tg} \frac{as}{2} \right) \right]; \\ Z &= u \sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^2 \cos^2 as}}. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
X_p &= u \cos \left[-\operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} as}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right] = u \frac{\sqrt{1-a^2} \cos as}{\sqrt{1-a^2 \cos^2 as}}; \\
Y_p &= u \sin \left[-\operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} as}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right] = -u \frac{\sin as}{\sqrt{1-a^2 \cos^2 as}}.
\end{aligned} \quad (9)$$

Перша квадратична форма торса (8) і його розгортки (9) має однаковий вираз, що підтверджує достовірність отриманого результату. Вихідна крива та її полярний торс зображені на рис. 6.

З практичної точки зору важливою є задача конструювання торса, який би проходив через задану вихідну кривую. В роботі показано, що це буде виконано, якщо при русі тригранника по кривій у ньому одночасно буде обертатися площина навколо орта дотичної за будь-яким законом. Обвідною поверхнею однопараметричної множини площин буде торс, який проходить через задану криву. Положення площини μ в триграннику задається кутом ε (рис. 7), відлік якого починається від стичної площини. Вважатимемо, що при русі

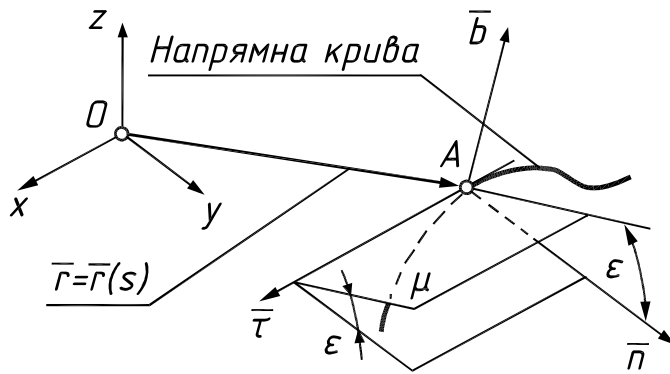


Рис. 7. Положення площини μ в системі супровідного тригранника напрямної кривої.

тригранника по кривій площина μ обертатиметься навколо орта дотичної $\bar{\tau}$ за певним законом $\varepsilon = \varepsilon(s)$. Рівняння площини в триграннику Френе запишеться:

$$-\bar{n} \sin \varepsilon + \bar{b} \cos \varepsilon = 0. \quad (10)$$

В результаті певних перетворень методами векторної алгебри було отримано векторне рівняння торса в системі тригранника Френе:

$$\bar{R}(s, u) = \bar{r} + u \left(\begin{aligned} &\bar{\tau} \frac{\sigma + \varepsilon'}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}} + \bar{n} \frac{k \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}} + \\ &+ \bar{b} \frac{k \sin^2 \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}} \end{aligned} \right), \quad (11)$$

де u – друга незалежна змінна (довжина прямолінійної твірної торса).

Через задану просторову криву, у якій відомі натуральні рівняння кривини $k=k(s)$ і скруту $\sigma=\sigma(s)$, можна провести безліч торсів, задаючи різні залежності $\varepsilon=\varepsilon(s)$ в (11). Зокрема, при $\sigma + \varepsilon' = 0$, тобто при $\varepsilon = -\int \sigma ds$ ми отримаємо торс, для якого вихідна крива буде лінією кривини. При $\varepsilon=0$ напрямний вектор твірної збігається із ортом дотичної, отже напрямна крива в цьому випадку буде ребром звороту торса. Якщо кут $\varepsilon=90^\circ$ (площина μ збігається із спрямною площиною тригранника), то напрямна крива буде геодезичною лінією торса. В роботі також отримано параметричні рівняння

ребра звороту торса (11) в системі тригранника Френе. Для побудови торса та його ребра звороту потрібно перейти від рівнянь в системі супровідного тригранника до рівнянь в декартовій системі координат. Це робиться за допомогою дев'яти напрямних косинусів, які встановлюють відповідність між двома системами координат: рухомого тригранника Френе і нерухомої декартової системи.

Для прикладу було взято просторову криву, задану параметричними рівняннями:

$$x = 0,5 \cos^2 s; \quad y = 0,5(s - \sin s \cos s); \quad z = \sin s. \quad (12)$$

Кривина і скрут кривої (12) знаходяться за відомими формулами:

$$k = \sqrt{1 + \sin^2 s}; \quad \sigma = \frac{\cos 3s - 9 \cos s}{4(1 + \sin^2 s)}. \quad (13)$$

Для того, щоб напрямна крива (12) була лінією кривини торса, закономірність $\varepsilon = \varepsilon(s)$ знаходимо інтегруванням скруту:

$$\varepsilon = -\int \sigma ds = -\int \frac{\cos 3s - 9 \cos s}{4(1 + \sin^2 s)} ds = \sin s + \arctg(\sin s) + \varepsilon_0. \quad (14)$$

Підстановка (14) в (11) і подальший перехід до рівнянь в нерухомій декартовій системі координат дає можливість побудувати торс (рис. 8).

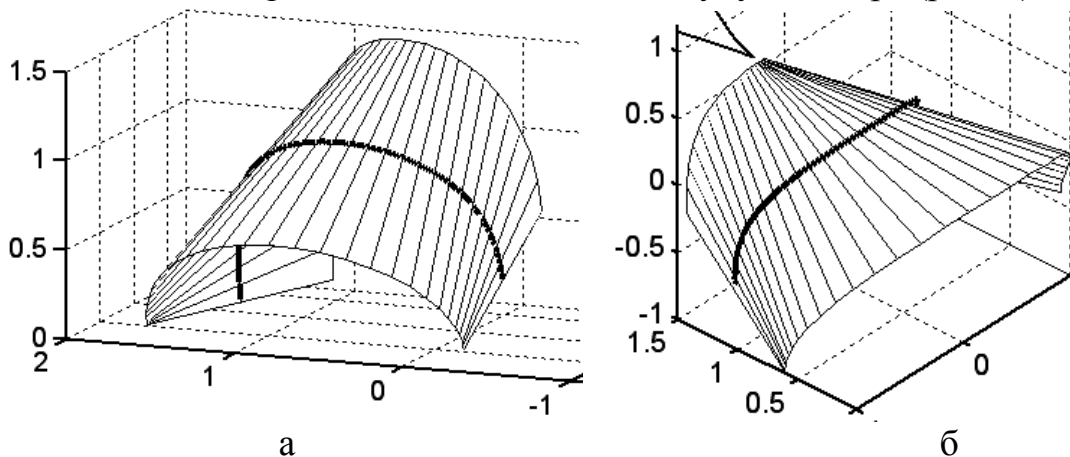


Рис. 8. Відсіки торса, для яких напрямна крива (12) є лінією кривини:
а) постійна інтегрування $\varepsilon_0=0$; б) постійна інтегрування $\varepsilon_0=30^\circ$.

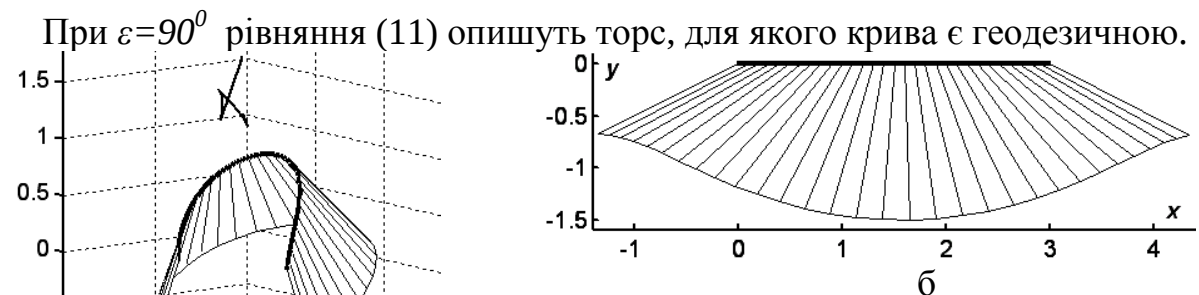


Рис. 9. Відсік торса, для якого напрямна крива (12) є геодезичною лінією:
а) аксонометричне зображення;
б) розгортка відсіку.

На рис. 9,а побудовано фрагмент торса, для якого крива (12) є геодезичною лінією. Оскільки геодезична крива торса перетворюється в пряму

на його розгортці, то побудова розгортки спрощується. Її параметричні рівняння в скороченому варіанті через вирази кривини і скруту (13) запишуться:

$$X_p = s + u \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}; \quad Y_p = u \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}. \quad (15)$$

Розгортка фрагменту торса побудована на рис. 9,б.

Розглянуто також окремий випадок конструювання торса при $\sigma=0$, тобто для плоскої напямної кривої. Підкореневий вираз в рівняннях (11) набуває вигляду: $k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2$. Нехай $\varepsilon' = k \sin \varepsilon \operatorname{ctg} \beta$, де β – стала величина. Тоді він спрощується: $k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2 = k^2 \sin^2 \varepsilon / \cos^2 \beta$. Його підстановка в (11) значно спрощує рівняння торса, оскільки з підкореневого виразу добувається корінь. Після цього легко знайти, що твірна торса перетинає напямну криву під сталим кутом β . Закономірність повороту площини $\varepsilon=\varepsilon(s)$ в триграннику є результатом розв'язання диференціального рівняння $\varepsilon' = k \sin \varepsilon \operatorname{ctg} \beta$:

$$\varepsilon = 2 \operatorname{Arctg} e^{\operatorname{ctg} \beta \int k ds}. \quad (16)$$

На рис. 10,а побудовано торс, у якого напямною кривою служить коло $k=0,25$ (потовщена лінія) і при цьому всі твірні перетинають його під сталим кутом $\beta=45^\circ$, а на рис. 10,б побудовано його розгортку.

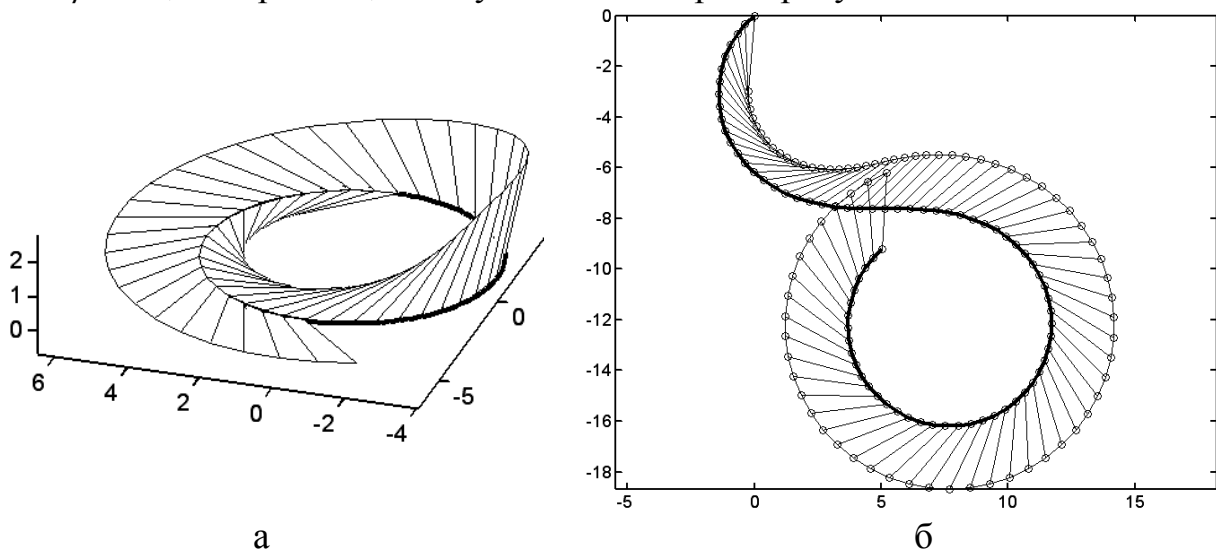


Рис. 10. Торс, у якого напямною кривою є коло $k=0,25$ і закономірність повороту площини в триграннику визначається із виразу (16) при $\beta=45^\circ$:

а) аксонометричне зображення;

б) розгортка.

Четвертий розділ присвячено розробці агромогового комплексу для культивування рослин, посаджених рядками. У відомих агрокомплексах для обробки міжрядь використовуються нерухомі культиваторні лапи, а для обробки проміжку між рослинами в рядку – рухомі, що здійснюють у потрібний момент коливальний рух в напрямі, перпендикулярному до напрямку руху комплексу. Недоліком даного комплексу є те, що привід рухомих лап в напрямку перпендикулярному до напрямку руху комплексу для обробки ґрунту в проміжках між рослинами здійснюється складними гідравлічними і

механічними пристроями. В роботі поставлено завдання спростити механізм приводу культиваторних лап і більш точно обробляти ґрунт навколо рослини.

Поставлене завдання досягається тим, що культиваторній лапі у вигляді плоскої смуги шириною b і обмеженою по довжині дугою радіуса r , проведеною із центра лапи (рис. 11,а), надається обертальний рух навколо осі, який погоджується із прямолінійним рухом комплексу. Основою теоретичних розрахунків комплексу є твердження, сформульоване в розділі 2, згідно якого між прямолінійною швидкістю v осі обертання лапи 8, її кутовою швидкістю обертання ω і величиною r (відстань від осі до округлої крайки лапи) існує залежність $v=2r\omega$, яка забезпечує окреслену форму необроблюваного ґрунту 10 (рис. 12). Ілюстрація руху лапи на прикладі відрізка показана на рис. 2,б. Якщо лапи 8 через стійки 9 приєднати до бруса 11, як показано на рис.12, і забезпечити співвідношення між поступальною швидкістю v бруса 11 і кутовими швидкостями стійок 9, як позначено на рис. 12 за допомогою редукторів 12, то лапи оброблять ґрунт (на рис.12 заштриховано), залишивши неущодженими рослини 7. При цьому міжрядкова відстань дорівнює $4r$.

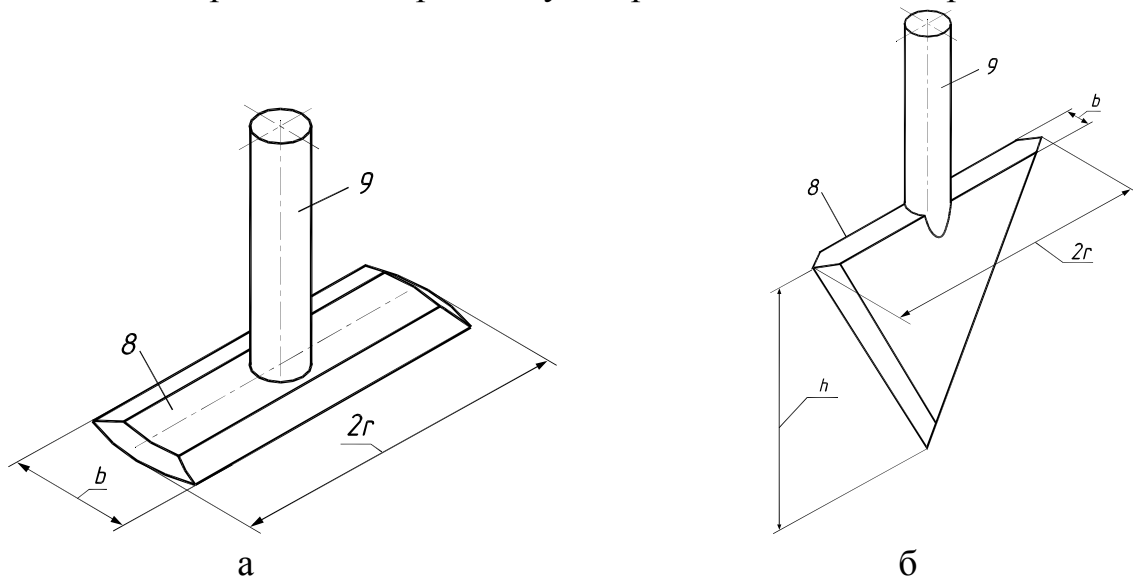


Рис. 11. Робочі органи для агромогового комплексу:

а) – плоска культиваторна лапа, б) – трикутна лапа для підгортання культур.

Міжрядкову відстань можна зменшити, розташовуючи попарно культиваторні лапи не в один ряд на брусі 11, як показано на рис. 12, а в шахматному порядку на паралельних брусах. Забезпечення залежності $v=2r\omega$ здійснюється через привід культиваторних лап від опорних коліс комплексу, що рухається по коліях без проковзування і буксовки. Друга культиваторна лапа, яка знаходиться в парі з першою, отримує обертальний рух з такою ж кутовою швидкістю ω в протилежну сторону завдяки редукторам 12. Швидкість руху комплексу при цьому не матиме значення, оскільки при її збільшенні відповідно збільшуватиметься кутова швидкість обертання культиваторних лап, тобто величина необробленої області навколо рослини не залежить від швидкості руху комплексу, як і від його руху вперед чи назад.

Якщо культиваторну лапу замінити заточеним з усіх боків трикутним відсіком шириною $2r$, товщиною b , висотою h (рис.11,б), рівній глибині

залягання коренів культури, то агроміст може бути використаний для підгортання рослин.

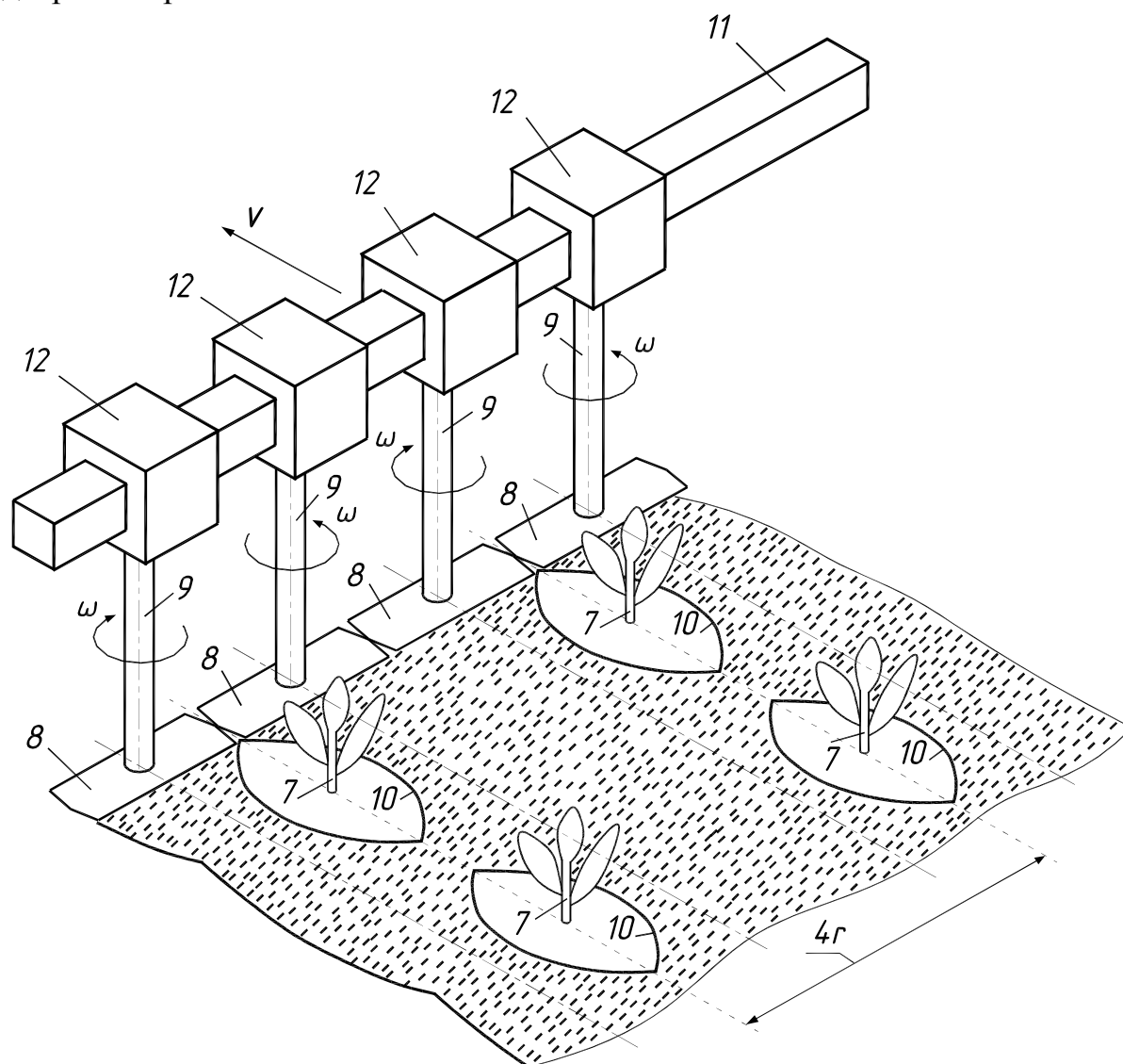


Рис. 12. Розміщення культиваторних лап на брусі агроміста.

За результатами формальної експертизи отримано деклараційний патент на корисну модель 58057 Україна, МПК(2001.01) A01B 49/00 «Агромістовий комплекс для культивації рослин, посаджених рядками» (заявник і патентовласник Національний університет біоресурсів і природокористування України. – № u201011316; заявл. 23.09.2010; опубл. 25.03.2011, Бюл. № 6, 2011 р.), авторами якого є Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Надикто В.Т.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено конструюванню обвідних поверхонь однопараметричної множини площин, при якому сама множина площин утворюється за заданим законом неперервного переміщення площини в просторі. Розглянуто різні закони переміщення площини та особливості

побудови розгорток відсіків отриманих торсів.

Значення для науки полягає у вивченні різних закономірностей утворення однопараметричних множин площин та розробці способів побудови відповідних обвідних торсів, вивченні їх властивостей та конструюванні поверхонь за заданими умовами.

Значення для практики полягає в розробці способів знаходження необхідного закону переміщення площини в просторі для утворення потрібної однопараметричної множини її положень.

При вирішенні поставлених задач отримано наступні результати, що мають науково-практичну цінність.

1. Розроблено математичну модель утворення однопараметричної множини площин за різними законами неперервного переміщення площини у просторі:

- положення площини у просторі описується рівнянням, в якому проекції нормального вектора площини та вільний член є функціями незалежної змінної;

- однопараметрична множина площин утворюється додаванням двох рухів: обертального руху площини навколо осі і одночасному переміщенні осі в просторі за заданим законом;

- множина положень площини у просторі утворюється за допомогою супровідного тригранника Френе плоскої або просторової кривої при його переміщенні по кривій і одночасному русі площини за заданим законом в системі самого тригранника.

2. Доведено два твердження, згідно яких можна визначити форму кривої ортогонального перерізу циліндричної поверхні, яка є обвідним торсом положень площини при додаванні її обертального руху навколо вертикальної осі і переміщення самої осі в горизонтальному напрямі за заданими траєкторіями.

3. Розширено способи конструювання полярних торсів та показано особливості побудови їх розгорток. З'ясовано, що полярним торсом кривої укусу є торс однакового нахилу твірних. Встановлено зв'язок між кутом підйому кривої укусу та кутом нахилу твірних полярного торса, та доведено, що сума цих кутів становить 90° . Розглянуто особливості конструювання полярних торсів та їх розгорток для сферичних кривих.

4. На основі створення однопараметричної множини площин за допомогою тригранника Френе напрямної просторової кривої отримано торси, у яких напрямна крива переходить в наперед задану криву на його розгортці.

5. Знайдено закономірності обертання площини навколо орта дотичної тригранника Френе просторової напрямної кривої, при яких напрямна крива буде спеціальною лінією торса.

6. Виведено параметричні рівняння торса, усі твірні якого перетинають плоску напрямну криву під сталим кутом та одержано параметричні рівняння розгортки.

7. При дослідженні однопараметричних множин площин додаванням обертального руху площини навколо осі і одночасному переміщенні осі в

перпендикулярному до неї напрямі отримано результат, який знайшов своє застосування в системі мостового (колійного) землеробства. Запропоновано схему агромостового комплексу, при поступальному русі якого робочі органи у вигляді відсіків площин одночасно синхронно обертаються навколо вертикальних осей із розрахованим передаточним числом і при цьому обробляють ґрунт, залишаючи навколо рослин ділянки необробленого ґрунту, які обмежені двома циклоїдами потрібних розмірів.

8. Результати досліджень впроваджено у виробництво нуково-дослідного інституту механізації землеробства півдня України та в навчальний процес Ніжинського агротехнічного інституту Національного університету біоресурсів і природокористування України.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях

1. Кресан Т.А. Утворення однопараметричної множини положень площини при додаванні її обертальних рухів / Т.А. Кресан, С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2009. –Вип. 82. –С. 32-41.

Особистий внесок здобувача: дослідила властивості проєкцій сферичних кривих, утворених внаслідок перетину конічних поверхонь та сфери одиничного радіуса.

2. Кресан Т.А. Дослідження розгортних та супутніх поверхонь, утворених однопараметричними сім'ями площин / Т.А. Кресан, С.Ф. Пилипака // Науковий вісник НУБіП України.–К.: НУБіП України, 2010.–Частина 1.–С.232-24.

Особистий внесок здобувача: знайшла параметричне рівняння ребра звороту торса, візуалізувала утворені поверхні.

3. Кресан Т.А. Обвідні циліндри однопараметричної множини положень площини, яка здійснює обертальний і поступальний рухи / Т.А. Кресан // Праці ТДАТУ. – Мелітополь, 2011. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т.49. – С. 154 -161.

4. Кресан Т.А. Обвідні циліндри однопараметричної множини положень площини, вісь обертання якої здійснює поступальний криволінійний рух / Т.А. Кресан // Праці ТДАТУ. – Мелітополь, 2011. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т.51. – С. 161 -168.

5. Кресан Т.А. Розгортки трьох проєкціювальних циліндрів, що проходять через задану просторову криву / Т.А. Кресан // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. – Луцьк: Редакційно-видавничий відділ Луцького національного технічного університету, 2010. – Вип. 29. – С. 83-88.

Патент

6. Патент на корисну модель 58057 Україна, МПК(2001.01) А01В 49/00 . Агромостовий комплекс для культивування рослин, посаджених рядками / Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Надикто В.Т.; заявник и патентовласник

Національний університет біоресурсів і природокористування України. – № u201011316; заявл. 23.09.2010; опубл. 25.03.2011, Бюл. № 6, 2011 р.

Особистий внесок здобувача: розробила спосіб обробітку ґрунту.

Матеріали конференцій

7. Кресан Т.А. Утворення пучка першого порядку обертанням площини навколо заданої осі / Т.А. Кресан, С.Ф. Пилипака // Матеріали III всеукраїнської науково-практичної конференції «Перспективи розвитку агропромислового комплексу в поліському регіоні України». – Ніжин: Міланік, 2010. – С.19-25.

Особистий внесок здобувача: розробила математичну модель пучка першого порядку.

8. Кресан Т.А. Конструювання полярного торса кривої укусу та побудова його розгортки / Т.А. Кресан, С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка: зб. наук. праць за матеріалами VII міжнародної науково-практичної конференції «Геометричне моделювання і комп'ютерний дизайн». – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 85. – С. 93-101.

Особистий внесок здобувача: отримала аналітичний вираз розгортки полярного торса, здійснила візуалізацію результатів.

9. Кресан Т.А. Конструювання торса, що проходить через задану просторову криву / Кресан Т.А. // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: зб. наук. праць за матеріалами XII міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Том 46. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – С.142 – 149.

АНОТАЦІЯ

Ананенко Т.А. Конструювання обвідних поверхонь однопараметричної множини площин та побудова їх розгорток. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.01.01 – прикладна геометрія, інженерна графіка. – Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна, 2012.

Дисертаційну роботу присвячено конструюванню обвідних поверхонь однопараметричної множини площин, при якому сама множина площин утворюється за заданим законом неперервного переміщення площини в просторі. Розглянуто різні закони переміщення площини та особливості побудови розгорток відсіків отриманих торсів. Отримано параметричні рівняння розгортних поверхонь та їх ребер звороту як у просторі, так і на розгортці. Основними розглянутими способами утворення однопараметричної множини площин є додавання двох рухів: обертального руху площини навколо осі і одночасному переміщенні осі в просторі за заданим законом та додавання відносного руху площини в системі тригранника Френе з переносним його рухом по заданій напрямній кривій.

Ключові слова: однопараметрична множина площин, розгортна поверхня, напрямна крива, тригранник Френе.

АННОТАЦІЯ

Ананенко Т.А. Конструирование огибающих поверхностей однопараметрического множества плоскостей и построение их разверток. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.01.01 – прикладная геометрия, инженерная графика. – Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина, 2012.

Диссертационная работа посвящена конструированию огибающих поверхностей однопараметрического множества плоскостей, при котором само множество плоскостей образуется по заданному закону непрерывного перемещения плоскости в пространстве. Закон перемещения есть результат суммирования двух движений. В одном случае суммируется вращательное движение плоскости вокруг оси с перемещением оси в пространстве по заданному закону. Во втором случае суммируется относительное движение плоскости в системе трехгранника Френе с переносным движением трехгранника по заданной направляющей кривой. Для первого случая рассмотрены самые простые комбинации движений, когда ось вращения плоскости движется прямолинейно или по заданной кривой в перпендикулярном к оси направлении. Найдены огибающие поверхности – цилиндры, ортогональные сечения которых зависят от соотношения вращательной и поступательной скоростей. Доказано два утверждения, дающих возможность определять форму этих сечений и послуживших основанием для практического внедрения полученных результатов. Рассмотрено также более сложное движение, состоящее из двух вращательных – плоскости вокруг оси и оси вокруг неподвижной точки. Огибающими поверхностями в этом случае есть конусы, которые описаны аналитически.

Основной объем исследований посвящен образованию однопараметрического множества плоскостей с помощью направляющей кривой. Плоскость в трехграннике Френе может быть закреплена неподвижно, либо же вращаться вокруг орта касательной при движении трехгранника по кривой. При закреплении плоскости в трехграннике неподвижно были получены огибающие полярные торсы и торсы, для которых направляющая кривая есть геодезическая. При вращении плоскости вокруг орта касательной и одновременном движении трехгранника по направляющей кривой построены торсы, прямолинейные образующие которых пересекают направляющую кривую. Найден закон вращения плоскости вокруг орта касательной для задаваемых условий конструируемой поверхности. В частности, такими условиями могут быть требования, чтобы направляющая кривая была линией кривизны огибающей поверхности, либо постоянство угла, под которым образующие поверхности пересекают направляющую кривую. Для всех образуемых поверхностей выведены параметрические уравнения и найдены

ребра возврата. Исходя из неизменности геодезической кривизны кривой при изгибании торса и углов между линиями, найдены развертки как поверхностей, так и их ребер возврата.

Ключевые слова: однопараметрическое множество плоскостей, развертываемая поверхность, направляющая кривая, трёхгранник Френе.

SUMMARY

Ananenko T. Constructing of bypass surfaces of one-parameter plural of planes and construction of their involutes. – *Manuscript*.

Dissertation on competition of scientific degree of the candidate of engineering science after speciality 05.01.01 – applied geometry, engineering graphics. – Kiev National University of Building and Architecture, Kyiv, Ukraine, 2012.

Dissertation is devoted to constructing of by-pass surfaces of one-parameter plural of planes, at which the plural of planes appears after the set law of the continuous moving of plane in space. The different laws of moving of plane and features of construction of involutes of compartments of the fold surface are considered. The parameter equalizations of fold surface and their ribs of turn are got both in space and on the involute. The basic considered methods of formation of one-parameter plural of planes is addition of two motions: rotatory motion of plane about axis and simultaneous moving of axis in space after the set law and addition of relative motion of plane in the system of three-edge of Frenet with his portable motion on the set sending curve.

Keywords: one-parameter plural of planes, fold surface, sending curve, three-edge of Frenet.