

Мова графів зв'язку в теорії управління

Олег Противень, магістр¹ (ORCID: 0009-0003-2337-6676)

¹ Київський національний університет будівництва і архітектури, 03037, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Україна

АНОТАЦІЯ

В роботі розглянуто підходи утворення передатних функцій. Наведено імпедансні та адмітансні передатні функції, які широко застосовуються в акустичних системах, та більш складні передатні функції, що є поєднанням, як мінімум двох графів із перехідними структурами. Представлені основні енергетичні змінні, які відповідають передатним функціям, та залежність для визначення частотної передатної функції, а також вираження її у вигляді логарифмічної спіралі.

Ключові слова: передатна функція, імпеданс, адмітанс, простір станів, графи зв'язку, швидкість, інерція, опір.

1. ВСТУП

Сучасна теорія віброзахисних систем базується на понятті простору стану [1]. Простір станів – це множина X , що складається з елементів $x(t)$, визначаються вектором $[X_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ для конкретної системи [2]. Наприклад, для динамічних систем механіки стан визначається парою змінних: координатою x і швидкістю v або переміщенням x , і імпульсом q , які утворюють так званий простір станів або фазовий простір [3], [4].

2. МЕТА РОБОТИ

Розглянути основні підходи утворення передатних функцій в теорії управління.

3. ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

У класичній теорії управління часто застосовується перетворення Лапласа як головний інструмент одержання передатних функцій [5]:

$$X(S) = \int_n^{\infty} x(t)e^{St} dt, S = \sigma + i\omega, \quad (1)$$

Це перетворення ставить в відповідність $x(t)$ функції дійсного змінного t функцію комплексного змінного $S = \sigma + i\omega$ (комплексної частоти) $X(s)$.

У найпростішому випадку, коли $y(s) = x(s)$ передатна функція перетворюється у функцію відгуку системи. $T(s) = x(s)/u(s)$.

Якщо енергетичні змінні e, f застосовувати так, щоб швидкість f була входом, а сила e є виходом, то визначення передатної функції можна використовувати для основних елементів мови графів зв'язку C, I, R .

$$T_C(s) = \frac{e(s)}{f(s)} = \frac{1}{sC} = Z_C - \text{опір}; T_I(s) = \frac{e(s)}{f(s)} = sI = Z_I -$$

пружність;

$$T_R(s) = \frac{e(s)}{f(s)} = R = s_R - \text{інерція.}$$

Такі відношення називаються імпедансними передатними функціям:

$$Z_C, Z_I, Z_R$$

У тому випадку, коли на вході системи задається сила e , а на виході швидкість f , передатні функції мають зворотну форму й називаються адмітансами.

$$Y_C = Z_C^{-1} = sC; Y_I = Z_I^{-1} = \frac{1}{sI}; Y_R = Z_R^{-1} = \frac{1}{R}, \quad (2)$$

Такі передатні функції широко застосовуються в акустичних системах, відповідно як комплексний опір і провідність. Мовою графів зв'язку передатним функціям відповідають основні енергетичні змінні, рис. 1.

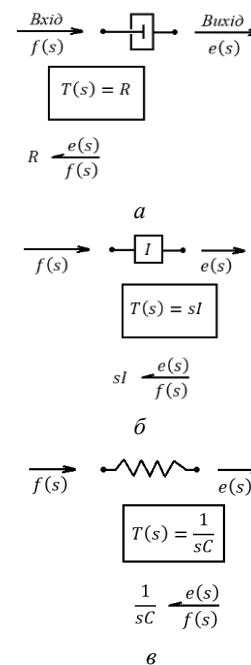


Рисунок 1. Основні енергетичні змінні: a – пропорційний елемент (опір); b – диференціальний елемент (інерція); c – інтегруючий елемент (пружність)

Мова графів зв'язку визначає фізичні властивості й енергетичні якості головних передатних функцій як концентраторів енергії.

Якщо об'єднати графи як мінімум двох елементів з перехідними структурами, то можна визначити більше складні передатні функції. Наприклад, при об'єднанні елементів інерції й опору з S – перехідною структурою загальної швидкості можна отримати функцію, яка в

зворотному адмітансному виді визначає аперіодичний елемент:

$$T_Y(S) = \frac{R^{-1}}{1 + s \frac{1}{R}}, \quad (3)$$

При об'єднанні елементів I і R з p структурою загальної сили:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{3} p \xrightarrow{1} sI \\ \downarrow 2 \\ R \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Новий} \\ \text{елемент} \end{array} \quad \begin{array}{l} p: e = e_1 = e_2 = e_3 \\ f_3 = f_2 + f_1 \\ e_3 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sI}\right)e. \end{array}$$

На основі чого отримаємо передатну функцію:

$$T_{Y(s)} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sI}\right), \quad (4)$$

В імпедансній формі передатна функція має вид:

$$T_{Z(s)} = \frac{sRI}{sI + R}; T_{Z(s)} = I \left(\frac{s}{1 + s \frac{1}{R}} \right). \quad (5)$$

Швидкість f або силу e можна представити в комплексній формі як функції комплексної частоти $s = \sigma + i\omega$. Тоді виникають два підходи: $s = \sigma (i\omega = 0)$ – тимчасова область; $s = i\omega (\sigma = 0)$ – частотна область. У цих областях можна розглядати входи, виходи й властивості передатних функцій (рис. 2).

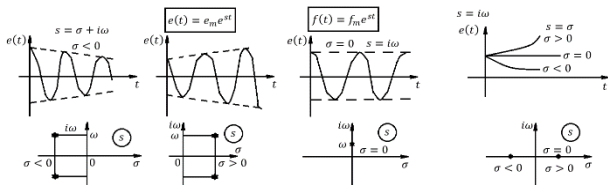


Рисунок 2. Входи, виходи і властивості передатних функцій

При подальшому перетворенні комбінації з базових енергетичних елементів мови графів зв'язку R, I, C и S, p перехідних структур створюється множина різноманітних передатних функцій. Одними з найважливіших є коливальні передатні функції, які обов'язково поєднують два енергетичних елементи концентрація I, C і мають вираження з S^2 , які відповідають диференціальним рівнянням другого порядку.

В загальному випадку, коли об'єднується велика кількість елементів, вираження для передатної функції будуть:

$$T_{(s)} = k \frac{N(s)}{M(s)} = k \frac{\prod^m (s + Z_m)}{\prod^n (s + p_n)}; T_{(i\omega)} = k \frac{\prod^m Z_m \left(1 + \frac{i\omega}{Z_m}\right)}{\prod^n p_n \left(1 + \frac{i\omega}{p_n}\right)}, \quad (6)$$

де Z_m – корні; $T_{(s)} \rightarrow p_n$ – полюси; $T_{(s)} \rightarrow \infty$.

Передатна функція $T(s)$ при заміні $s \rightarrow i\omega (\sigma = 0)$, тобто при розгляді періодичних процесів, перетворюється в частотну передатну функцію $T(i\omega)$. Ці функції характеризують сталі процеси, які відбуваються в системі після достатнього проміжку часу, коли перехідні процеси втрачають істотний вплив.

Функцію комплексного аргументу $T(i\omega)$ можна представити у двох видах – алгебраїчному й показовому:

$$T_{(i\omega)} = U_{(\omega)} + iV_{(\omega)} = A_{(\omega)} e^{i\varphi(\omega)} = A_{(\omega)} (\cos \varphi_{(\omega)} + i \sin \varphi_{(\omega)}), \quad (7)$$

де $U(\omega)$ – дійсна частотна характеристика; $V(\omega)$ – уявна частотна характеристика; $A(\omega)$ – амплітудно-частотна характеристика.

Графічно ці характеристики зображуються на комплексній площині iV і відображають амплітудно – фазову частотну характеристику системи управління.

Виходячи з показового визначення комплексної передатної частотної функції $T(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ і порівнюючи це вираження з формулою для логарифмічної спіралі в полярних координатах $p, \varphi, \rho = ae^{k\varphi}$ можна в загальному випадку представити вид передатної частотної функції як спіраль (рис. 3).

Логарифмічна спіраль $p = ae^{k\varphi}$ перетинає промені, що виходять з початку координат під однаковим кутом a , при цьому $k = ctg a$ спіраль вироджується в окружність.

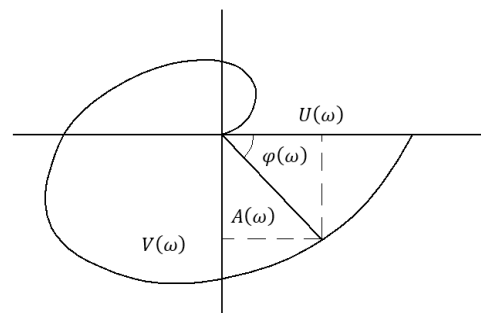


Рисунок 3. Логарифмічна спіраль

4. ВИСНОВОК

Застосування мови графів зв'язку дозволяє будувати моделі систем з різними якісними властивостями в просторі станів у вигляді систем лінійних або нелінійних рівнянь нормального виду. Розглянуто основні підходи утворення передатних функцій в теорії управління та їх властивості. Наведено рівняння для опису передатної функції в загальному вигляді.

Список літератури

- [1] Яковенко В. Б., Забродський М. М. Системне моделювання проектного розрахунку шокової дробарки з складним рухом шоки. *Техніка будівництва*. 2010. № 24, С. 67-76.
- [2] Назаренко І. І. Прикладні задачі теорії вібраційних систем. Київ: Слово, 2010. 407 с.
- [3] Сівко В. Й., Яковенко В. Б., Міщук Є. О. Дослідження режимів віброуцільнення бетону в касетних установках. *Техніка будівництва*. 2015. № 34. С. 30-33.
- [4] Яковенко В. Б., Дисик Д. Л. (). Організація структури даних прикріплених та глибоких вібраторів. *Техніка будівництва*. 2015. № 34, С. 74-80.
- [5] Яковенко В. Б. Міщук Є. О. (). Modeling of dynamic systems by method of bond graph. *Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету*. 2020. № 2(88), С. 31-36.