

УДК 539.3

Пошивач Д.В.,

Київський національний університет будівництва і архітектури

РОЗРАХУНОК ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ, ЗАНУРЕНОЇ У ПРУЖНЕ СЕРЕДОВИЩЕ, МЕТОДОМ ПЕРЕХРЕСНИХ ПРЯМИХ

Розглядається плоский напружений стан прямокутної пластини, зануреної у пружне середовище. Наведено формули для розрахунку такої пластини методом перехресних прямих. Наведено результати розв'язання числового прикладу.

Ключові слова: плоска задача теорії пружності, метод прямих, метод перехресних прямих, конструкція на пружній основі.

Плоский напружений стан описується системою рівнянь рівноваги в напруженнях:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + q_y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} — нормальні та дотичне напруження, q_x , q_y — горизонтальне та вертикальне навантаження, розподілені по об'єму пластини, сталі по товщині.

Вважатимемо, що пружне середовище діє на пластину реакцією у вигляді сил, розподілених по поверхнях пластини, паралельних до серединної площини, причому у відповідних точках протилежних поверхонь значення реактивних сил однакові. Таке навантаження на пластину може бути зведене до розподіленого по об'єму, сталого по товщині. Таким чином, загальне навантаження складається із зовнішнього, що його складові дорівнюють q_{ex} і q_{ey} , та реактивного, що його складові — q_{mx} і q_{my} :

$$q_x = q_{ex} + q_{mx},$$

$$q_y = q_{ey} + q_{my}.$$

Реактивне навантаження вважатимемо пропорційним переміщенню з однаковим коефіцієнтом пропорційності k_m в горизонтальному та вертикальному напрямках:

$$q_{mx} = -k_m u_x,$$

$$q_{my} = -k_m u_y,$$

де u_x , u_y — горизонтальне та вертикальне переміщення точок серединної площини пластини.

Отже, система (1) набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_{ex} - k_m u_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + q_{ey} - k_m u_y = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Застосуємо вирази напружень через переміщення у плоскому напруженому стані:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

де E і μ — модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу. Підставивши формули (3) у систему (2), отримаємо систему рівнянь рівноваги у переміщеннях:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} (q_{ex} - k_m u_x) = 0, \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + k_1 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} (q_{ey} - k_m u_y) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{де } k_1 = \frac{1-\mu}{2}, \quad k_2 = \frac{1+\mu}{2}.$$

Для розв'язання задачі методом перехресних прямих проведемо у площині

пластини два сімейства прямих, паралельних до сторін пластини (рис. 1).

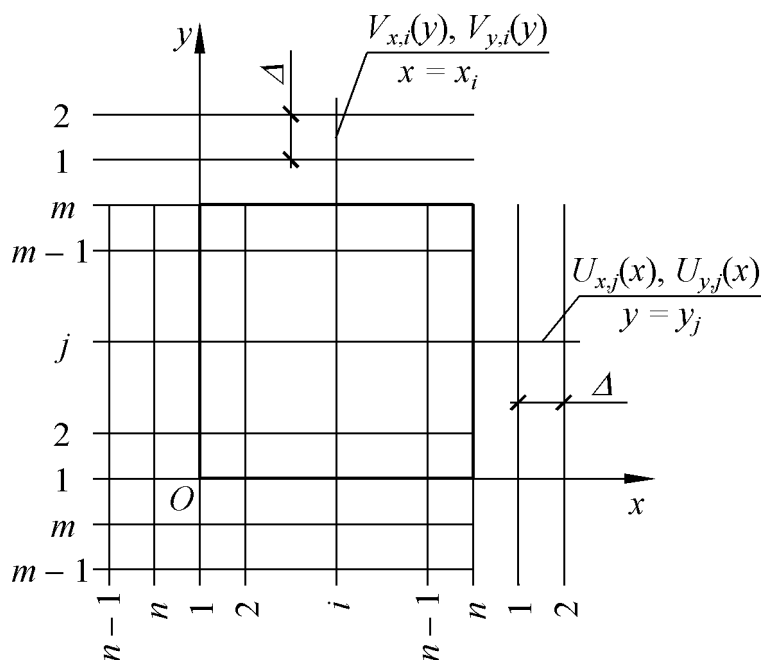


Рис. 1

Кожній j -й горизонтальній прямій, що має координату $y = y_j$, відповідатимуть невідомі функції $U_{x,j}(x)$ та $U_{y,j}(x)$, а кожній i -й вертикальній прямій ($x = x_i$) — $V_{x,i}(y)$ та $V_{y,i}(y)$. Шукану функцію горизонтального переміщення $u_x(x, y)$ замінимо векторами означених невідомих функцій однієї змінної

$$U_x(x) = [U_{x,1}(x), U_{x,2}(x), \dots, U_{x,m}(x)]^T, \tag{5}$$

$$V_x(y) = [V_{x,1}(y), V_{x,2}(y), \dots, V_{x,n}(y)]^T,$$

а функцію вертикального переміщення $u_y(x, y)$ — векторами

$$U_y(x) = [U_{y,1}(x), U_{y,2}(x), \dots, U_{y,m}(x)]^T, \tag{6}$$

$$V_y(y) = [V_{y,1}(y), V_{y,2}(y), \dots, V_{y,n}(y)]^T.$$

Функції (5) та (6) мають задовольняти рівняння (4) вздовж відповідних прямих, а в поперечному напрямку вектори (5) та (6) наближено задовольнятимуть рівняння (4) у скінченно-різницевого сенсі.

Наближені значення вихідних функцій переміщень можуть бути визначені через функції (5) та (6) у точках перетину прямих:

$$\begin{aligned} u_x(x_i, y_j) &= U_{x,j}(x_i) + V_{x,i}(y_j), \\ u_y(x_i, y_j) &= U_{y,j}(x_i) + V_{y,i}(y_j). \end{aligned} \tag{7}$$

Вектори $U_x(x)$ та $U_y(x)$, що складаються з функцій, визначених уздовж горизонтальних прямих, задовольняють такий скінченно-різницевий аналог системи рівнянь (4):

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_x(x)}{dx^2} + k_1 C_y^2 U_x(x) + k_2 C_y \frac{dU_y(x)}{dx} - \lambda^2 U_x(x) = -Q_x(x), \\ C_y^2 U_y(x) + k_1 \frac{d^2 U_y(x)}{dx^2} + k_2 C_y \frac{dU_x(x)}{dx} - \lambda^2 U_y(x) = -Q_y(x), \end{cases} \quad (8)$$

де $\lambda = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{E} k_m}$,

$Q_x(x)$, $Q_y(x)$ — вектори зведених навантажень.

У системі (8) збережено диференціювання по координаті x уздовж горизонтальних прямих, а диференціювання по поперечній координаті y замінено на відповідну скінченно-різницеву операцію, яка здійснюється за допомогою оператора C_y . Він є матрицею розмірності $m \times m$ такого виду:

$$C_y = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подвійне ж диференціювання замінено оператором $C_y^2 = C_y C_y$.

Аналогічно, вектори $V_x(y)$ та $V_y(y)$ функцій, визначених уздовж вертикальних прямих, задовольняють таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_x^2 V_x(y) + k_1 \frac{d^2 V_x(y)}{dy^2} + k_2 C_x \frac{dV_y(y)}{dy} - \lambda^2 V_x(y) = -P_x(y), \\ \frac{d^2 V_y(y)}{dy^2} + k_1 C_x^2 V_y(y) + k_2 C_x \frac{dV_x(y)}{dy} - \lambda^2 V_y(y) = -P_y(y), \end{cases} \quad (9)$$

де $P_x(y)$, $P_y(y)$ — вектори зведених навантажень,

C_x — оператор, яким замінено диференціювання по x , розмірності $n \times n$ такої ж структури, як C_y .

Диференціювання у скінченно-різницевій формі, здійснюване на контурі пластини та поблизу нього, може залучати законтурні прямі (рис. 1). Аби не

збільшувати кількість невідомих за рахунок відповідних законтурних функцій, прийнемо періодичний характер векторів (5) та (6). Вважатимемо, що

$$U_{x,m+j}(x) = U_{x,j}(x), \quad U_{y,m+j}(x) = U_{y,j}(x),$$

$$V_{x,n+i}(y) = V_{x,i}(y), \quad V_{y,n+i}(y) = V_{y,i}(y).$$

Ця особливість відображена у структурі операторів C_x та C_y .

Системи (8) та (9) розв'язуються аналогічно й окремо одна від одної. Спільно їхні розв'язки враховуються під час складання граничних умов, а також для остаточного визначення шуканих величин $u_x(x, y)$ та $u_y(x, y)$.

Розглянемо розв'язання системи (8). Матриця C_y^2 може бути представлена у вигляді

$$C_y^2 = -v_y \operatorname{diag}(\beta_{y,k}^2) v_y, \quad (10)$$

де

$$\beta_{y,k} = \frac{1}{\Delta} \sin \frac{2k\pi}{m}, \quad k=1, \dots, m,$$

v_y — матриця розмірності $m \times m$, елементи якої дорівнюють

$$v_{y,k,j} = \frac{\sqrt{m}}{m} \left(\sin \frac{2kj\pi}{m} + \cos \frac{2kj\pi}{m} \right).$$

Підставимо формулу (10) в систему (8):

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_x(x)}{dx^2} - k_1 v_y \operatorname{diag}(\beta_{y,k}^2) v_y U_x(x) + k_2 C_y \frac{dU_y(x)}{dx} - \lambda^2 U_x(x) = -Q_x(x), \\ -v_y \operatorname{diag}(\beta_{y,k}^2) v_y U_y(x) + k_1 \frac{d^2 U_y(x)}{dx^2} + k_2 C_y \frac{dU_x(x)}{dx} - \lambda^2 U_y(x) = -Q_y(x). \end{cases} \quad (11)$$

Розв'яжемо систему (11) засобами операційного числення. Позначимо $W_x(s)$ та $W_y(s)$ зображення функцій $U_x(x)$ та $U_y(x)$ відповідно. Тобто

$$U_x(x) \rightarrow W_x(s), \quad U_y(x) \rightarrow W_y(s).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{dU_x(x)}{dx} &\rightarrow sW_x(s) - U_x(0), \\ \frac{d^2 U_x(x)}{dx^2} &\rightarrow s^2 W_x(s) - sU_x(0) - U'_x(0), \\ \frac{dU_y(x)}{dx} &\rightarrow sW_y(s) - U_y(0), \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 U_y(x)}{dx^2} \rightarrow s^2 W_y(s) - sU_y(0) - U'_y(0),$$

де $U'_x(0) = \left. \frac{dU_x(x)}{dx} \right|_{x=0}$, $U'_y(0) = \left. \frac{dU_y(x)}{dx} \right|_{x=0}$. Перейдемо від диференціальних рівнянь (11) відносно функцій до алгебраїчних рівнянь відносно зображень цих функцій:

$$\begin{cases} s^2 W_x(s) - sU_x(0) - U'_x(0) - k_1 v_y \operatorname{diag}(\beta_{y,k}^2) v_y W_x(s) + \\ + k_2 C_y [sW_y(s) - U_y(0)] - \lambda^2 W_x(s) = -R_x(s), \\ -v_y \operatorname{diag}(\beta_{y,k}^2) v_y W_y(s) + k_1 [s^2 W_y(s) - sU_y(0) - U'_y(0)] + \\ + k_2 C_y [sW_x(s) - U_x(0)] - \lambda^2 W_y(s) = -R_y(s), \end{cases}$$

де $R_x(s)$, $R_y(s)$ — зображення функцій $Q_x(x)$ та $Q_y(x)$ відповідно.

Врахувавши таку властивість матриці v_y , що $v_y^{-1} = v_y$, тобто

$$v_y v_y = E_m,$$

де E_m — одинична матриця розмірності $m \times m$, і перегрупувавши доданки, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} v_y \operatorname{diag}(s^2 - k_1 \beta_{y,k}^2 - \lambda^2) v_y W_x(s) + k_2 C_y s W_y(s) = \\ = sU_x(0) + U'_x(0) + k_2 C_y U_y(0) - R_x(s), \\ k_2 C_y s W_x(s) + v_y \operatorname{diag}(k_1 s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2) v_y W_y(s) = \\ = k_1 [sU_y(0) + U'_y(0)] + k_2 C_y U_x(0) - R_y(s). \end{cases} \quad (12)$$

Розглянемо випадок, коли зовнішні навантаження q_{ex} та q_{ey} , розподілені по об'єму пластини, відсутні. Тоді $R_x(s) = R_y(s) = 0$. Розв'язавши систему (12), знайдемо

$$W_x(s) = v_y \operatorname{diag} \left(\frac{s^3 - [(1 + k_2) \beta_{y,k}^2 + \lambda^2 / k_1] s}{(s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2 / k_1)(s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2)} \right) v_y U_x(0) +$$

$$\begin{aligned}
 & + v_y \operatorname{diag} \left(\frac{k_1 s^2 - (\beta_{y,k}^2 + \lambda^2)}{k_1 (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2/k_1) (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2)} \right) v_y U'_x(0) - \\
 & - v_y \operatorname{diag} \left(\frac{k_2 (\beta_{y,k}^2 + \lambda^2)}{k_1 (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2/k_1) (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2)} \right) v_y C_y U_y(0) - \\
 & - v_y \operatorname{diag} \left(\frac{k_2 s}{(s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2/k_1) (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2)} \right) v_y C_y U'_y(0), \\
 W_y(s) = & - v_y \operatorname{diag} \left(\frac{k_2 (\beta_{y,k}^2 + \lambda^2/k_1)}{(s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2/k_1) (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2)} \right) v_y C_y U_x(0) - \\
 & - v_y \operatorname{diag} \left(\frac{k_2 s}{k_1 (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2/k_1) (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2)} \right) v_y C_y U'_x(0) + \\
 & + v_y \operatorname{diag} \left(\frac{k_1 s^3 + (\mu \beta_{y,k}^2 - k_1 \lambda^2) s}{k_1 (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2/k_1) (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2)} \right) v_y U_y(0) + \\
 & + v_y \operatorname{diag} \left(\frac{s^2 - k_1 \beta_{y,k}^2 - \lambda^2}{(s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2/k_1) (s^2 - \beta_{y,k}^2 - \lambda^2)} \right) v_y U'_y(0).
 \end{aligned}$$

З цих операторних виразів впливають такі функціональні вирази:

$$\begin{aligned}
 U_x(x) = & v_y \operatorname{diag} [f_{y,k,1}(x)] v_y U_x(0) + v_y \operatorname{diag} [f_{y,k,2}(x)] v_y U'_x(0) + \\
 & + v_y \operatorname{diag} [f_{y,k,3}(x)] v_y C_y U_y(0) + v_y \operatorname{diag} [f_{y,k,4}(x)] v_y C_y U'_y(0), \\
 U_y(x) = & v_y \operatorname{diag} [f_{y,k,5}(x)] v_y C_y U_x(0) + v_y \operatorname{diag} [f_{y,k,6}(x)] v_y C_y U'_x(0) + \\
 & + v_y \operatorname{diag} [f_{y,k,7}(x)] v_y U_y(0) + v_y \operatorname{diag} [f_{y,k,8}(x)] v_y U'_y(0),
 \end{aligned} \tag{13}$$

де $f_{y,k,1}(x) = \frac{k_1}{\lambda^2} \left[-\beta_{y,k}^2 \operatorname{ch}(x\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2/k_1}) + (\beta_{y,k}^2 + \lambda^2/k_1) \operatorname{ch}(x\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2}) \right],$

$$f_{y,k,2}(x) = \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{-\beta_{y,k}^2}{\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2/k_1}} \operatorname{sh} \left(x \sqrt{\beta_{y,k}^2 + \frac{\lambda^2}{k_1}} \right) + \sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2} \operatorname{sh} \left(x \sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2} \right) \right],$$

$$f_{y,k,3}(x) = \frac{\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2}}{\lambda^2} \left[-\sqrt{\frac{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2}{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2/k_1}} \operatorname{sh} \left(x \sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2/k_1} \right) + \operatorname{sh} \left(x \sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2} \right) \right],$$

$$f_{y,k,4}(x) = \frac{k_1}{\lambda^2} \left[-\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2/k_1}\right) + \operatorname{ch}\left(x\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2}\right) \right],$$

$$f_{y,k,5}(x) = \frac{k_1\beta_{y,k}^2 + \lambda^2}{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2} f_{y,k,3}(x),$$

$$f_{y,k,6}(x) = \frac{1}{k_1} f_{y,k,4}(x),$$

$$f_{y,k,7}(x) = \frac{1}{\lambda^2} \left[(\beta_{y,k}^2 + \lambda^2) \operatorname{ch}\left(x\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2/k_1}\right) - \beta_{y,k}^2 \operatorname{ch}\left(x\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2}\right) \right],$$

$$f_{y,k,8}(x) = \frac{k_1}{\lambda^2} \left[\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2/k_1} \operatorname{sh}\left(x\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \frac{\lambda^2}{k_1}}\right) - \frac{\beta_{y,k}^2}{\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2}} \operatorname{sh}\left(x\sqrt{\beta_{y,k}^2 + \lambda^2}\right) \right].$$

Аналогічним чином розв'язавши систему рівнянь (9), отримаємо

$$\begin{aligned} V_y(y) &= v_x \operatorname{diag}[f_{x,k,1}(y)] v_x V_y(0) + v_x \operatorname{diag}[f_{x,k,2}(y)] v_x V_y'(0) + \\ &+ v_x \operatorname{diag}[f_{x,k,3}(y)] v_x C_x V_x(0) + v_x \operatorname{diag}[f_{x,k,4}(y)] v_x C_x V_x'(0), \\ V_x(y) &= v_x \operatorname{diag}[f_{x,k,5}(y)] v_x C_x V_y(0) + v_x \operatorname{diag}[f_{x,k,6}(y)] v_x C_x V_y'(0) + \\ &+ v_x \operatorname{diag}[f_{x,k,7}(y)] v_x V_x(0) + v_x \operatorname{diag}[f_{x,k,8}(y)] v_x V_x'(0), \end{aligned} \quad (14)$$

де v_x — матриця розмірності $n \times n$, елементи якої дорівнюють

$$v_{x,k,i} = \frac{\sqrt{n}}{n} \left(\sin \frac{2ki\pi}{n} + \cos \frac{2ki\pi}{n} \right),$$

а функції $f_{x,k,1}(y), \dots, f_{x,k,8}(y)$ визначаються за тими ж формулами, що й $f_{y,k,1}(x), \dots, f_{y,k,8}(x)$, якщо в них $\beta_{y,k}$ замінити на

$$\beta_{x,k} = \frac{1}{\Delta} \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

За отриманими формулами вектори $U_x(x)$, $U_y(x)$, $V_x(y)$, $V_y(y)$ виражаються через вектори $U_x(0)$, $U_x'(0)$, $U_y(0)$, $U_y'(0)$, $V_x(0)$, $V_x'(0)$, $V_y(0)$, $V_y'(0)$, елементи яких мають бути знайдені з граничних умов.

Згідно з викладеною методикою було розв'язано задачу в числовому вигляді. Розглядалася пластина, розташована у вертикальній площині й занурена у пружне середовище (рис. 2). Сімейства горизонтальних та вертикальних прямих склалися з вісьмох прямих ($m = n = 8$) з кроком $\Delta = 1$ м. Товщина пластини $t = 0.4$ м, модуль пружності матеріалу пластини $E = 4 \cdot 10^7$ кПа, коефіцієнт Пуассона — $\mu = 0.2$, опір пружного середовища характеризувався параметром $\lambda = 0.05 \text{ м}^{-1}$. Вертикальні крайки пластини

закріплені від переміщень. На верхній крайці у вузлах сітки прямих прикладені зосереджені сили $F = 100\text{кН}$.

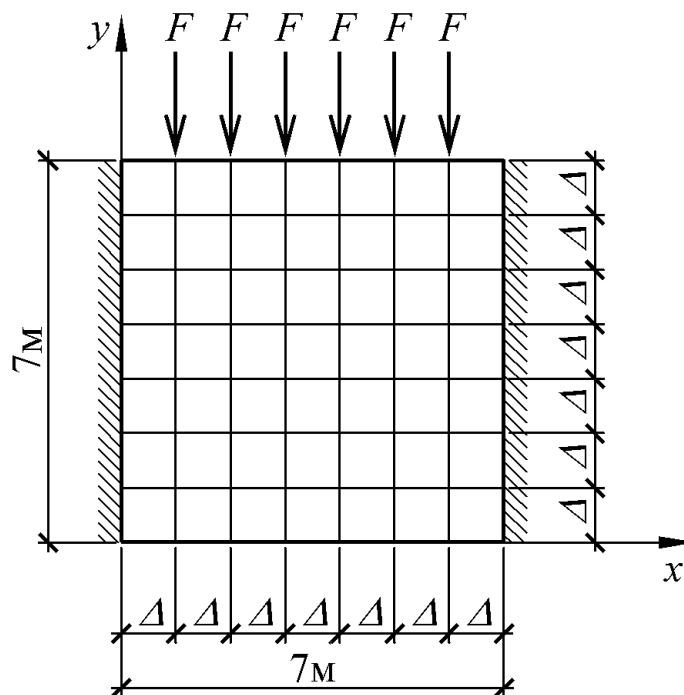


Рис. 2

Загальна кількість невідомих констант у формулах (13) і (14) становила $4(n + m) = 64$. Для їх визначення було складено систему відповідної кількості алгебраїчних рівнянь на підставі граничних умов. На вертикальних крайках відомі граничні умови у переміщеннях ($u_x = u_y = 0$), на горизонтальних — у напруженнях, наприклад, у точці прикладення зосередженої сили

$$\sigma_{yy} = \frac{-F}{t\Delta} = \frac{-100\text{кН}}{0.4\text{м} \cdot 1\text{м}} = -250\text{кПа}, \tau_{xy} = 0.$$

Граничні рівняння у переміщеннях склалися на основі формул (7). Для запису граничних умов у напруженнях та для подальшого остаточного визначення напружень використовувалися такі формули, отримані на підставі формул (3) та (7):

$$\sigma_{xx}(x_i, y_j) = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[\frac{dU_{x,j}(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{V_{x,i+1}(y_j) - V_{x,i-1}(y_j)}{2\Delta} + \mu \left(\frac{U_{y,j+1}(x_i) - U_{y,j-1}(x_i)}{2\Delta} + \frac{dV_{y,i}(y)}{dy} \Big|_{y=y_j} \right) \right],$$

$$\sigma_{yy}(x_i, y_j) = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[\frac{U_{y,j+1}(x_i) - U_{y,j-1}(x_i)}{2\Delta} + \frac{dV_{y,i}(y)}{dy} \Big|_{y=y_j} + \mu \left(\frac{dU_{x,j}(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{V_{x,i+1}(y_j) - V_{x,i-1}(y_j)}{2\Delta} \right) \right],$$

$$\tau_{xy}(x_i, y_j) = \frac{E}{2(1 + \mu)} \left(\frac{U_{x,j+1}(x_i) - U_{x,j-1}(x_i)}{2\Delta} + \frac{dV_{x,i}(y)}{dy} \Big|_{y=y_j} + \frac{dU_{y,j}(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{V_{y,i+1}(y_j) - V_{y,i-1}(y_j)}{2\Delta} \right).$$

Диференціальні оператори формул (3) застосовувалися до виразів (7) у сенсі методу прямих: диференціювання функцій однієї змінної вздовж відповідних прямих здійснювалося в аналітичній формі, а поперечно до прямих — у скінченно-різницевої формі.

На рис. 3, 4 показано деякі результати розрахунку, а саме епюри вертикального переміщення та вертикального нормального напруження.

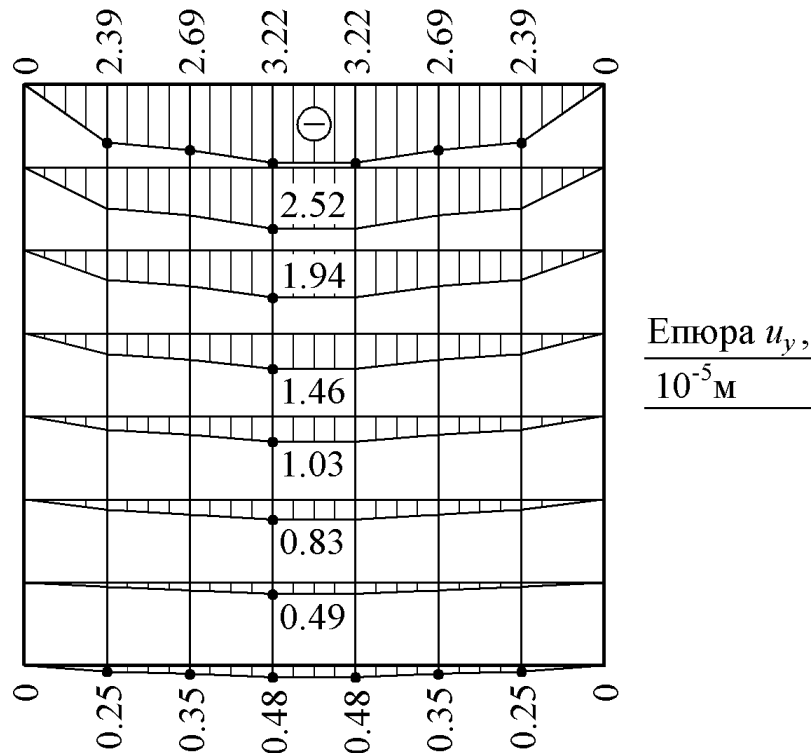


Рис. 3

Наведені результати мають вигляд, виправданий з точки зору фізичного змісту задачі (умов закріплення та навантаження, опору пружного середовища).

Отже, метод перехресних прямих принципово дозволяє розраховувати плоский напружений стан прямокутних пластин з урахуванням додаткових чинників, які змінюють вигляд вихідного диференціального рівняння задачі.

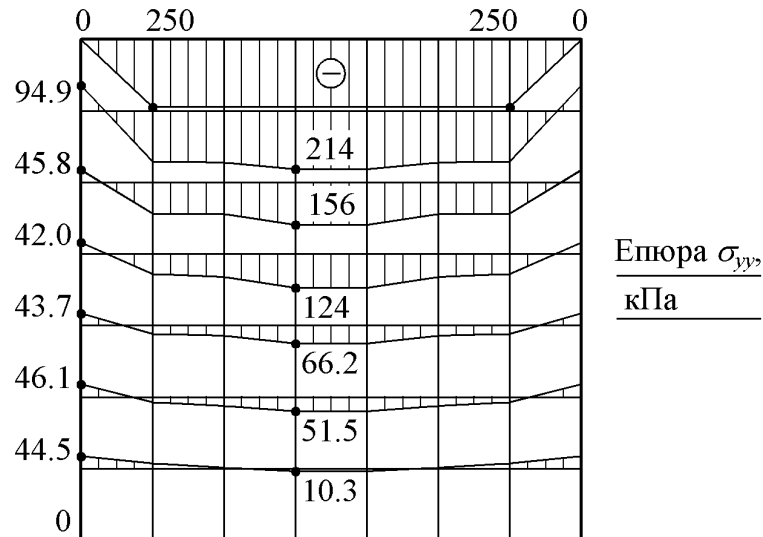


Рис. 4

Література

1. Шкелёв Л.Т. Метод прямых и его использование при определении напряжённого и деформированного состояний пластин и оболочек: Монография / Л.Т. Шкелёв, Ю.А. Морсков, Т.А. Романова, А.Н. Станкевич. — К.: НАНУ, Институт механики им. С. П. Тимошенко, Технический центр, 2002. — 177 с.

2. Шкелёв Л.Т. Применение метода прямых для определения напряжённого и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов: Монография / Л. Т. Шкелёв, А.Н. Станкевич, Д.В. Пошивач, А.Ф. Корбаков. — К.: КНУСА, 2004. — 136 с.

Аннотация

Рассматривается плоское напряжённое состояние прямоугольной пластины, помещённой в упругую среду. Даны формулы для расчёта такой пластины методом перекрёстных прямых. Приведены результаты решения численного примера.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, метод прямых, метод перекрёстных прямых, конструкция на упругом основании.

Annotation

Plane stress of a rectangular plate in an elastic continuum is considered. The formulas are given for calculation of such plate with the method of crossed lines. Results of a numerical example are given.

Keywords: plane problem in the theory of elasticity, method of lines, method of crossed lines, structure on elastic foundation.