

УДК 519.21

канд. ф-м. наук, доц. Наголкіна З.І.,

Київський національний університет будівництва і архітектури

ОДНА МОДЕЛЬ ВПЛИВУ ВИПАДКОВИХ ФАКТОРІВ НА ДЕЯКІ ФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ

Розглядаються диференціальні рівняння параболічного і гіперболічного типу з випадковою неоднорідністю. Такі рівняння моделюють вплив випадкових факторів на фізичні процеси. Зведення їх до еволюційних рівнянь в відповідних функціональних просторах дає змогу застосувати теорію напівгруп до їх дослідження. Розв'язки цих рівнянь є випадковими процесами. Отримано оцінку математичного сподівання такого процесу.

Ключові слова. Рівняння параболічного типу, рівняння гіперболічного типу, напівгрупа операторів, розрішаючий оператор, стохастичне рівняння, випадкова неоднорідність, функціональний простір, гільбертів простір, випадковий процес, резольвента оператора, розв'язок рівняння, математичне сподівання.

В задачах, пов'язаних з надійністю будівельних споруд виникає необхідність враховувати зовнішні випадкові фактори, що впливають на процеси дифузії, теплопровідності і коливання. Ці фізичні процеси описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних параболічного і гіперболічного типу. В даній роботі запропонована така математична модель, яка враховує випадковість у вигляді неоднорідного члена в відповідному диференціальному рівнянні.

Розглянемо в деякому функціональному просторі диференціальне рівняння в загальному вигляді і задачу Коші для нього.

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + F(t, \xi(t, \omega)), u(0) = u_0 \quad (1)$$

Це рівняння для функції $u(t, x) \in H$, H - нескінченно вимірний гільбертів простір, $t \in [0, T]$ - змінна, яка характеризує час. При кожному t функція $u_t(x) = f(x) \in H$. $\xi(t, \omega)$ - випадковий процес, який заданий на імовірносному просторі (Ω, F, P) і стандартним чином узгоджений з потоком σ -алгебр $F_t \in F$, породжених вінеровським процесом $w(t)$. Значеннями $\xi(t) \in H$, де H дійсний сепарабельний гільбертів простір. Цей процес описується стохастичним рівнянням вигляду

$$\xi(t) = x + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t b(s, \xi(s)) d\omega(s) \quad (2)$$

розглянуто в [1]. Там же сформульовані умови на коефіцієнти $a(s, x), b(s, x)$, при яких існує єдиний, з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок цього рівняння, який задовольняє нерівності

$$E\|\xi(t)\|_H^2 \leq e^{kt} \|x\|_H^2 + k_1 t \quad (3)$$

Сталі k, k_1 залежать від відповідних оцінок на коефіцієнти рівняння (2).

Згідно з теорії еволюційних рівнянь в функціональному банаховому, або в гільбертовому просторі розв'язок задачі Коші є

$$u(t) = V(t)u_0 + \int_0^t V(t-s)F(s, \xi(s))ds \quad (4)$$

Де оператор A -замкнений визначений на $D_A \subset H$. Резольвента оператора A задовольняє умові $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \mu}$, тоді, як відомо [2] оператор A породжує в H сильно неперервну напівгрупу обмежених операторів $V(t)$, яка має оцінку

$$\|V(t)x\|_H \leq e^{\mu t} \|x\|_H, (\operatorname{Re} \lambda > \mu) \quad (5)$$

Якщо функція $F(t, x) \in H$ неперервна по t і лінійно обмежена по x , то можна вважати, що $\|F(t, x)\| \leq c\|x\|$ і враховуючи оцінку (3) оцінити середнє розв'язку рівняння (1)

$$E\|u(t)\|_H^2 \leq K e^{\beta t} + K_1 t \quad (6)$$

де K, K_1 залежить від $T, \|\mu_0\|, k$ а β від k_1, g . Далі, за теоремою Чебишева можна знайти імовірність перевищення значенням $u(t)$ певної припустимої межі.

В якості конкретного прикладу застосування цієї ідеології розглянемо рівняння параболічного типу – рівняння теплопровідності вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(\xi(t)), \quad u(t, x)|_{t=0} = u_0. \quad (7)$$

Введемо позначення $Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Розглянемо процес теплопровідності в стержні довжини l з теплоізолюваними кінцівками а саме $u(t, 0) = u(t, l) = 0$. Тоді гільбертів простір $\in L^2[0, l] = H$. Як показано в [3] оператор A в цьому просторі

можна подовжити до самоспряженого. Оскільки для скалярного добутку в $L^2[0, l]$ має місце $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$. Область визначення оператора D_A - множина двічі неперервно диференційованих функцій. Як відомо [2] резольвента оператора має оцінку $\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda+1}$.

Відповідно полугрупа операторів, що породжується задачею Коші в H має оцінку $\|V(t)u_0\| \leq e^{-t}\|u_0\|$. Розв'язок рівняння (7) має оцінку типу (6).

В якості другого прикладу розглянемо рівняння гіперболічного типу – хвильове рівняння і задачу Коші для нього

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(\xi(t)), u(t, x)|_{t=0} = u_0, u_t(t, x)|_{t=0} = u'_0 \quad (8)$$

Будемо розглядати коливання обмеженого стержня з закріпленими кінцівками – тобто з додатковими умовами $u(t, 0) = u(t, l) = 0$. Тоді, аналогічно попередньому $H = L^2[0, l]$. Зведемо рівняння другого порядку (8) до системи диференціальних рівнянь в відповідному просторі H . Позначимо $\frac{du}{dt}$

Тоді матимемо таку систему

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = Au + F(\xi(t)) \end{cases} \quad u(0, x) = u_0, v(0, x) = u'_0 \quad (9)$$

Цю систему можна записати в векторно-матричному вигляді. А саме

$$\frac{dz}{dt} = Bz + F \quad (10)$$

Де вектор $z = \begin{bmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{bmatrix}$, матриця $B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix}$, вектор $F = \begin{bmatrix} 0 \\ F(\xi(t)) \end{bmatrix}$. Початкові умови $z(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{bmatrix}$. Вектор $z \in Z$, де $Z = H \times H_1$. Відповідно норма в цьому просторі визначається $\|z\|_Z = \|u\|_H + \|v\|_{H_1}$. В [4] дана оцінка резольвенти оператора B і доведено існування групи $V(t)$ розрешаючих операторів задачі Коші (9), (10) в відповідному просторі. Для цієї групи має місце оцінка $\|V(t)z\| \leq e^{\mu t} \|z\|$.

Таким чином в просторі Z для розв'язку рівняння (10) справедлива оцінка аналогічна (6).

Література.

[1]. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. - М.: Наука, 1983. – 384 с.

- [2]. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967. - 465 с.
- [3]. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. - М.: Мир, 1985. - 376 с.
- [4]. Йосида К. Функциональный анализ. - М.: Мир, - 624 с.

Аннотация

Рассматриваются дифференциальные уравнения параболического и гиперболического типа со случайной неоднородностью. Такие уравнения моделируют влияние случайных факторов на физические процессы. Сведение их к эволюционным уравнениям в соответствующих пространствах дает возможность использовать теорию полугрупп для исследования их решений, которые являются случайными процессами. Получена оценка математического ожидания такого процесса.

Annotation

Differential equations of parabolic and hyperbolic types with random nonhomogeneous are considered. These equations model the influence of random factors on physical processes. Their interpretation to the appropriate evolution equations in functional spaces support possibility to apply the theory to their semigroup. Solution of these equations is a random process. One obtained some estimation mathematical expectation of this process.

Key words: equation parabolic type, hyperbolic equations, semigroup operators, solvable operator, stochastic equations, random nonhomogeneous functional space, Hilbert space, random process, resolvent operator, solution equation, mathematical expectation.