DOI: https://doi.org/10.32347/2077-3455.2020.57.54-61
УДК 514.18 (043.3)
Мостовенко Александр Владимирович,
докторант кафедры начертательной геометрии и инженерной графики Киевского национального университета строительства и архитектуры,
a.mostovenko25@gmail.com
orcid.org/ 0000-0002-3423-4126

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СПОСОБОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Аннотация: в задачах дискретного моделирования, например, при решении дифференциальных уравнений методом конечных разностей, точность решения задачи зависит от шага дискретизации [1]. С увеличением шага точность исследований снижается, а при уменьшении – повышается. Однако, уменьшение шага с одной стороны ведёт к увеличению числа конечноразностных уравнений, а с другой стороны – при неограниченном уменьшении шага возникает ситуация, когда погрешность округления коэффициентов в конечноразностных уравнениях превышает погрешность дискретизации. Каждое решение с уменьшением шага дискретизации даёт более точный результат, который монотонно изменяется, приближаясь к точному значению.

Если шаг дискретизации представить как некоторую величину (длину), то при числе делений, стремящемся к бесконечности, шаг стремится к нулю. Во многих работах эта зависимость представляется в виде равносторонней гиперболы, оси которой параллельны координатным осям декартовой системы координат (рис. 1), где вдоль оси абсцисс откладывается шаг дискретизации, а вдоль оси ординат – результат решения задачи.

Ключевые слова: погрешность, дискретное моделирование, гипербола, интерполяция, экстраполяция, шаг дискретизации, результат решения, параметр.

Постановка проблемы. При решении задач дискретного моделирования, например, при решении дифференциальных уравнений методом конечных разностей, точность решения задачи зависит от шага дискретизации. С увеличением шага точность исследований снижается, а при уменьшении – повышается. Однако, уменьшение шага с одной стороны ведёт к увеличению числа конечноразностных уравнений, а с другой стороны – при неограниченном уменьшении шага возникает ситуация, когда погрешность округления коэффициентов в конечноразностных уравнениях превышает погрешность дискретизации.

Во многих случаях понятие экстраполяции употребляется в качестве противопоставления понятию интерполяции. Однако, поскольку задачи экстраполяции функций решаются методами интерполяции, оба класса задач были объединены в одну проблему интерполяции. Поэтому данное исследование рассматривается как отдельный случай интерполяции.

Формулирование целей статьи. Целью данного исследования является создание геометрического аппарата, позволяющего оценивать погрешность дискретного моделирования способом гиперболической интерполяции с бесконечно малым шагом дискретизации при трёх заданных значениях результатов решения задачи.

Анализ последних исследований. Известно [1, 2], что анализ погрешностей, которые возникают в численных результатах решения задач, является обязательной частью любого приближенного вычисления. Во многих работах эта зависимость представляется в виде равносторонней гиперболы.

Во многих случаях понятие экстраполяции употребляется в качестве противопоставления понятию интерполяции [3]. Однако, поскольку задачи экстраполяции функций решаются методами интерполяции, оба класса задач были объединены в одну проблему интерполяции [4].

Основная часть. В задачах дискретного моделирования, например, при решении дифференциальных уравнений методом конечных разностей, точность решения задачи зависит от шага дискретизации [1]. С увеличением шага точность исследований снижается, а при уменьшении – повышается. Однако, уменьшение шага с одной стороны ведёт к увеличению числа конечноразностных уравнений, а с другой стороны – при неограниченном уменьшении шага возникает ситуация, когда погрешность округления коэффициентов в конечноразностных уравнениях превышает погрешность дискретизации. Каждое решение с уменьшением шага дискретизации даёт более точный результат, который монотонно изменяется, приближаясь к точному значению.

Если шаг дискретизации (h) представить как некоторую величину (длину), разделённую на

$$h = \frac{l}{n}$$

частей, то при $n \to \infty$ $h \to 0.$

Во многих работах эта зависимость представляется в виде равносторонней гиперболы m (рис. 1):

$$y = \frac{c^2}{2(x+p)} + q, \qquad (1)$$

где c – длина действительной полуоси гиперболы;
p, q – координаты центра гиперболы.

Оси гиперболы (1) параллельны координатным осям декартовой системы координат (рис. 1), где вдоль оси абсцисс откладывается шаг h, а вдоль оси ординат – результат решения задачи.

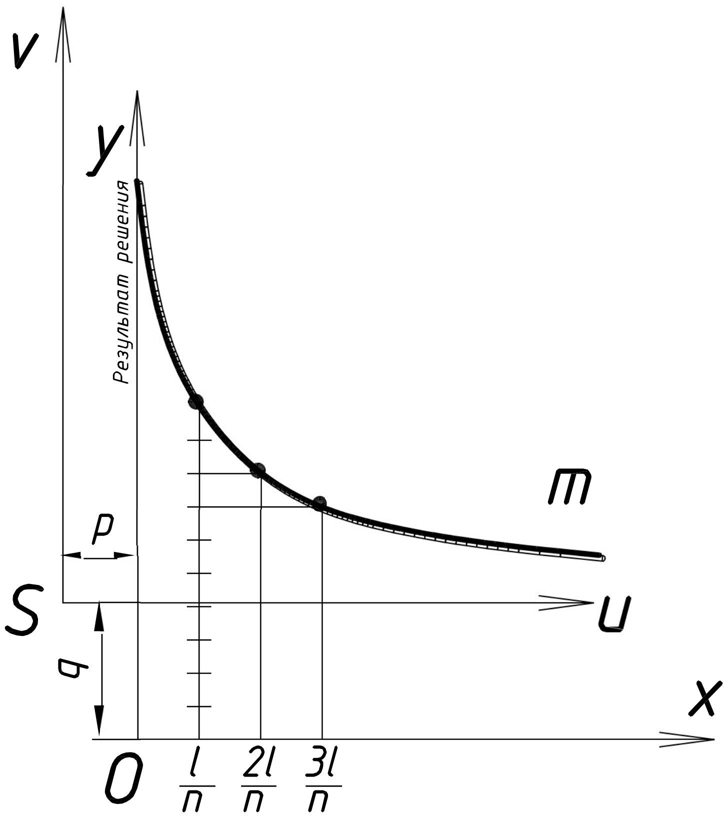

Рис. 1

Равносторонняя гипербола выбирается для того, чтобы обеспечить взаимно-однозначное соответствие между точками координатных осей.

Гипербола (1) имеет три свободных параметра: p, q и c, что позволяет проводить её через три точки, являющиеся результатами трёх решений задачи при различном шаге.

Параметры p, q и c определяются при решении системы линейных уравнений, если в уравнение (1) поочерёдно подставить координаты известных точек $A\ (x_A,y_A)$, $B\ (x_B,y_B)$ и $C\ (x_C,y_C)$:

$$\begin{aligned} &2x_A y_A - 2qx_A - 2py_A - c^2 + 2pq = 0; \\ &2x_B y_B - 2qx_B - 2py_B - c^2 + 2pq = 0; \\ &2x_C y_C - 2qx_C - 2py_C - c^2 + 2pq = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В результате решения системы (2) определяем положение асимптоты, которая параллельна оси *Ox*:

$$q = \frac{-x_A y_A (y_C - y_B) + x_B y_B (y_C - y_A) - x_C y_C (y_B - y_A)}{-x_A (y_C - y_B) + x_B (y_C - y_A) - x_C (y_B - y_A)}. \quad (3)$$

Величина q является искомым результатом решения задачи с бесконечно малым шагом дискретизации, когда $n \to \infty$.

По сути, описанный способ не является решением задачи интерполяции, поскольку поиск значения функции за пределами интервала между заданными точками, а именно ордината бесконечно удалённой точки интерполянта, является задачей экстраполяции.

Во многих случаях понятие экстраполяции употребляется в качестве противопоставления понятию интерполяции [3]. Однако, поскольку задачи экстраполяции функций решаются методами интерполяции, оба класса задач были объединены в одну проблему интерполяции [4]. Поэтому данное исследование рассматривается как отдельный случай интерполяции.

Пример.

Пусть результатом решения задачи с шагом дискретизации *l/n* является 10 условных единиц; с шагом *2l/n* – 8 у.е.; с шагом *3l/n* – 7 у.е. (рис. 1).

Подставляя координаты точек *A*, *B* и *C* поочерёдно в (3) определяем асимптоту *Su* гиперболы:

$$q=4.$$

Выводы. Результатом данного исследования является создание геометрического аппарата, который позволяет оценивать погрешность дискретного моделирования способом гиперболической интерполяции с бесконечно малым шагом дискретизации при трёх заданных значениях результатов решения задачи.

Перспективным направлением этого исследования представляется увеличение числа свободных параметров гиперболической зависимости, позволяющей учитывать больше трёх результатов решения задачи в дискретном виде.

Литература

1. Корн Г., Корн Е. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Е. Корн. - М.: Издательство «Наука», 1968. – 720 с.

2. Daniel D. McCracken, William S. Dorn. Numerical Methods And Fortrain Programming // John Wiley & Sons, New York-London-Sydney: Halsted Press: Willey International Edition, Second Printing, 1965. – 584 p.

3. Математическая энциклопедия. Т.5 / Изд. Советская энциклопедия: М.: 1985. – с. 954 – 955.

4. Математическая энциклопедия. Т.2 / Изд. Советская энциклопедия: М.: 1979. – с. 618.

5. Ковальов С. М. Вплив відстаней між точками інтерполянта та заданими точками на його форму [Текст] / С. М. Ковальов, О. В. Мостовенко // Управління розвитком складних систем. – 2019. - №37. – С. 78 – 82.

6. Ковалёв С.Н. Интерполяция точек на плоскости с учётом коэффициентов влияния заданных точек / С. Н. Ковалёв, А. В. Мостовенко // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2018.– Вип. 13. – С. 69-75.

7. Ковальов С. М., Гумен М. С., Пустюльга С. І., Михайленко В. Є. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1 / С. М. Ковальов, М .С . Гумен, С. І. Пустюльга, В .Є. Михайленко, Бурчак І. Н./ - Луцьк: ЛДТУ, 2006. – 256 с.

8. Сергейчук О. В. Геометричне моделювання фізичних процесів при оптимізації форми енергоефективних будинків. Дис…д. техн. наук: 05.01.01. [Текст]:/ О. В. Сергейчук - К.: КНУБА, 2008. 425 с.

9. Скочко В. І. Спеціальні геометричні моделі процесів, що розвиваються в суцільному середовищі: дис…к. техн. наук: 05.01.01. [Текст]:/ В. І. Скочко - К.: КНУБА, 2012. – 269 с.

10. Арнольд В. И. Математические основы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.

11. Скочко В.І. Пошук містків холоду у вузлах будівельної конструкції на основі спеціальних інтерполяційних функцій / В. І. Скочко / Науково-технічний збірник Енергоефективність в будівництві та архітектурі. Випуск 4. Відповідальний редактор П. М. Куліков. – К.: КНУБА, 2013 р. – с. 259 – 264.

12. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М. Наука, 1981.- 344 с.

13. Энциклопедия элементарной математики. Книга V. Геометрия. / Гос. изд. технико-теоретической литературы.: М. - Л., 1962. – 458 с.

Reference

1. Korn H.,Korn E. Spravochnyk po matematyke dlia nauchnykh rabotnykov y ynzhenerov / H. Korn, E. Korn. - M.: Yzdatelstvo «Nauka», 1968. – 720 s. (in Russian)

2. Daniel D. McCracken, William S. Dorn. Numerical Methods And Fortrain Programming // John Wiley & Sons, New York-London-Sydney: Halsted Press: Willey International Edition, Second Printing, 1965. – 584 p. (in English)

3.Matematycheskaia эntsyklopedyia. T.5 / Yzd. Sovetskaia эntsyklopedyia: M.: 1985. – s. 954 – 955. (in Russian)

4.Matematycheskaia эntsyklopedyia. T.2 / Yzd. Sovetskaia эntsyklopedyia: M.:1979. – s. 618. (in Russian)

5.Kovalov S. M. Vplyv vidstanei mizh tochkamy interpolianta ta zadanymy tochkamy na yoho formu [Tekst] / S. M. Kovalov, O. V. Mostovenko // Upravlinnia rozvytkom skladnykh system. – 2019. - №37. – S. 78 – 82. (in Ukrainian)

6.Kovalev S.N. Ynterpoliatsyia tochek na ploskosty s uchëtom koэffytsyentov vlyianyia zadannykh tochek / S. N. Kovalёv, A. V. Mostovenko // Suchasni problemy modeliuvannia: zb. nauk. prats. – Melitopol: Vydavnytstvo MDPU im. B. Khmelnytskoho, 2018.– Vyp. 13. – C. 69-75. (in Russian)

7. Kovalov S. M., Humen M. S., Pustiulha S.I., Mykhailenko V.Ie. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Spetsialni rozdily. Vypusk 1 / S. M. Kovalov, M. S. Humen, S. I. Pustiulha, V .Ie. Mykhailenko, Burchak I. N./ - Lutsk: LDTU, 2006. – 256 s. (in Ukrainian)

8. Serheichuk O. V. Heometrychne modeliuvannia fizychnykh protsesiv pry optymizatsii formy enerhoefektyvnykh budynkiv. Dys…d. tekhn. nauk: 05.01.01. [Tekst]:/ O. V. Serheichuk - K.: KNUBA, 2008. 425 s. (in Ukrainian)

9. Skochko V. I. Spetsialni heometrychni modeli protsesiv, shcho rozvyvaiutsia v sutsilnomu seredovyshchi: dys…k. tekhn. nauk: 05.01.01. [Tekst]:/ V. I. Skochko - K.: KNUBA, 2012. – 269 s. (in Ukrainian)

10. Arnold V. Y. Matematycheskye osnovy klassycheskoi mekhanyky. M.: Nauka, 1974. 432 s. (in Russian)

11. Skochko V.I. Poshuk mistkiv kholodu u vuzlakh budivelnoi konstruktsii na osnovi spetsialnykh interpoliatsiinykh funktsii / V. I. Skochko / Naukovo-tekhnichnyi zbirnyk Enerhoefektyvnist v budivnytstvi ta arkhitekturi. Vypusk 4. Vidpovidalnyi redaktor P. M. Kulikov. – K.: KNUBA, 2013 r. – s. 259 – 264. (in Ukrainian)

12. Hylbert D., Kon-Fossen S. Nahliadnaia heometryia. – M. Nauka, 1981.- 344 s. (in Russian)

13. Entsyklopedyia elementarnoi matematyky. Knyha V. Heometryia. / Hos. yzd. tekhnyko-teoretycheskoi lyteratury.: M. - L., 1962. – 458 s. (in Russian)

Анотація

Мостовенко Олександр Володимирович, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерной графіки Київського національного університета будівництва та архітектури.

Оцінка похибки дискретного моделювання способом гіперболічної інтерполяції.

У задачах дискретного моделювання, наприклад, при вирішенні диференціальних рівнянь методом скінчених різниць, точність вирішення задачі залежить від кроку дискретизації [1]. Зі збільшенням кроку точність досліджень знижується, а при зменшенні - підвищується. Однак, зменшення кроку з одного боку веде до збільшення числа скінчено-різницевих рівнянь, а з іншого боку при необмеженому зменшенні кроку виникає ситуація, коли похибка округлення коефіцієнтів в скінчено-різницевих рівняннях перевищує похибку дискретизації. Кожне вирішення зі зменшенням кроку дискретизації дає більш точний результат, який монотонно змінюється, наближаючись до точного значення.

Якщо крок дискретизації уявити як деяку величину (довжину), то при числі ділень, що прямує до нескінченності, крок прямує до нуля. У багатьох роботах ця залежність представляється у вигляді рівносторонньої гіперболи, осі якої паралельні координатним осям декартової системи координат (рис. 1), де вздовж осі абсцис відкладається крок дискретизації, а вздовж осі ординат - результат вирішення задачі.

Ключові слова: похибка, дискретне моделювання, гіпербола, інтерполяція, екстраполяція, крок дискретизації, результат вирішення, параметр.

Annotation

Mostovenko Aleksandr, candidate of technical sciences of department of descriptive geometry and engineering graphics in Kyiv National University of Construction and Architecture.

Evaluation of the error of discrete modeling by the method of hyperbolic interpolation.

In discrete modeling problems, for example, when solving differential equations by the finite difference method, the accuracy of solving the problem depends on the sampling step [1]. With an increase in the step, the accuracy of studies decreases, and with a decrease, it increases. However, decreasing the step on the one hand leads to an increase in the number of finite difference equations, and on the other hand, with an unlimited decrease in the step, a situation arises when the rounding error of the coefficients in the finite difference equations exceeds the

sampling error. Each solution with a decrease in the sampling step gives a more accurate result, which monotonically changes, approaching the exact value.

If the sampling step is represented as a certain quantity (length), then with the number of divisions tending to infinity, the step tends to zero. In many works, this dependence is represented as an equilateral hyperbole, whose axes are parallel to the coordinate axes of the decartesian coordinate system (Fig. 1), where the sampling step is plotted along the abscissa axis, and the result of solving the problem along the ordinate axis.

An equilateral hyperbole is chosen in order to ensure a one-to-one correspondence between the points of the coordinate axes.

Hyperbola has three free parameters: p, q, and c, which allows it to be drawn through three points that are the results of three solutions to the problem at different steps.

The parameters p, q, and c are determined when solving a system of linear equations, if the coordinates of known points are alternately substituted into equation of hyperbolae.

As a result of solving system, we determine the position of the asymptote, which is parallel to the axis Ox.

The quantity q is the desired result of solving the problem with an infinitesimal sampling step.

In fact, the described method is not a solution to the interpolation problem, since the search for the value of the function outside the interval between the given points, namely the ordinate of the infinitely distant point of the interpolant, is an extrapolation task.

Keywords: error, discrete modeling, hyperbola, interpolation, extrapolation, sampling step, solution result, parameter.