

УДК 514.18

д.т.н., проф. Плоский В. О.,  
аспірант Скочко В. І.,

Київський Національний Університет Будівництва і Архітектури

## ВИЗНАЧЕННЯ НДС РІДКОГО ДІЕЛЕКТРИКА ПІД ДІЄЮ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ

*В даній роботі розглядається дія пондеромоторних (механічних) сил електростатичного поля на середовище (діелектрик) із слабо вираженими пружними властивостями, такими як рідини, наприклад.*

**Постановка проблеми.** При вирішенні задач сучасного промислового та будівельного виробництва, а також при проведенні експериментальних (практичних) і теоретичних досліджень речовин та матеріалів, що застосовуються в прикладних задачах, виникає потреба у визначенні напружено-деформованого стану (НДС) цих матеріалів під дією заданих навантажень. У такому випадку необхідне створення математичних моделей, застосування яких дає можливість змоделювати та спрогнозувати опір даного матеріалу заданому навантаженню. Складним різновидом навантаження, вплив якого проаналізувати важко, є силове поле електричного обладнання. НДС матеріалів (середовищ), що перебувають під дією електричного силового поля, може мати велике значення у вирішенні задач тепломасопереносу, гальваностегії, гідравліки і т. п. Прикладом таких задач є моделювання процесу сушки бетону в електричному полі. Складність процесу полягає у його динамічності, оскільки (навіть при статичному струмі) загальний вплив на бетон виявляється у суперпозиції декількох польових структур: 1) поле напруженості, яке характеризує напрямок проходження електричного струму через тіло конструкції та спричиняє силове поле, що безпосередньо діє на матеріал механічними силами; 2) теплове поле електричних джерел (системи катодів та анодів), що викликає теплообмін між електропрогрівачами та бетоном; 3) теплове поле екзотермічної реакції твердіння та перетворення електричної енергії поля напруженості в тепло. Ці польові структури залежать одна від одної та змінюють свої показники із плином часу [8].

**Аналіз основних досліджень та публікацій.** Найпоширенішими методами моделювання НДС матеріалів є дискретні чисельні методи, наприклад: метод скінченних елементів, метод скінченних різниць [1], статико-геометричний метод (СГМ) формування дискретних образів [1, 5]. Алгоритм застосування СГМ для визначення НДС довільного пружного середовища було

висвітлено у роботі [5]. Вплив складних польових структур, породжених електричним струмом, на середовище було проаналізовано в роботі [7].

**Основна частина.** На відміну від пружного матеріалу рідина майже не стискається та не розтягується. Така властивість є наслідком дуже високої концентрації молекул рідин у одиниці об'єму. А тому обмежена по об'єму рідина, яка піддається дії сторонніх сил, намагається повністю передати усе навантаження на більш пружний матеріал, що знаходиться в найближчій області у будь-якому напрямку. Проте незважаючи на це, поняття НДС можна застосовувати по відношенню до рідких середовищ. Це пояснюється тим, що, внаслідок теплового руху молекул, окремі елементи загального об'єму рідини (в області, що розглядається) можуть змінювати свою форму та положення під дією силового поля. При цьому загальний об'єм рідини залишатиметься сталим. Слід зазначити, що це можливо за умови відсутності в'язкості дослідної речовини, або при дуже малих проявах цієї властивості.

Отже, розглянемо дискретну модель, якою можна інтерпретувати деякий обмежений об'єм рідини із заданими фізичними та хімічними властивостями. Для цього скористаємось алгоритмом описаним в [5] та задамо два типи тривимірних сіток: центральну та додаткову. Вузли центральної сітки являтимуться інтерпретацією центрів ваги кубічних (в «ненавантаженому» стані) ділянок рідини, а межі та форма кожної з цих ділянок визначатимуться координатами вузлів додаткової сітки. Тоді, при заданих початкових умовах додаткової сітки, для деякого вузла  $S_{(l;m;n)}$  центральної сітки система рівнянь рівноваги визначатиметься шляхом проектування векторної суми зусиль, які приходять у цей вузол на відповідні координатні осі. В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} & - \left( \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l+1;}{m;}{n} + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l-1;}{m;}{n} + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l;}{m+1;}{n} + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l;}{m-1;}{n} + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l;}{m;}{n+1} + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l;}{m;}{n-1} \right) \cdot s \binom{l;}{m;}{n} + \\ & + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l+1;}{m;}{n} \cdot s \binom{l+1;}{m;}{n} + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l-1;}{m;}{n} \cdot s \binom{l-1;}{m;}{n} + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l;}{m+1;}{n} \cdot s \binom{l;}{m+1;}{n} + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l;}{m-1;}{n} \cdot s \binom{l;}{m-1;}{n} + \\ & + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l;}{m;}{n+1} \cdot s \binom{l;}{m;}{n+1} + \aleph \binom{l;}{m;}{n} \binom{l;}{m;}{n-1} \cdot s \binom{l;}{m;}{n-1} = -V_{l;m;n} \cdot f_{s(l;m;n)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут:  $s_{(l;m;n)} = \{x_{(l;m;n)}, y_{(l;m;n)}, z_{(l;m;n)}\}$  – умовне позначення відповідних координат;  $\tilde{f}_{l;m;n}$  – вектор щільності пондеромоторних сил, які діють на одиничний об'єм рідини з боку електростатичного поля  $\tilde{E}$ ;  $V_{l;m;n}$  – деякий об'єм середовища із центром ваги у вузлі  $S_{(l;m;n)}$ , де прикладена сила  $V_{l;m;n} \cdot \tilde{f}_{l;m;n}$ ; величина  $\aleph_{i;j}$  – це параметр жорсткості даної в'язі центральної сітки, що становить:

$$\aleph_{i;j} = |\bar{R}_{i;j}| / \delta_{i;j}, \quad (2)$$

де  $|\tilde{R}_{i;j}|$  – абсолютна величина зусилля у в'язі, яка з фізичної точки зору відповідає модулю сили взаємодії між двома ділянками об'ємів рідини;

$\delta_{i,j}$  – довжина в’язі або відстань між центрами ваги двох відповідних ділянок з загального об’єму рідини, що становить:

$$\delta_{i,j} = \left[ (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

У зв’язку з тим, що сили, діючі на рідину з боку поля, залежать від об’єму елементарних складових (на які розбивається загальний досліджуваний сегмент рідини додатковою сіткою), необхідно ввести деяку умову, що описуватиме зв’язок формоутворюючої додаткової та центральної сіток. Так, для деякого додаткового вузла  $T_{(l+1/2; m+1/2; n+1/2)}$ , і восьми суміжних із ним центральних вузлів  $S_{(l+1; m; n+1)}$ ,  $S_{(l; m; n+1)}$ ,  $S_{(l; m+1; n+1)}$ ,  $S_{(l+1; m+1; n+1)}$ ,  $S_{(l+1; m; n)}$ ,  $S_{(l; m; n)}$ ,  $S_{(l; m+1; n)}$  та  $S_{(l+1; m+1; n)}$ , при умові ізотропності рідини (щільність  $\tau$  – стала), одержимо таку систему рівнянь:

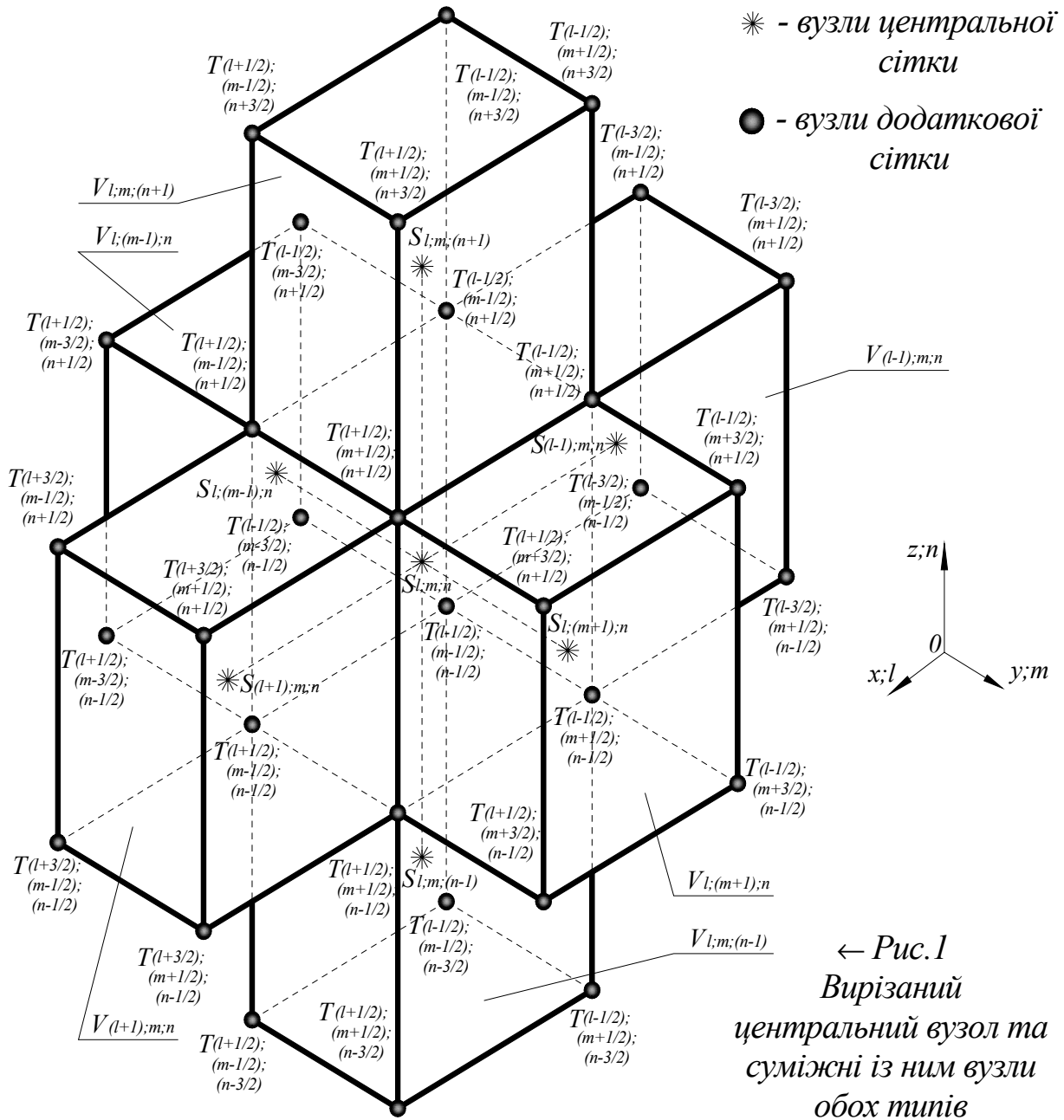
$$\begin{aligned} & 8 \cdot t_{\binom{l+1/2}{m+1/2}; \binom{l+1/2}{n+1/2}} + 4 \cdot \left( t_{\binom{l+1/2}{m+1/2}; \binom{l+3/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l+1/2}{m+1/2}; \binom{l-1/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l+1/2}{m-1/2}; \binom{l+1/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l+1/2}{m+1/2}; \binom{l+1/2}{n-1/2}} \right) + \\ & 2 \cdot \left( t_{\binom{l+3/2}{m+1/2}; \binom{l+1/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l+1/2}{m-1/2}; \binom{l+1/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l-1/2}{m+1/2}; \binom{l+1/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l+1/2}{m+1/2}; \binom{l+3/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l+1/2}{m+1/2}; \binom{l-1/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l+1/2}{m+1/2}; \binom{l+1/2}{n-1/2}} \right) + \\ & + 1 \cdot \left( t_{\binom{l+3/2}{m-1/2}; \binom{l-1/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l-1/2}{m-1/2}; \binom{l-1/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l-1/2}{m+3/2}; \binom{l+3/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l+3/2}{m+3/2}; \binom{l+3/2}{n+1/2}} + t_{\binom{l+3/2}{m-1/2}; \binom{l-1/2}{n-1/2}} + t_{\binom{l-1/2}{m-1/2}; \binom{l-1/2}{n-1/2}} + t_{\binom{l+3/2}{m-1/2}; \binom{l+3/2}{n-1/2}} + t_{\binom{l+3/2}{m-1/2}; \binom{l+3/2}{n-1/2}} \right) - \\ & 8 \cdot \left( s_{\binom{l+1}{m}; \binom{l+1}{n+1}} + s_{\binom{l}{m}; \binom{l}{n+1}} + s_{\binom{l}{m+1}; \binom{l}{n+1}} + s_{\binom{l+1}{m+1}; \binom{l+1}{n+1}} + s_{\binom{l+1}{m}; \binom{l+1}{n}} + s_{\binom{l}{m}; \binom{l}{n}} + s_{\binom{l}{m+1}; \binom{l}{n}} + s_{\binom{l+1}{m+1}; \binom{l+1}{n}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $t_{(l\pm 1/2u; m\pm 1/2v; n\pm 1/2w)} = \{x_{(l\pm 1/2u; m\pm 1/2v; n\pm 1/2w)}, y_{(l\pm 1/2u; m\pm 1/2v; n\pm 1/2w)}, z_{(l\pm 1/2u; m\pm 1/2v; n\pm 1/2w)}\}$  – умовне позначення відповідних координат додаткових вузлів ( $u, v, w$  – цілі числа). Відмітимо, що нумерація вузлів центральної та додаткової сітки навмисне пов’язані між собою. Це вказує на те, що у початковому (ненавантаженому) стані вузли додаткової сітки займають проміжне становище між порядковими номерами вузлів центральної сітки. Проте така нумерація не є обов’язковою і виявляється зручною для сіток з великою кількістю вузлів. Взаємне розташування суміжних вузлів додаткової та центральної сітки для деякого вирізаного вузла  $S_{(l; m; n)}$  показано на рисунку 1.

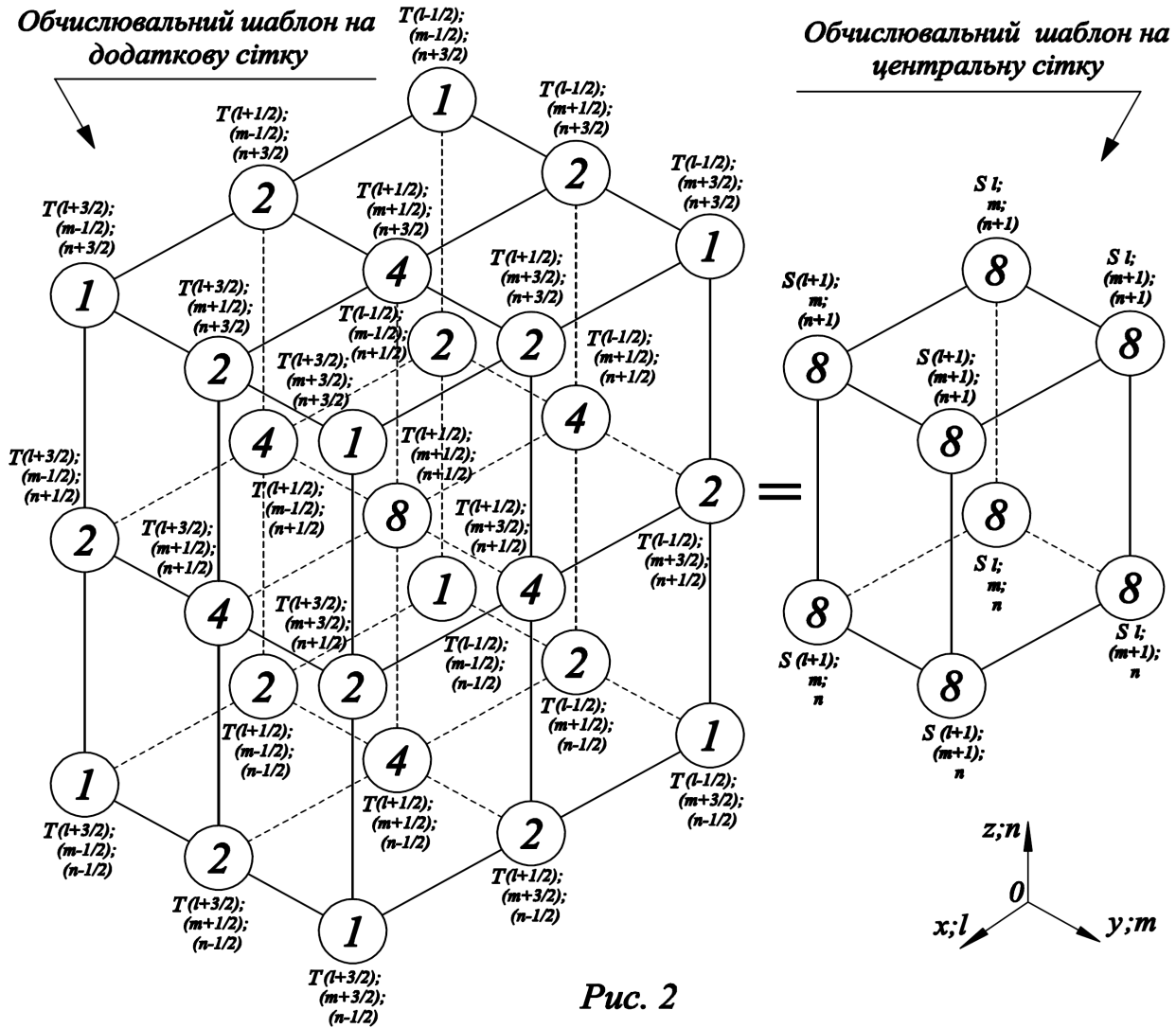
Фактично, система (4) отримується, виходячи із умови відповідності кожного центрального вузла центру ваги восьми додаткових вузлів, суміжних із ним, а також зрівнянням кількості невідомих координат додаткових вузлів та параметрів форми центральної сітки. Набагато наочніше систему (4) можна зобразити у формі рівності обчислювальних шаблонів для відповідних додаткової та центральної сіток (рис. 2).

Проаналізуємо силу взаємодії двох прилеглих елементів об’єму рідини, що розглядається. Усі елементи об’єму рідини (незалежно від умовного поділу) взаємодіють між собою центральними ньютонівськими силами взаємного тяжіння. Вважатимемо, що при умовному розбитті усього заданого об’єму

рідини на ділянки кубічної форми (у початковому положенні) найбільші сили взаємного тяжіння проявлятимуться між ділянками, які мають спільні грані.



Так на рис. 1 ділянка з центром ваги в точці  $S_{(l,m;n)}$  найбільш суттєво взаємодіятиме із ділянками, центри ваги яких розташовані в точках  $S_{(l+1;m;n)}$ ,  $S_{(l;m+1;n)}$ ,  $S_{(l;m;n+1)}$ ,  $S_{(l-1;m;n)}$ ,  $S_{(l;m-1;n)}$  та  $S_{(l;m;n-1)}$ . Вплив інших об'ємів середовища вважатимемо не суттєвими. Саме такий підхід дозволяє інтерпретувати ділянку середовища, як сітку. В такому випадку вузли центральної сітки можна вважати матеріальними точками.



Як відомо з III-го закону Ньютона, достатньо малі елементи двох тіл довільної форми та розмірів можна вважати матеріальними точками, маси котрих рівні добутку їх об'ємів ( $dV_1$  та  $dV_2$ ) на густину ( $\tau_1$  та  $\tau_2$ ). Тому сила тяжіння  $d\vec{R}_{12}$ , діюча на елемент першого тіла з боку елемента другого тіла, становить:

$$d\vec{R}_{12} = \gamma \cdot \frac{\tau_1 dV_1}{r_{12}} \cdot \frac{\tau_2 dV_2}{r_{12}} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{5}$$

де  $r_{12}$  – відстань між тілами 1 та 2;  $\gamma$  – гравітаційна стала. Результуюча сила  $\vec{R}_{12}$  тяжіння першого тіла другим рівна:

$$\vec{R}_{12} = \gamma \cdot \int_{V_1} \frac{\tau_1 dV_1}{r_{12}} \cdot \int_{V_2} \frac{\tau_2 dV_2}{r_{12}} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \tag{6}$$

де інтегрування проводиться по повним об'ємам  $V_1$  та  $V_2$  обох тіл (або ділянок середовища). У випадку однорідних тіл із сталими показниками щільності:

$$\vec{R}_{12} = \gamma \cdot \tau_1 \tau_2 \cdot \int_{V_1} \frac{dV_1}{r_{12}} \cdot \int_{V_2} \frac{dV_2}{r_{12}} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \tag{7}$$

Якщо ж форма тіл визначена, а їх щільність стала, то формула (7) набуває вигляду:

$$\bar{R}_{12} = \gamma \cdot \frac{\tau_1 V_1}{r_{12}} \cdot \frac{\tau_2 V_2}{r_{12}} \cdot \frac{\bar{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (8)$$

Абсолютна величина цього зусилля становитиме:

$$|\bar{R}_{12}| = \gamma \cdot \frac{I}{r_{12}^2} \cdot \tau_1 V_1 \cdot \tau_2 V_2. \quad (9)$$

Коли мова йде про силу взаємодії двох ділянок рідкого середовища, то припускаючи, що щільність цього середовища стала по всьому дослідному об'єму, та вважаючи відстань між центрами ваги  $S_i$  та  $S_j$  ділянок рідини рівною довжині в'язі центральної сітки ( $r_{i,j} = \delta_{i,j}$ ), рівність (9) приймає таку форму:

$$|\bar{R}_{i,j}| = (\gamma \cdot \tau_{i,j}^2 \cdot V_i V_j) / \delta_{i,j}^2. \quad (10)$$

Тоді показник жорсткості даної в'язі, що інтерпретує взаємодію між двома ділянками рідини визначеної форми, становитиме:

$$\aleph_{i,j} = (\gamma \cdot \tau_{i,j}^2 \cdot V_i V_j) / \delta_{i,j}^3. \quad (11)$$

Говорячи про визначеність форми об'ємів рідини, ми маємо на увазі, що вершини шестигранних ділянок, які задаються додатковою формоутворюючою сіткою, уже відомі.

Зазначимо також, що перед початком визначення НДС рідкого середовища під дією електростатичного поля, слід визначити форму окремих його об'ємів у ненавантаженому стані. Інакше кажучи слід визначити деформацію центральної та додаткової сітки при умові, що на вузли першої не впливає силове поле зарядженого тіла ( $\tilde{f}_{l;m;n} = const$ ). Для цього слід прийняти показник жорсткості усіх в'язів однаковим по усій центральній сітці ( $\aleph = const$ ). Тоді система (1) дещо спрощується:

$$-6s \binom{l;}{m;}{n} + s \binom{l+1;}{m;}{n} + s \binom{l-1;}{m;}{n} + s \binom{l;}{m;}{m+1;}{n} + s \binom{l;}{m;}{m-1;}{n} + s \binom{l;}{m;}{n+1} + s \binom{l;}{m;}{n-1} = 0. \quad (12)$$

Розв'язавши систему (12), можна визначити форму додаткової сітки, а значить і об'єми елементарних ділянок рідкого середовища, взаємодія яких розглядається, розв'язавши систему (4). Після цього слід почти розрахунок із урахуванням дії поля. Якщо на цьому етапі усі ділянки мають ідентичну кубічну форму, то система (1) набуває такого вигляду:

$$-6s \binom{l;}{m;}{n} + s \binom{l+1;}{m;}{n} + s \binom{l-1;}{m;}{n} + s \binom{l;}{m;}{m+1;}{n} + s \binom{l;}{m;}{m-1;}{n} + s \binom{l;}{m;}{n+1} + s \binom{l;}{m;}{n-1} = -\frac{I}{\aleph} V_{l;m;n} \cdot f_{s(l;m;n)}. \quad (13)$$

Якщо ділянки рідини матимуть різні форми та об'єми, то після розв'язання системи (12) та (4), слід продовжувати розрахунок використовуючи замість системи (13) систему (1). При можливості досягнення стану статичної рівноваги рідини, ітераційний процес слід продовжувати до одержання

необхідної похибки розрахунку [1, 5]. В іншому випадку, кожна наступна ітерація визначатиме миттєвий стан рідини, відображаючи геометричну картину динамічного процесу в певний момент часу. Час перетворення такої системи від одної геометричної картини до іншої можна визначити, враховуючи температуру, густину середовища та щільність пондеромоторних сил поля, яке на нього діє.

Відмітимо, що грані елементарних об'ємів рідини мають являти собою мінімальні поверхні, натягнуті на прямолінійні опорні контури, утворені прямими ребрами, які сполучають вершини (вузли) додаткової сітки. Алгоритм визначення об'ємів та площ шестигранних ділянок, обмежених мінімальними поверхнями детально описано в [6].

Що ж стосується щільності механічних сил електростатичного поля  $\tilde{f}_{l;m;n}$ , яке діє в даній області, то у випадку ізотропного рідкого середовища ця величина може бути визначена так [2]:

$$\bar{f}_{l;m;n} = f_x \cdot \bar{i} + f_y \cdot \bar{j} + f_z \cdot \bar{k}, \quad (14)$$

$$\text{де: } f_x = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left( E_x^2 - \frac{1}{2} \cdot |\bar{E}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial x} (E_x E_z) \right\rangle + \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( |\bar{E}|^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right), \quad (15)$$

$$f_y = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\langle \frac{\partial}{\partial y} (E_y E_x) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E_y^2 - \frac{1}{2} \cdot |\bar{E}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y E_z) \right\rangle + \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( |\bar{E}|^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right), \quad (16)$$

$$f_z = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\langle \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_x) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_y) + \frac{\partial}{\partial z} \left( E_z^2 - \frac{1}{2} \cdot |\bar{E}|^2 \right) \right\rangle + \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( |\bar{E}|^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right). \quad (17)$$

Тут  $\tilde{E} = E_x \cdot \bar{i} + E_y \cdot \bar{j} + E_z \cdot \bar{k}$  – вектор напруженості поля;  $\tau$  – щільність середовища (припускається, що середовище – діелектрик);  $\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища в даній точці.

У окремих випадках та слабо поляризуємих діелектриках (в яких поляризаційність діелектрика  $\alpha \ll 1$ , тобто при  $\varepsilon \approx 1$ ) вираз (14) можна значно спростити:

$$\bar{f}_{l;m;n} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \text{grad} |\bar{E}|^2. \quad (18)$$

**Приклад розрахунку** обмеженої прямокутної ділянки рідкого середовища за наведеною методикою. Припустимо, що досліджувана рідина – це водний розчин деяких солей, причому температура середовища підібрана таким чином, що діелектрична проникність середовища становить  $\varepsilon = 1.0000098 \approx 1$ . Габарити дослідної ділянки, а значить і межі додаткової сітки, встановимо  $4 \times 4 \times 5$  (см<sup>3</sup>) (для дотримання фізичного смислу задачі елементарні кубічні ділянки вважатимемо рівними 1 см<sup>3</sup>). Відповідно до габаритів додаткової сітки, задамо центральну сітку з наступним кроком:  $3 \times 3 \times 4$ . Взаємне розташування вузлів опорних та вільних вузлів центральної та додаткової сіток показано на рисунках 3 та 4 відповідно. Нехай задано 2 джерела енергії у

вигляді заряджених сфер радіуса  $0.5$  см та величиною заряду  $q_1=q_2=1$  Кл із координатами центрів  $Q_1(x_{Q1}=3.5; y_{Q1}=2; z_{Q1}=-2)$  і  $Q_2(x_{Q2}=1.5; y_{Q2}=2; z_{Q2}=6)$ . Густина розчину вважатимемо сталою по всьому об'єму і рівною  $\tau_{H_2O} \approx 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Гравітаційну сталу приймемо  $\gamma \approx 6.68 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>.

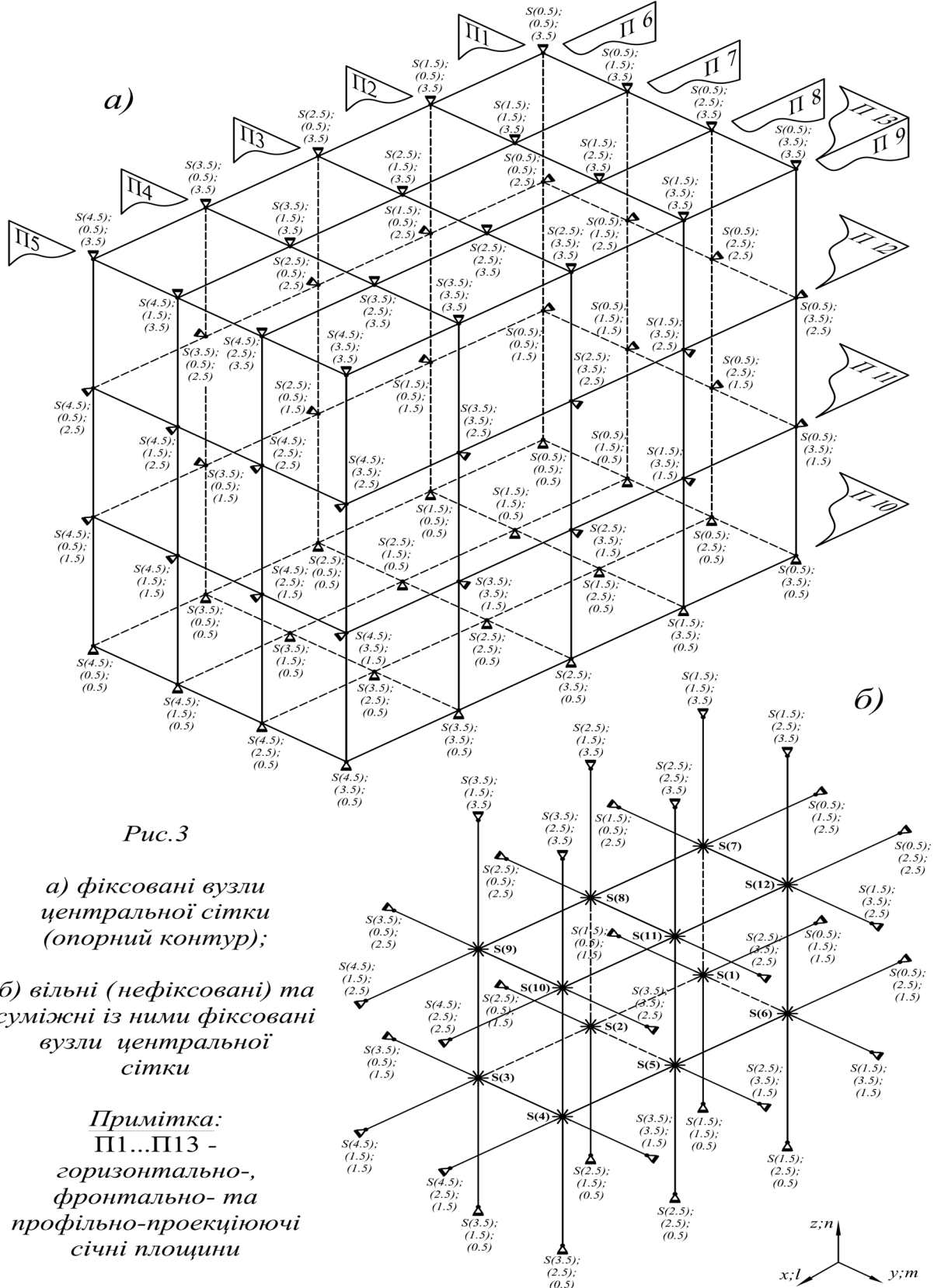


Рис.3

а) фіксовані вузли центральної сітки (опорний контур);

б) вільні (нефіксовані) та суміжні із ними фіксовані вузли центральної сітки

Примітка:  
П1...П13 - горизонтально-, фронтально- та профільно-проекціюючі січні площини

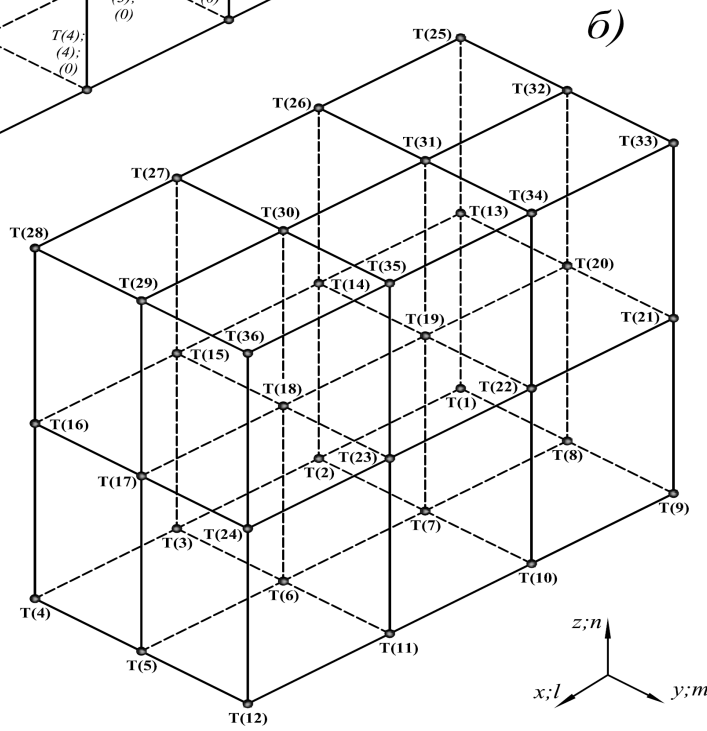
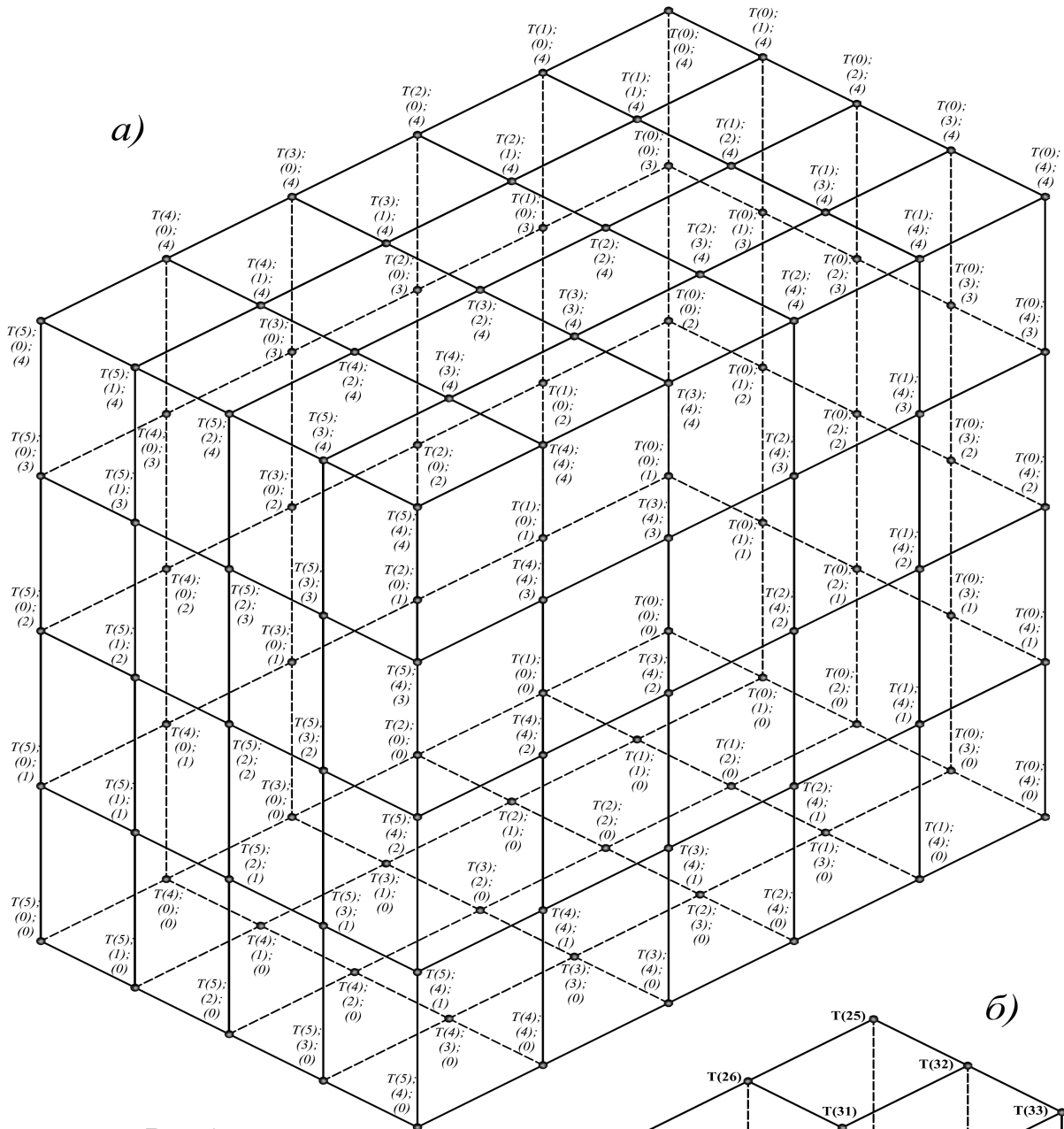


Рис.4

а) фіксовані вузли додаткової сітки (опорний контур);

б) вільні (нефіксовані) вузли додаткової сітки

**Примітка:**

На рисунку не показано зв'язків вільних вузлів із опорним контуром, оскільки такі в'язі не мають фізичного смислу

Визначимо формулу для розрахунку щільності механічних сил електростатичного поля, скориставшись виразом (18).

Оскільки розміри електричних джерел є відносно невеликими у порівнянні із розмірами дослідної ділянки, вважатимемо ці джерела точковими [3]. Запишемо значення потенціалу для двох точкових джерел  $Q_1$  та  $Q_2$  в деякій точці з координатами  $x, y, z$ :

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right). \quad (19)$$

$$\text{Тут і надалі:} \quad r_1 = \left[ (x - x_{Q1})^2 + (y - y_{Q1})^2 + (z - z_{Q1})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{та} \quad (20)$$

$$r_2 = \left[ (x - x_{Q2})^2 + (y - y_{Q2})^2 + (z - z_{Q2})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

– це відстані від дослідної точки до відповідних джерел зарядів.

Зв'язок між напруженістю електростатичного поля та його потенціалом виражається формулою [4]:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = - \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{k} \right]. \quad (22)$$

В нашому випадку одержимо наступну рівність:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} + E_z \cdot \vec{k}. \quad (23)$$

$$\text{де} \quad E_x = \frac{1}{\varepsilon} \left( q_1 \frac{(x - x_{Q1})}{r_1^3} + q_2 \frac{(x - x_{Q2})}{r_2^3} \right), \quad (24)$$

$$E_y = \frac{1}{\varepsilon} \left( q_1 \frac{(y - y_{Q1})}{r_1^3} + q_2 \frac{(y - y_{Q2})}{r_2^3} \right), \quad (25)$$

$$E_z = \frac{1}{\varepsilon} \left( q_1 \frac{(z - z_{Q1})}{r_1^3} + q_2 \frac{(z - z_{Q2})}{r_2^3} \right). \quad (26)$$

Враховуючи вирази (23) – (26), формула (18) набуває вигляду:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi\varepsilon^2} \text{grad} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2). \quad (27)$$

Виконавши ряд математичних перетворень, вираз (27) можна переписати наступним чином:

$$\vec{f}_{l;m;n} = \frac{1 - \varepsilon}{8\pi\varepsilon^2} \cdot \{ F_{x(l;m;n)} \cdot \vec{i} + F_{y(l;m;n)} \cdot \vec{j} + F_{z(l;m;n)} \cdot \vec{k} \}. \quad (28)$$

Тут індекси  $l;m;n$  підкреслюють те, що в процесі розрахунку ми розглядаємо значення щільності механічних сил поля виключно в вузлах центральної сітки.

Векторні ж компоненти наведеного вище виразу становитимуть:

$$F_{x(l;m;n)} = \left\{ 4q_1^2 \cdot (x_{l;m;n} - x_{Q1}) / r_1^6 + 4q_2^2 \cdot (x_{l;m;n} - x_{Q2}) / r_2^6 + \right. \\ \left. + 2q_1q_2 \cdot [(x_{Q1} - 2x_{l;m;n} + x_{Q2}) \cdot r_1^2 r_2^2 + 3[(x_{l;m;n} - x_{Q1}) \cdot r_2^2 + (x_{l;m;n} - x_{Q2}) \cdot r_1^2]] \right\} \times \\ \times \left\{ [(x_{l;m;n} - x_{Q1})(x_{l;m;n} - x_{Q2}) + (y_{l;m;n} - y_{Q1})(y_{l;m;n} - y_{Q2}) + (z_{l;m;n} - z_{Q1})(z_{l;m;n} - z_{Q2})] / (r_1^5 r_2^5) \right\} \quad (29)$$

$$F_{y(l;m;n)} = \{4q_1^2 \cdot (y_{l;m;n} - y_{Q1})/r_1^6 + 4q_2^2 \cdot (y_{l;m;n} - y_{Q2})/r_2^6 +$$

$$+ 2q_1q_2 \cdot (y_{Q1} - 2y_{l;m;n} + y_{Q2}) \cdot r_1^2 r_2^2 + 3[(y_{l;m;n} - y_{Q1}) \cdot r_2^2 + (y_{l;m;n} - y_{Q2}) \cdot r_1^2]\} \times \quad , (30)$$

$$\times \{(x_{l;m;n} - x_{Q1})(x_{l;m;n} - x_{Q2}) + (y_{l;m;n} - y_{Q1})(y_{l;m;n} - y_{Q2}) + (z_{l;m;n} - z_{Q1})(z_{l;m;n} - z_{Q2})\} / (r_1^5 r_2^5)$$

$$F_{z(l;m;n)} = \{4q_1^2 \cdot (z_{l;m;n} - z_{Q1})/r_1^6 + 4q_2^2 \cdot (z_{l;m;n} - z_{Q2})/r_2^6 +$$

$$+ 2q_1q_2 \cdot (z_{Q1} - 2z_{l;m;n} + z_{Q2}) \cdot r_1^2 r_2^2 + 3[(z_{l;m;n} - z_{Q1}) \cdot r_2^2 + (z_{l;m;n} - z_{Q2}) \cdot r_1^2]\} \times \quad . (31)$$

$$\times \{(x_{l;m;n} - x_{Q1})(x_{l;m;n} - x_{Q2}) + (y_{l;m;n} - y_{Q1})(y_{l;m;n} - y_{Q2}) + (z_{l;m;n} - z_{Q1})(z_{l;m;n} - z_{Q2})\} / (r_1^5 r_2^5)$$

Очевидно, що формули (14) та (28) ідентичні по своїй формі.

Розрахунок НДС рідини почнемо одразу з визначення деформації центральної сітки під дією силового поля. Це можливо внаслідок того, що у початковому стані (у відповідності до початкового положення заданих фіксованих вузлів) обидві сітки мають суто кубічну форму і усі елементарні об'єми рідини рівні між собою. Складаємо систему (13) для усіх нефіксованих вузлів центральної сітки, враховуючи вирази (28) – (31), і передбачаючи, що:

$$f_{s(l;m;n)} = \frac{1 - \varepsilon}{8\pi\varepsilon^2} \cdot F_{s(l;m;n)}. \quad (32)$$

Отримавши НДС центральної сітки, визначаємо деформований стан додаткової сітки, складаючи для кожного вузла, та розв'язуючи систему (4). Після цього треба повторити розрахунок, застосувавши систему (1), так як на цьому етапі слід враховувати перерозподіл об'ємів рідини в досліджуваній області та її нову геометричну картину. Виконавши розрахунок нового положення обох сіток, слід продовжувати ітераційне числення послідовно застосовуючи системи (1) та (4). При можливості у проміжних ітераціях необхідно визначати нове оптимальне положення вихідних умов закріплення фіксованих вузлів центральної сітки [5]. Це дає можливість зменшувати похибку обчислень.

В даному прикладі представлено досить сприятливі вихідні дані, та невеликі показники зарядів, що створюють поле. А тому після другого циклу ітераційного числення (під словом цикл розумітимемо повний розрахунок обох типів сіток), геометрична картина змінюється несуттєво. Підкреслимо, що на проміжних етапах розрахунку слід виконувати окремі ітераційні числення у зв'язку із значною нелінійністю функцій, які відображають силовий вплив поля. Для прикладу при розрахунках виконано 9 ітераційних циклів. Результируючі координати вільних вузлів обох сіток представлено в таблиці 1. Зображення деформованих площин перерізу дослідженої області (П1...П12) показано на рисунку 5.

Як видно з рисунку 5 (по перерізах П1 – П5), в процесі ітераційного числення опорні вузли центральної сітки зміщуються по координатній осі ОХ, що свідчить про зменшення похибки відображення деформації ділянки.

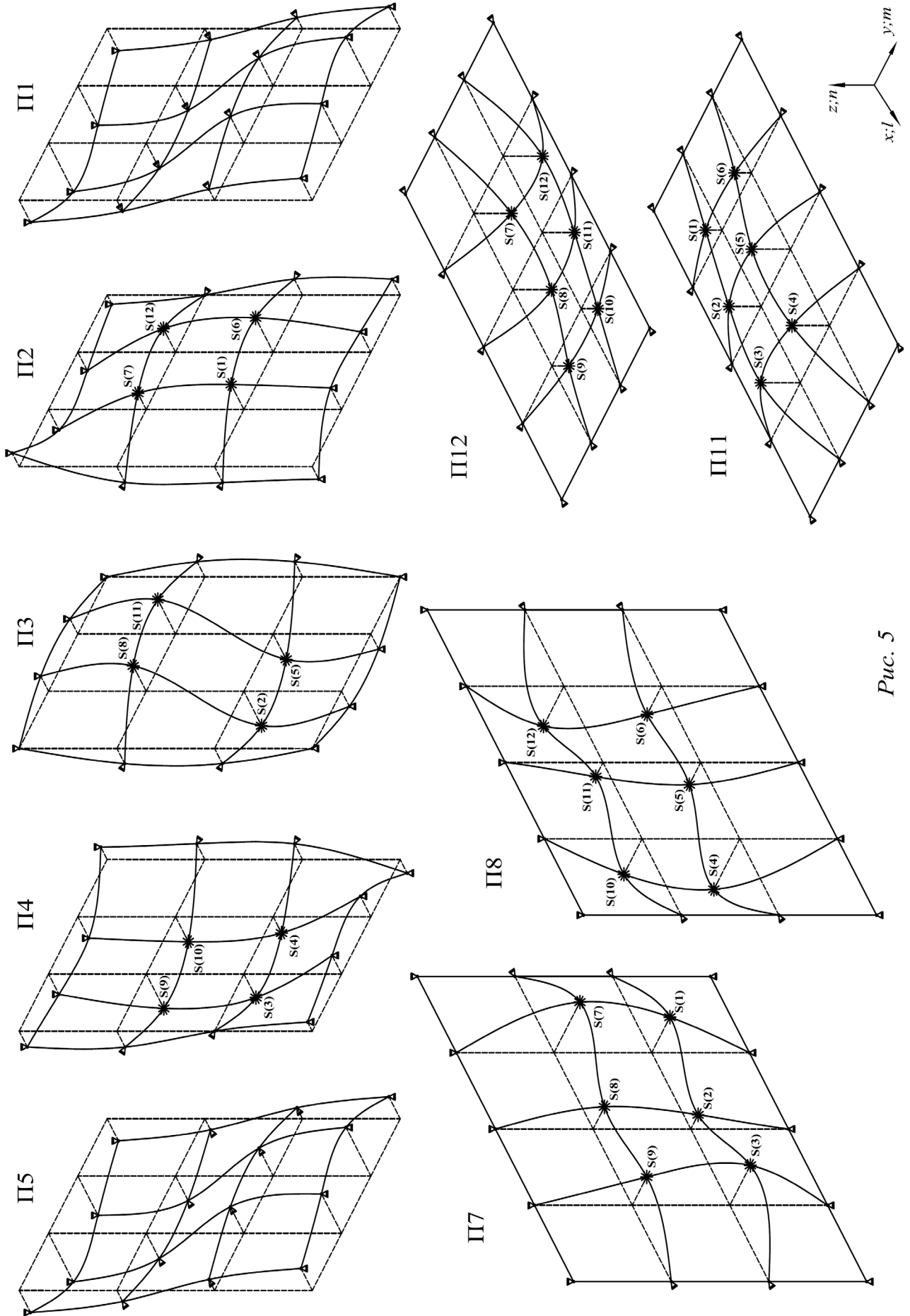


Рис. 5

Таблиця 1

Центральна сітка				Додаткова сітка											
№	X	Y	Z	№	X	Y	Z	№	X	Y	Z	№	X	Y	Z
1	1.4981	1.5013	1.5069	1	0.9999	1	1	13	0.9997	1.0021	2.0002	25	0.9999	1	3
2	2.5009	1.5001	1.5091	2	2.0005	0.9999	0.9994	14	2.0007	1.0021	1.9998	26	1.9998	1.0001	3.0006
3	3.5011	1.5013	1.5089	3	2.9995	1.0001	1.0006	15	3.0011	1.0021	1.9998	27	3.0001	0.9999	2.9994
4	3.5015	2.4988	1.5078	4	4.0001	1	1	16	3.9993	1.0021	2.0002	28	4.0005	1	3
5	2.5001	2.4995	1.5095	5	3.9973	2.0002	1.0041	17	4.0006	2	2	29	4.0014	1.9998	2.9959
6	1.4977	2.4990	1.5077	6	3.0011	1.9998	1.0132	18	3.0063	1.9996	2.0029	30	2.9998	2.0002	2.9868
7	1.4985	1.5012	2.4923	7	2.0007	1.9998	1.0132	19	1.9936	2.0004	1.9971	31	1.9987	2.0002	2.9868
8	2.4999	1.5005	2.4905	8	0.9977	2.0002	1.0041	20	0.9998	2	2	32	1.0026	1.9998	2.9959
9	3.5023	1.5009	2.4923	9	0.9999	3	1	21	1.0004	2.9979	1.9998	33	0.9999	3	3
10	3.5018	2.4988	2.4931	10	1.9997	3.0001	1.0006	22	1.999	2.9979	2.0002	34	2.0007	2.9999	2.9994
11	2.4991	2.4998	2.4909	11	3.0003	2.9999	0.9994	23	2.9994	2.9979	2.0002	35	2.9993	3.0001	3.0006
12	1.4988	2.4987	2.4911	12	4.0002	3	1	24	4.0001	2.9979	1.9998	36	4.0005	3	3

Значення переміщень опорних вузлів в даному випадку дуже незначні, а тому їх конкретні величини не приведені (на рис. 5 показано лише характер деформацій). Деформація додаткової сітки матиме подібний характер, а тому зображати її не обов'язково.

**Висновки.** Очевидно, що розглядаючи одержану геометричну картину деформації рідкого середовища, можна з певною точністю судити про інтенсивність впливу силового поля заряджених об'єктів на це середовище в тій чи іншій зоні досліджуваного об'єму. Наведений в даній роботі алгоритм може бути застосований як для статичного, так і для процесу деформації середовища що розвивається із плином часу.

#### Список використаних джерел:

1. Ковальов С.М., Ігумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256с.
2. Тамм І.Е.. Основы теории электричества. 11–е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616с.
3. Яворский Б.М., Детлаф А.А.. Справочник по физике. 7–е изд., испр. Издательство «НАУКА». М., 1979 г., 944с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теория поля. Теоретическая физика. Том II. Издательство «НАУКА». М., 1988 г., 512с.

5. Скочко В.І.. Визначення НДС пружного середовища під дією електростатичного поля на основі статико-геометричного методу. «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 86. К.: КНУБА, 2010р. – 450с., с 394-403.

6. Скочко В.І.. Деякі аспекти геометричного моделювання НДС середовища із заданими властивостями. «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 87. К.: КНУБА, 2010р. В друці.

7. Плоский В.О.. Дослідження структурних особливостей методів геометричного моделювання та тенденцій розвитку прикладної геометрії. Дисс. докт. техн. наук.– К.: 2007. – 277 с.

8. Лыков А.В.. Теория сушки. М., «Энергия» 1968. – 472 с.

### **Аннотация**

В работе представлено алгоритм определения напряженно деформированного состояния (НДС) жидкой среды, находящейся под воздействием силового поля статично заряженного объекта. Данный способ предусматривает дискретное представление изучаемого участка среды и анализ внутреннего взаимодействия отдельных его компонентов, с учётом пространственного влияния полевой структуры.

### **The summary**

This article describes relatively simple algorithm to determine deformed state of the fluid medium which dependent upon the force field of the charged object. This method covers the digitization and analysis of the fragment of the medium under investigation.