УДК 539.3 к.т.н. Жупаненко І. В.
д.т.н., професор Чибіряков В. К.
Київський національний університет будівництва і архітектури

ЧАСТОТИ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ ШАРНІРНО-ОБПЕРТОЇ ПЛАСТИНИ. ПОВІДОМЛЕННЯ 1: ПОСТАНОВКА ТА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Розглядається задача визначення частот власних коливань прямокутної шарнірно-обпертої пластини сталої товщини. В рамках моделі лінійної просторової теорії пружності ізотропного тіла запропоновано розв'язок задачі на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень.

Вступ. Попри тривалу історію розвитку і значний доробок методів розрахунку пластин на динамічні впливи, дослідження в цьому напрямку на сьогоднішній день залишаються далекими від своєї завершеності. З одного боку, пластинчасті елементи знаходять широке застосування в будівельній галузі, машинобудуванні тощо. Їх конструктивна форма та умови експлуатації з розвитком новітніх технологій ускладнюються, а вимоги до проектування підвищуються. З іншого боку, розвиток системного забезпечення і прогрес чисельних методів дозволяє розглядати більш точні математичні моделі, тим самим підвищуючи достовірність визначення напружено-деформованого стану таких елементів.

З точки зору якісного і кількісного аналізу методів динамічного розрахунку визначальними є параметри власних коливань. В свою чергу, розв'язок задачі про власні коливання пластин можна отримати лише наближено, звівши тривимірну динамічну задачу теорії пружності до двовимірної. Відомі підходи до розв'язку такої задачі розділяються на класи відповідно до принципових положень, на яких базується зниження вимірності:

- загальні чисельні методи – метод скінченних елементів, метод скінченних різниць тощо;
- прикладні теорії типу Тимошенка, що базуються на введенні певних припущень (гіпотез) стосовно напружено-деформованого стану пластин;
- математичні теорії пластин, що базуються на розкладі невідомих функцій в ряди по товщині пластини.

Враховуючи значну кількість наближених підходів до динамічного розрахунку пластин, вбачається актуальним розглянути окремий випадок геометрії та умов закріплення пластини – шарнірно обперту по чотирьох сторонах однорідну ізотропну прямокутну пластину сталої товщини, – для якої двовимірна задача визначення частот власних коливань розв'язується аналітично. Це дозволяє побудувати модельний розв'язок, на основі якого провести аналіз точності і області застосування різних методів зниження вимірності в задачах про власні коливання пластин.

Для редукції вихідної тривимірної динамічної задачі теорії пружності пропонується застосувати узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень, який вільний від обмеження параметру відносної товщини (на відміну від теорії типу Тимошенка) і має загальний критерій оцінювання точності апроксимації (на відміну від загальних чисельних методів).

Постановка задачі. Розглядається задача про власні коливання прямокутного в перерізі та в плані однорідного пружного тіла (рис. 1), товщина h якого співрозмірна з розмірами в плані l_x та l_y. Торцеві граничні поверхні тіла $y=0$, $y=l_y$ закріплені в'язями, що виключають переміщення по напрямку осі y (рис. 1):

$$v(x, 0, z)=0\ ,\ v(x, l_y, z)=0$$

та дозволяють зміщення точок торців в напрямку осей x, z. Торцеві граничні поверхні тіла $x=0$, $x=l_x$ закріплені в'язями, що виключають переміщення по напрямках осей y та z (рис. 1):

$$v(0, y, z)=0\ ,\ v(l_x, y, z)=0\ ,$$

$$w(0, y, z)=0\ ,\ w(l_x, y, z)=0$$

та дозволяють зміщення точок торців в напрямку осі x. З точки зору кінематики такі умови відповідають шарнірно-рухомому закріпленню в теорії тонких пластин.

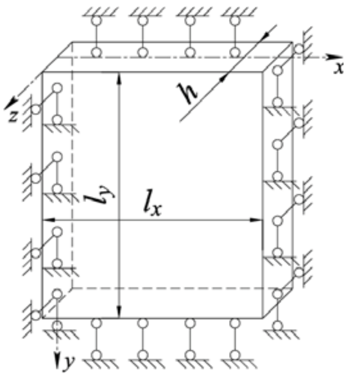

Рис. 1

В якості вихідних рівнянь прийнято співвідношення лінійної динамічної теорії пружності в тривимірній постановці, записані відносно компонент вектора переміщень та напружень в декартовій системі координат [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_x = (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial v}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_y = \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial v}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_z = \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial v}{\partial y} + (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xy} = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \tau_{xz} = \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \tau_{yz} = \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Відповідну граничну задачу будемо розв’язувати комбінованим чисельно-аналітичним методом, перший – аналітичний – етап якого полягає в зниженні вимірності вихідних рівнянь та граничних умов. Зниження вимірності граничної задачі по поперечній координаті z здійснюється *узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень* [2], де шукані функції представляються у вигляді розкладів по системі нормованих поліномів Лежандра:

$$P_i^H(\xi) = \sqrt{\frac{2i+1}{h}} \cdot P_i(\xi), \quad (i = 0, 1, 2, ..., N),$$

де $P_i(\xi)$ – поліноми Лежандра; $\xi = \dfrac{2\left(z - h_{cp}\right)}{h}$, $\left(-1 \le \xi \le 1\right)$, $h_c = \dfrac{R + R_0}{2}$.

Процес зниження вимірності вихідних рівнянь розглядається як формальна процедура, що зводиться до заміни елементів, які входять у вихідні рівняння та граничні умови на торцевих поверхнях, їх проекційними аналогами за побудованою таблицею проекційних відповідностей [2], подібних співвідношенням операційного числення.

Після застосування узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень задача зводиться до двовимірної (по просторових координатах) і описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно функціональних коефіцієнтів розкладу по системі нормованих поліномів Лежандра (моментів невідомих функцій напружено-деформованого стану):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}^{i}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}^{i}}{\partial y} + \dfrac{2}{h} m^{ij} \cdot \tau_{xz}^{j} = \rho \dfrac{\partial^{2} u^{i}}{\partial t^{2}}, \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}^{i}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}^{i}}{\partial y} + \dfrac{2}{h} m^{ij} \cdot \tau_{yz}^{j} = \rho \dfrac{\partial^{2} v^{i}}{\partial t^{2}}, \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}^{i}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}^{i}}{\partial y} + \dfrac{2}{h} m^{ij} \cdot \sigma_{zz}^{j} = \rho \dfrac{\partial^{2} w}{\partial t^{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{xx}^{i} = (\lambda + 2\mu) \cdot \dfrac{\partial u^{i}}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial v^{i}}{\partial y} - \lambda \dfrac{2}{h} m^{ji} \cdot w^{j}, \\ \sigma_{yy}^{i} = \lambda \dfrac{\partial u^{i}}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \cdot \dfrac{\partial v^{i}}{\partial y} - \lambda \dfrac{2}{h} m^{ji} \cdot w^{j}, \\ \sigma_{zz}^{i} = \lambda \dfrac{\partial u^{i}}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial v^{i}}{\partial y} - (\lambda + 2\mu) \dfrac{2}{h} m^{ji} \cdot w^{j}, \\ \tau_{xy}^{i} = \mu \left(\dfrac{\partial v^{i}}{\partial x} + \dfrac{\partial u^{i}}{\partial y} \right), \\ \tau_{xz}^{i} = \mu \left(\dfrac{\partial w^{i}}{\partial x} - \dfrac{2}{h} m^{ji} \cdot u^{j} \right), \\ \tau_{yz}^{i} = \mu \left(\dfrac{\partial w^{i}}{\partial y} - \dfrac{2}{h} m^{ji} \cdot v^{j} \right). \end{cases}$$

Виключаючи з перших трьох рівнянь компоненти напружень за допомогою рівнянь другої підсистеми, отримуємо редуковані рівняння у вигляді системи диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних:

$$(\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial^{2} u^{i}}{\partial x^{2}} + \mu \frac{\partial^{2} u^{i}}{\partial y^{2}} - \mu \frac{4}{h^{2}} m^{ji} \cdot m^{j\alpha} \cdot u^{\alpha} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^{2} v^{i}}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{2}{h} \left(\mu \cdot m^{ij} - \lambda \cdot m^{ji} \right) \cdot \frac{\partial w^{j}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^{2} u^{i}}{\partial t^{2}};$$

$$\mu \frac{\partial^{2} v^{i}}{\partial x^{2}} + (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial^{2} v^{i}}{\partial y^{2}} - \mu \frac{4}{h^{2}} m^{ji} m^{j\alpha} \cdot v^{\alpha} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^{2} u^{i}}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{2}{h} \left(\mu \cdot m^{ij} - \lambda \cdot m^{ji} \right) \cdot \frac{\partial w^{j}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^{2} v^{i}}{\partial t^{2}};$$

$$\mu \frac{\partial^{2} w^{i}}{\partial x^{2}} + \mu \frac{\partial^{2} w^{i}}{\partial y^{2}} - (\lambda + 2\mu) \frac{4}{h^{2}} m^{ji} m^{j\alpha} \cdot w^{\alpha} + \frac{2}{h} \left(\lambda \cdot m^{ij} - \mu \cdot m^{ji} \right) \cdot \frac{\partial u^{j}}{\partial x} + \\ + \frac{2}{h} \left(\lambda \cdot m^{ij} - \mu \cdot m^{ji} \right) \cdot \frac{\partial v^{j}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^{2} w^{i}}{\partial t^{2}}. \quad (2)$$

Редуковані граничні умови записуються у вигляді:

$$\begin{cases} v^{i}(x, 0, z) = 0, \quad v^{i}(x, l_{y}, z) = 0; \\ v^{i}(0, y, z) = 0, \quad v^{i}(l_{x}, y, z) = 0; \\ w^{i}(0, y, z) = 0, \quad w^{i}(l_{x}, y, z) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

За часовою координатою при гармонійному збуджуючому навантаженні приймаємо стаціонарні коливання системи у вигляді стоячих хвиль виду За часовою координатою при гармонійному збуджуючому навантаженні приймаємо стаціонарні коливання системи у вигляді стоячих хвиль виду:

$$u^i\left(x,y,t\right)=u_0^i\left(x,y\right)\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right),\quad \left(u^i\Leftrightarrow v^i\Leftrightarrow w^i\right). \tag{4}$$

Граничні умови (3) дозволяють шукати розв'язок граничної задачі у вигляді:

$$\begin{aligned} u\left(x,y\right)&=u_0\cos\frac{k\pi\cdot x}{l_x}\cos\frac{n\pi\cdot y}{l_y},\\ v\left(x,y\right)&=v_0\sin\frac{k\pi\cdot x}{l_x}\sin\frac{n\pi\cdot y}{l_y},\\ w\left(x,y\right)&=w_0\sin\frac{k\pi\cdot x}{l_x}\cos\frac{n\pi\cdot y}{l_y}. \end{aligned} \tag{5}$$

Після підстановки до рівнянь (2) залежностей (4), (5) для кожного k, n отримуємо задачу на власні значення для симетричної матриці:

$$-\left[\left(\frac{k\pi}{l_x}\right)^2\left(\lambda+2\mu\right)\cdot\delta^{i\alpha}+\left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2\mu\cdot\delta^{i\alpha}+\mu\frac{4}{h^2}m^{ji}\cdot m^{j\alpha}-\gamma\cdot\delta^{i\alpha}\right]\cdot u_0^\alpha+$$
$$+\frac{k\pi}{l_x}\cdot\frac{n\pi}{l_y}\left(\lambda+\mu\right)v_0^\alpha+\frac{k\pi}{l_x}\cdot\frac{2}{h}\left(\mu\cdot m^{\alpha i}-\lambda\cdot m^{i\alpha}\right)\cdot w_0^\alpha=0,$$

$$\frac{k\pi}{l_x}\cdot\frac{n\pi}{l_y}\left(\lambda+\mu\right)\cdot u_0^\alpha-$$
$$-\left[\left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2\left(\lambda+2\mu\right)\cdot\delta^{i\alpha}+\left(\frac{k\pi}{l_x}\right)^2\mu\cdot\delta^{i\alpha}+\mu\frac{4}{h^2}m^{ji}m^{j\alpha}-\gamma\cdot\delta^{i\alpha}\right]\cdot v_0^\alpha+$$
$$+\frac{n\pi}{l_y}\cdot\frac{2}{h}\left(\lambda\cdot m^{i\alpha}-\mu\cdot m^{\alpha i}\right)\cdot w_0^\alpha=0,$$

$$\frac{k\pi}{l_x}\cdot\frac{2}{h}\left(\mu\cdot m^{\alpha i}-\lambda\cdot m^{i\alpha}\right)\cdot u_0^\alpha+\frac{n\pi}{l_y}\cdot\frac{2}{h}\left(\lambda\cdot m^{i\alpha}-\mu\cdot m^{\alpha i}\right)\cdot v_0^\alpha-$$
$$-\left[\left(\frac{k\pi}{l_x}\right)^2\mu\cdot\delta^{i\alpha}+\left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2\mu\cdot\delta^{i\alpha}+\left(\lambda+2\mu\right)\frac{4}{h^2}m^{ji}m^{j\alpha}-\gamma\cdot\delta^{i\alpha}\right]\cdot w_0^\alpha=0,$$

де $\gamma=\rho\omega^2$ – шукане власне число. Тут $\delta^{i\alpha}$– символ Кронекера $\delta^{i\alpha}=\begin{cases}1, \text{ якщо } i=\alpha\\ 0, \text{ якщо } i\neq\alpha\end{cases}.$

Власні числа матриці, а по них відповідні частоти власних коливань пластини, шукаються за допомогою стандартної комп'ютерної програми для симетричних матриць EIGEN [3].

Література

1. **Новожилов В. В.** Теория упругости. – Лен.: Судпромгиз, 1958.–372 с.
2. *Чибіряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
3. *Форсайд Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 280 с.

Аннотация

Исследуется задача определения частот собственных колебаний прямоугольной шарнирно-опертой пластины постоянной толщины. В рамках модели линейной пространственной теории упругости изотропного тела предложено решение задачи на основании обобщенного метода конечных интегральных преобразований.

Summary

A problem is considered about the determination of natural frequencies of the rectangular invariable thickness plate with hingedly support on the butt ends. The solution of the problem is limited by the framework of the three-dimensional elasticity theory and is based on the method of finite integral transforms.