МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

О.В. Забарило, Ю.А. Коротких, П.О. Забарило

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рекомендовано вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури як навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань G «Інженерія, виробництво та будівництво» спеціальностей G3 «Електрична інженерія», G4 «Енерговиробництво» та G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Київ 2026

УДК 517.9
З-12

Рецензенти: *І.А. Улітко*, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Київський національний університет ім. Т. Шевченка;
Ю.О. Чорноіван, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;
А.А. Кириченко, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Київський національний університет будівництва і архітектури

Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 37 від 30 жовтня 2025 року.

Забарило О.В.
З-12 Диференціальні рівняння: навчальний посібник / О.В. Забарило, Ю.А. Коротких, П.О. Забарило. – Київ : КНУБА, 2026. – 104 с.

ISBN 978-966-627-292-1

Викладено матеріал основних тем теорії звичайних диференціальних рівнянь: диференціальні рівняння першого та вищих порядків, системи диференціальних рівнянь. Містить обґрунтований розбір основних понять і методів теорії диференціальних рівнянь. Наведено 30 варіантів завдань для індивідуальної роботи та приклади розв’язування запропонованих задач.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань G «Інженерія, виробництво та будівництво» спеціальностей G3 «Електрична інженерія», G4 «Енерговиробництво» та G7 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка».

УДК 517.9

ISBN 978-966-627-292-1

ЗМІСТ

Вступ

Вивчаючи різноманітні реальні процеси та явища, доцільно створювати математичні моделі, за допомогою яких можна досліджувати якісні й кількісні характеристики стану відповідного процесу та передбачати подальший його розвиток без експериментів, які у багатьох випадках є дорогими або неможливими. У процесі вивчення різноманітних явищ досить часто важко встановити залежність між величинами, що описують цей процес математичною формулою, проте є можливість задати залежність між величинами та їхніми похідними. Отже, маємо справу з диференціальними рівняннями.

Диференціальні рівняння описують різноманітні процеси в таких дисциплінах, як механіка, електротехніка, будівництво, екологія, хімічна кінетика, архітектура, фізика, машинобудування, демографія, медицина, метрологія, економіка, і взагалі, якщо існує явище зміни однієї величини відносно іншої, то воно може бути описане диференціальним рівнянням або системою рівнянь. Класична теорія звичайних диференціальних рівнянь є потужним апаратом, необхідним для складання математичних моделей в різних прикладних задачах та їх розв'язування.

Метою навчального посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії диференціальних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу та допомога в оволодінні необхідними підходами та потрібними інструментами для розв'язування відповідних класів задач і уміння застосувати їх на практиці.

У процесі роботи з цим навчальним посібником студент має оволодіти:

– основними поняттями теорії звичайних диференціальних рівнянь;

– уміннями розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого порядку, що інтегруються в квадратурах та звідні до них;

– уміннями знаходження загального розв'язку лінійних однорідних та неоднорідних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами;

– методом Ейлера (розв'язування системи лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами) та методом невизначених коефіцієнтів для знаходження частинного розв'язку неоднорідної системи;

– уміннями вирізняти з-поміж інших природні, фізичні, економічні та інші динамічні явища і процеси, для моделювання яких можуть бути використані диференціальні рівняння; здатністю розробляти моделі таких процесів, аналізувати і трактувати розв'язок.

Розділ 1
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні поняття та означення

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається співвідношення, що пов'язує незалежні змінні, функцію від них та різні похідні (або диференціали) цієї функції.

Означення. Якщо диференціальне рівняння має одну незалежну змінну, то воно називається *звичайним диференціальним рівнянням*, якщо ж незалежних змінних дві або більше, то таке диференціальне рівняння називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*. Надалі будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння, причому завжди незалежну змінну і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Символічно звичайні диференціальні рівняння записують у вигляді $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0$ або $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n}{dx^n}\right)=0$.

Означення. Порядок найвищої похідної, яка входить у диференціальне рівняння, називається *порядком диференціального рівняння*.

Означення. *Розв'язком* або *інтегралом* диференціального рівняння називається функція $y=\phi(x)$, яка визначена на інтервалі (a, b), має похідні на цьому інтервалі до *n*-го порядку включно і така, що підстановка функції $y=\phi(x)$ та її похідних в диференціальне рівняння перетворює це рівняння на тотожність.

Наприклад, функція $y=\sin x$ буде розв'язком диференціального рівняння $y''+y=0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Справді, $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$. Підставивши в це рівняння y і y'', отримаємо $-\sin x+\sin x=0$.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають *сім'єю інтегральних кривих*.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння*. Якщо у такому випадку всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або у *квадратурах* (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння проінтегроване *у скінченному вигляді*. Розглядатимемо переважно саме такі рівняння, хоча значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченному вигляді й для представлення їхніх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

Основною задачею теорії інтегрування диференціальних рівнянь є знаходження всіх розв'язків заданого диференціального рівняння та дослідження їхніх властивостей.

Означення. *Диференціальним рівнянням першого порядку* називається співвідношення, що пов'язує шукану функцію, її першу похідну та незалежну змінну, тобто рівняння вигляду: $F(x, y, y')=0$.

Якщо таке співвідношення можна перетворити до вигляду $y'=f(x, y)$, то таке диференціальне рівняння першого порядку будемо називати *рівнянням, розв'язаним відносно похідної*.

Перетворимо далі: $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$, $dy=f(x, y)dx$, $f(x, y)dx-dy=0$.

Якщо функцію $f(x,y)$ представити у вигляді $f(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},\quad Q(x,y)\neq 0,$ тоді після підстановки в отримане вище рівняння маємо $P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0$ – це так звана *диференціальна форма* рівняння першого порядку. У цьому рівнянні змінні x та y рівноправні, тобто будь-яку з них можна розглядати як функцію іншої.

Для диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної ($y'=f(x, y)$, справедлива така теорема:

Теорема Коші (теорема про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку): *якщо функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області D площини Oxy і має в цій області неперервну частинну похідну $\frac{\partial f}{\partial y}$, то яка б не була точка (x_0, y_0) з* *області D, існує єдиний розв'язок* $y=\phi(x)$ *рівняння* $y'=f(x,y)$*, що задовольняє умову* $\phi(x_0)=y_0$.

Геометрично це означає, що існує єдина функція $y=\phi(x)$, графік якої проходить через точку (x_0, y_0).

Внаслідок цієї теореми можна стверджувати, що диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ має безліч різних розв'язків.

Умова, що якщо $x=x_0$, маємо $y=y_0$, називається *початковою умовою*, а диференціальне рівняння з початковою умовою називається *задачею Коші*.

Означення. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння першого порядку називається така диференційована функція $y=\phi(x,C)$, що залежить від довільної сталої *C*, яка задовольняє наступні умови:

а) вона є розв'язком диференціального рівняння за будь-якого *C*;

б) за будь-яких початкових умов $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$ існує таке значення $C=C_0$, що функція $y=\phi(x,C_0)$ задовольняє цю початкову умову.

Звичайно, тоді вважається, що точка (x_0, y_0) належить області, де виконується умова існування і єдиності розв'язку.

Розв'язок вигляду $y=\phi(x,C_0)$ називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння.

Інтегралом диференціального рівняння називається будь-яке рівняння, що не містить похідних, для якого це диференціальне рівняння є наслідком. *Загальний інтеграл* описує загальний розв'язок диференціального рівняння в неявному вигляді.

Особливим розв'язком диференціального рівняння називається такий розв'язок, у всіх точках якого умова єдиності Коші не виконується, тобто в околі деякої точки (*x*, *y*) існує не менше двох інтегральних кривих. Особливі розв'язки можуть з'явитися серед розв'язків, загублених в результаті перетворень цього рівняння в процесі його інтегрування. Відзначимо, що не кожне диференціальне рівняння має особливі розв'язки.

Особливі розв'язки не залежать від сталої *C* і їх не можна одержати із загального розв'язку ні за яких значень сталої *C*. Якщо побудувати сімейство інтегральних кривих диференціального рівняння, то особливий розв'язок буде зображуватися лінією, що у кожній точці дотикається принаймні до однієї інтегральної кривої.

1.2. Диференціальні рівняння зі змінними, що розділяються

Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається *рівнянням зі змінними, що розділяються*, або *рівнянням з відокремлюваними змінними*, якщо його можна представити у вигляді $y'=\alpha(x)\beta(y)$.

Для розв'язання таких рівнянь використовують *метод розділення змінних*:

$$y'=\alpha(x)\beta(y);\ \frac{dy}{dx}=\alpha(x)\beta(y);\ \frac{dy}{\beta(y)}=\alpha(x)dx;$$

$$\int\frac{dy}{\beta(y)}=\int\alpha(x)dx+C;\ G(y)=F(x)+C.$$

Зауважимо, що випадок $\beta(y)=0$ варто дослідити окремо – тут можливі особливі розв'язки.

Після знаходження відповідних первісних виходить загальний розв'язок (чи загальний інтеграл) диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо задані початкові умови, то після їхньої підстановки в загальному розв'язку з'являється відповідна стала величина *C*, а з нею відбувається частинний розв'язок.

Зауваження. Рівняння в диференціальній формі виду $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$ (коефіцієнти при диференціалах розкладаються на множники, які залежать лише від однієї змінної) також називають рівнянням з відокремлюваними змінними. Розділивши обидві його частини на $N_1(y)\cdot M_2(x)$, отримуємо $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0$ – рівняння з відокремленими змінними (перший доданок залежить тільки від *x*, а другий залежить тільки від *y*), а потім, почленно інтегруючи, матимемо $\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C$.

Під час почленного ділення диференціального рівняння на $N_1(y)\cdot M_2(x)$ можуть бути загублені деякі розв’язки. Тому слід окремо розв’язати рівняння $N_1(y)=0$ та $M_2(x)=0$ і встановити ті розв’язки диференціального рівняння, які не можуть бути отримані із загального розв'язку – *особливі розв’язки*.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння: $y\,y'=\dfrac{-2x}{\cos y}$.

Розв’язання. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Записавши похідну як відношення диференціалів, маємо

$y\cos y\cdot\dfrac{dy}{dx}=-2x$, $y\cos y\;dy=-2x\;dx$, $\int y\cos y\;dy=-2\int x\;dx+C$.

Інтеграл, що стоїть в лівій частині, береться частинами:

$$\int y\cos y dy = ¿\,|u=y \quad dv=\cos y dy\;¿|¿\;¿\;¿\;¿,$$

отже $y\sin y+\cos y=-x^2+C$ і $y\sin y+\cos y+x^2=C$ – це є загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння, тому що шукана функція не виражена через незалежну змінну. У цьому й полягає *відмінність* загального (частинного) *інтеграла* від загального (частинного) *розв’язку*.

Щоб перевірити правильність отриманої відповіді, продиференціюємо загальний інтеграл по змінній *x*.

$y'\sin y+y\,y'\cos y-y'\sin y+2x=0$,

$y\,y'=-\dfrac{2x}{\cos y}$ – вірно.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $y'=\sqrt[3]{y^2}$.

Розв’язання. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Записавши відношення диференціалів, маємо $\dfrac{dy}{dx}=y^{\frac{2}{3}}$.

Розділимо обидві частини на $y^{\frac{2}{3}}$ і помножимо на dx: $y^{-\frac{2}{3}}dy=dx$.

Далі, почленно інтегруючи, маємо $\int y^{-\frac{2}{3}}dy=\int dx+C$, в силу чого $3y^{1/3}=x+C$, звідки $27y=(x+C)^3$ – загальний інтеграл і $y=\frac{1}{27}(x+C)^3$ – загальний розв’язок.

Випадок $y=0$ – особливий розв’язок цього рівняння. Він з’являється в результаті перевірки випадку, коли дільник рівний 0. Справді $0'=\sqrt[3]{0^2}$.

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$.

Розв’язання. Розділимо обидві частини цього рівняння на функцію $(x^2-1)(y^2-1)$ і отримаємо диференціальне рівняння з розділеними змінними: $\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0.$

Його загальний інтеграл має вигляд: $\int\frac{xdx}{x^2-1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=C$, звідки отримуємо: $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=C,$

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=2C,$$

$$\ln|(x^2-1)(y^2-1)|=2C,$$

$$(x^2-1)(y^2-1)=\pm e^{2C}=\tilde{C}.$$

Можливі особливі розв’язки виду $y=\pm1$ та $x=\pm1$ можна отримати з загального за нульового значення сталої.

Приклад 4. Розв’язати рівняння $\frac{yy'}{x}+e^y=0$ за умови $y(1) = 0$.

Розв’язання. Маємо задачу Коші. Спочатку розв’яжемо рівняння $y\frac{dy}{dx}+xe^y=0$, $ydy+xe^y dx=0$, $\frac{y}{e^y}dy=-xdx$, $\int\frac{y}{e^y}dy=-\int xdx+C$.

Інтеграл, що стоїть у лівій частині, будемо брати частинами.

$$\int ye^{-y}\,dy = ¿ \left| u = y \quad e^{-y}\,dy = dv ¿ \right| ¿ ¿ ¿ ¿ ¿$$

¿

$-e^{-y}(y+1) = -\dfrac{x^2}{2} + C;$

$2e^{-y}(y+1) = x^2 - 2C = x^2 + \widetilde{C}.$

Якщо $y(1) = 0$, то $2e^0(0+1) = 1 + \widetilde{C}; \ \Rightarrow \ 2 = 1 + \widetilde{C}; \ \Rightarrow \ \widetilde{C} = 1.$

Отже, шуканий частинний інтеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

1.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та звідні до них

Означення. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією n-го порядку* щодо своїх аргументів x та y, якщо для будь-якого значення параметра t (крім нуля) виконується тотожність: $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Приклад 1. Чи є однорідною функція $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

Розв'язання. Перевіримо умову однорідності

$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$.

Таким чином, функція $f(x, y)$ є однорідною функцією 3-го порядку.

Означення. Диференціальне рівняння виду $y' = f(x, y)$ називається *однорідним*, якщо його права частина $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового порядку щодо своїх аргументів, тобто виконується тотожність $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Варто також зауважити, що будь-яке рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ є однорідним, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – однорідні функції однакового порядку.

Розв'язання будь-якого однорідного рівняння ґрунтується на приведенні його до рівняння з відокремлюваними змінними.

Справді, розглянемо однорідне рівняння $y' = f(x, y)$. Оскільки функція $f(x, y)$ – однорідна функція нульового порядку, то можна записати: $f(tx,ty)=f(x,y)$. Оскільки параметр t загалом кажучи довільний, припустимо, що $t=\frac{1}{x}$. Одержуємо: $f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$.

Права частина отриманої рівності залежить фактично тільки від одного аргументу $u=\frac{y}{x}$, тобто $f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\phi\left(\frac{y}{x}\right)=\phi(u)$. Вихідне диференціальне рівняння в такий спосіб можна записати у вигляді: $y'=\phi(u)$. Далі заміняємо $y=u(x)\cdot x=u\cdot x$, $y'=u'x+ux'=u'x+u$.

$u'x+u=\phi(u);\ \ u'=\frac{\phi(u)-u}{x}$.

Ми отримали рівняння з відокремлюваними змінними щодо невідомої функції *u*.

$\frac{du}{dx}=\frac{\phi(u)-u}{x}$, $\frac{du}{\phi(u)-u}=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{du}{\phi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C$.

Далі, знайшовши первісні і замінивши допоміжну функцію *u* на її вираз через *x* та *y*, одержимо загальний розв'язок початкового однорідного диференціального рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$.

Розв'язання. Введемо допоміжну функцію *u*.

$u=\frac{y}{x};\ \ y=ux;\ \ y'=u'x+u$.

Відзначимо, що введена нами функція *u* завжди додатна, оскільки в протилежному випадку втрачає зміст вихідне диференціальне рівняння, що містить $\ln u=\ln\frac{y}{x}$.

Підставляємо у вихідне рівняння:

$u'x+u=u(\ln u+1);\ \ u'x+u=u\ln u+u;\ \ u'x=u\ln u;\ \ \frac{du}{dx}x=u\ln u$.

Відокремлюємо змінні: $\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x};\ \ \int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}+C$.

Інтегруючи, одержуємо

$$\ln|\ln u|=\ln|x|+C;\ \ln|\ln u|=\ln|x|+\ln e^{C};\ \ln u=\widetilde{C}x;\ u=e^{\widetilde{C}x}.$$

Повертаючись назад до *y*, одержуємо загальний інтеграл $\frac{y}{x}=e^{\widetilde{C}x}$, а потім і загальний розв'язок $y=xe^{\widetilde{C}x}$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{tx\cdot ty}{(tx)^2-(ty)^2}=\frac{t^2xy}{t^2(x^2-y^2)}=\frac{xy}{x^2-y^2}$, то маємо однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Робимо заміну $y=u\cdot x$, тоді

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},\ u+x\frac{du}{dx}=\frac{xux}{x^2-(ux)^2}=\frac{u}{1-u^2},$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}-u=\frac{u-u+u^3}{1-u^2}=\frac{u^3}{1-u^2}.$$

Розділяючи змінні, отримаємо: $\frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{dx}{x}$, або $\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{1}{x}dx$.

Інтегруючи, знаходимо: $-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|C|$ або $-\frac{1}{2u^2}=\ln|uxC|$.

Підставляючи $u=\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл початкового рівняння: $-\frac{x^2}{2y^2}=\ln|Cy|,\ 2y^2\ln|Cy|+x^2=0.$

Отримати *y* як явну функцію від *x* у цьому випадку неможливо. Але тут легко виразити *x* через *y* : $x=\pm|y|\sqrt{-2\ln|Cy|}.$

Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних

Крім рівнянь, описаних вище, існує клас рівнянь, які за допомогою певних підстановок можуть бути зведені до однорідних рівнянь першого порядку.

Це рівняння виду $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

Якщо визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \left(\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}\right)$, то змінні можуть бути розділені лінійною підстановкою $x = u + h; y = v + k;$

де h і k – розв'язок системи рівнянь $\{ah+bk+c=0 ¿¿¿¿$.

У результаті отримуємо рівняння $\frac{du}{dv} = f\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right)$, яке є однорідним рівнянням першого порядку.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$.

Розв'язання. Перетворимо початкове рівняння

$(x-2y+3)\frac{dy}{dx} = -2x-y+1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y+1}{x-2y+3}$.

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+1=5 \neq 0$.

Розв'язуємо систему рівнянь

$$\{-2h-k+1=0 ¿¿¿¿$$

Застосовуємо підстановку $x=u-1/5;\ y=v+7/5;$ до вихідного рівняння (можна і до перетвореного):

$$\left(u-\frac{1}{5}-2v-\frac{14}{5}+3\right)dv+\left(2u-\frac{2}{5}+v+\frac{7}{5}-1\right)du=0,$$

$$(u-2v)dv+(2u+v)du=0,$$

$\frac{du}{dv} = \frac{2u+v}{2v-u} = \frac{2+\frac{v}{u}}{2\frac{v}{u}-1}$ – однорідне рівняння першого порядку.

Застосовуємо замінну $\frac{v}{u}=t,\ v=ut,\ v'=t'u+t.$ Під час підстановки у вираз, записаний вище, маємо: $t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}$.

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dt}{du}u=\frac{2+t}{2t-1}-t=\frac{2+t-2t^2+t}{2t-1}=\frac{2(1+t-t^2)}{2t-1},$$

$$\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt, \qquad \int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+t-t^2|=\ln|u|+\ln C_1$$

$$\ln|1+t-t^2|=-2\ln|C_1u|$$

$$\ln|1+t-t^2|=\ln|\frac{C_2}{u^2}|;\;\; 1+t-t^2=\frac{C_2}{u^2};$$

Переходимо тепер до початкової функції y і змінної x.

$$t=\frac{v}{u}=\frac{y-7/5}{x+1/5}=\frac{5y-7}{5x+1},\;\; u=x+1/5,$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1}-\left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2=\frac{25C_2}{(5x+1)^2},$$

$$(5x+1)^2+(5y-7)(5x+1)-(5y-7)^2=25C_2,$$

$$25x^2+10x+1+25xy+5y-35x-7-25y^2+70y-49=25C_2,$$

$$25x^2-25x+25xy+75y-25y^2=25C_2+49-1+7,$$

$$x^2-x+xy+3y-y^2=C_2+\frac{55}{25}=C;$$

Отже, вираз $x^2-x+xy+3y-y^2=C$ є загальним інтегралом вихідного диференціального рівняння.

У випадку, якщо у вихідному рівнянні виду $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0,\; \left(\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\right)$, то попередній підхід не працює, бо приводить до системи з виродженою матрицею. Але завдяки підстановці $ax+by=t$ можна легко перетворити наведене рівняння у рівняння зі змінними, що розділяються.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0$.

Розв'язання. Перетворимо початкове рівняння

$$2(x+y)\frac{dy}{dx}=-3x-3y+1,\;\; \frac{dy}{dx}=\frac{-3x-3y+1}{2x+2y}=-\frac{3x+3y-1}{2x+2y}.$$

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6=0$.

Застосовуємо підстановку $3x+3y=t$. Тоді $t'=3+3y'$, а значить, $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{t'}{3}-1$. Окрім того, $2x+2y=\frac{2}{3}(3x+3y)=\frac{2}{3}t$.

Підставляємо цей вираз у вихідне рівняння:

$$\frac{t'}{3}-1=-\frac{3(t-1)}{2t},\ 2t(t'-3)=-9t+9,\ 2tt'=6t-9t+9,\ 2tt'=-3t+9.$$

Розділяємо змінні: $\frac{2t}{-3t+9}dt=dx$, $\frac{t}{t-3}dt=-\frac{3}{2}dx$,

$$\int \frac{t}{t-3}dt=-\frac{3}{2}\int dx+C_1,\ \int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt=-\frac{3}{2}\int dx+C_1,$$

$$t+3\ln|t-3|=-\frac{3}{2}x+C_1.$$

Далі повертаємося до початкової функції *y* і змінної *x*:

$$3x+3y+3\ln|3x+3y-3)|=-\frac{3}{2}x+C_1,$$

$$2x+2y+2\ln|3(x+y-1)|=-x+\frac{2}{3}C_1=-x+C_2,$$

$$3x+2y+2\ln 3+2\ln|x+y-1|=C_2,$$

$$3x+2y+2\ln|x+y-1|=C_2-2\ln 3=C.$$

Таким чином, ми одержали загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння:

$$3x+2y+2\ln|x+y-1|=C.$$

1.4. Рівняння в повних диференціалах

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку виду $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо ліва частина цього рівняння являє собою повний диференціал деякої функції $u=F(x,y)$.

Інтегрування такого рівняння зводиться до знаходження цієї функції *u*, після чого розв’язок записується у вигляді $F(x,y)=C$.

Таким чином, для розв’язання треба визначити:

1) у якому випадку ліва частина рівняння являє собою повний диференціал функції *u*;

2) як знайти цю функцію.

Якщо диференціальна форма $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції *u*, то можна записати:

$du=M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$, тобто $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\text{¿¿¿¿}\end{cases}$.

Знайдемо мішані похідні другого порядку, продиференціювавши перше рівняння по *y*, а друге – по *x*:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\text{¿¿¿¿}\end{cases}.$$

Прирівнюючи ліві частини рівнянь, одержуємо *необхідну й достатню умову* того, що ліва частина диференціального рівняння є повним диференціалом. Ця умова також називається *умовою тотальності*: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Тепер розглянемо питання про знаходження власне функції *u.*

Проінтегруємо рівність $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$: $u=\int M(x,y)dx+C(y)$

Внаслідок інтегрування одержуємо не сталу величину *C*, а деяку функцію *C*(*y*), тому що під час інтегрування змінна *y* покладається сталим параметром.

Визначимо функцію *C*(*y*).

Продиференціюємо отриману рівність по *y*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+C'(y),$$

звідки одержуємо: $C'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$.

Для знаходження функції *C*(*y*) необхідно проінтегрувати наведену вище рівність. Однак, перед інтегруванням треба довести, що функція $C(y)$ не залежить від x. Ця умова буде виконана, якщо похідна цієї функції по x дорівнює нулю.

$$\left[C'(y)\right]_x' = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$¿\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Тепер визначаємо функцію $C(y)$:

$$C(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Підставляючи цей результат у вираз для функції u, одержуємо:

$$u = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Тоді загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння буде мати вигляд: $\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy = C$.

Слід зазначити, що під час розв’язання рівнянь у повних диференціалах не обов'язково використовувати отриману формулу. Розв’язання може вийти більш компактним, якщо просто додержуватися методу, яким формула була отримана.

Приклад 1. Розв’язати рівняння $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$.

Розв’язання. Перевіримо умову тотальності:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x; \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Умова тотальності виконується, отже, вихідне диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Визначимо функцію u.

$$u = \int M(x,y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x,y) = 5x^2 - 1,$$

$$C'(y) = -1; \; C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1.$$

Отже, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1$.

Знаходимо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння: $u = x^3 + 5x^2 y - y + C_1 = C_2$, а значить, $x^3 + 5x^2 y - y = C$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$.

Розв’язання. Перевіримо умову тотальності:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(y^3 + \ln x)}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

Умова тотальності виконується, отже, вихідне диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Визначимо функцію u.

$$u = \int M(x,y) dx + C(y) = \int \frac{y}{x} dx + C(y) = y \cdot \ln x + C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln x + C'(y) = N(x,y) = y^3 + \ln x,$$

$$C'(y) = y^3; \; C(y) = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} + C_1.$$

Отже, $u = y \cdot \ln x + \frac{y^4}{4} + C_1$.

Тоді загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння: $y \cdot \ln x + \frac{y^4}{4} = C$.

Інтегрувальний множник

У багатьох випадках рівняння виду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ не є рівнянням у повних диференціалах (порушується умова тотальності). Але за допомогою множення на деяку функцію $\mu(x, y)$ його можна звести до рівняння у повних диференціалах. Функцію $\mu(x, y)$ у цьому випадку називають *інтегрувальним множником* такого рівняння. Для пошуку інтегрувального множника розроблено низку підходів, як аналітичних, так і евристичних.

1.5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння Бернуллі

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним* щодо невідомої функції і її похідної, якщо воно може бути записане у вигляді:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

тоді, якщо права частина $Q(x)$ дорівнює нулю, таке рівняння називається *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням, а якщо права частина $Q(x)$ не дорівнює нулю, то таке рівняння називається *лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням.

$P(x)$ і $Q(x)$ – функції, неперервні на деякому проміжку $a<x<b$.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Розглянемо методи знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку виду $y' + P(x)y = 0$.

Для цього типу диференціальних рівнянь відокремлення змінних не є складним.

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y, \qquad \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|, \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx.$$

Загальний розв'язок: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Для інтегрування лінійних неоднорідних рівнянь першого порядку $y' + P(x)y = Q(x)$ ($Q(x) \neq 0$) застосовуються в основному два методи: метод Бернуллі та метод Лагранжа.

Метод Бернуллі

Суть методу полягає в тому, що шукана функція представляється у вигляді добутку двох функцій $y = uv = u(x) \cdot v(x)$.

Тоді очевидно, що похідна добутку $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$.

Підставляючи у вихідне рівняння, отримуємо:

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + P(x) \cdot uv = Q(x), \qquad u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \left(\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u\right) = Q(x).$$

Далі треба зробити важливе зауваження – оскільки початкова шукана функція була представлена нами у вигляді добутку, то кожен із співмножників, що входять у цей добуток, може бути довільним, обраним як нам зручно.

Наприклад, функція $y=2x^2$ може бути представлена як $y=1\cdot 2x^2$, $y=2\cdot x^2$, $y=2x\cdot x$ тощо.

Таким чином, можна одну із утворюючих добуток функцій вибрати так, що вираз в дужках буде рівним нулю: $\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u=0$.

Внаслідок цього, можна отримати функцію *u*, проінтегрувавши останнє співвідношення як однорідне диференціальне рівняння за описаною вище схемою:

$$\frac{du}{dx}=-P(x)u, \quad \frac{du}{u}=-P(x)dx, \quad \int\frac{du}{u}=-\int P(x)dx, \quad \ln|u|=-\int P(x)dx,$$

$$u=e^{-\int P(x)dx}.$$

Для знаходження другої невідомої функції *v* підставимо отриманий вираз для функції *u* у попереднє вихідне рівняння $u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\left(\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u\right)=Q(x)$ із врахуванням того, що вираз, що стоїть в дужках, дорівнює нулю.

$$e^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x), \quad dv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Інтегруючи, можемо знайти функцію *v*: $v=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$.

Тобто ми отримали другу складову добутку $y=uv$, що і визначає шукану функцію.

Підставляючи отримані значення, одержуємо:

$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$, де *C* – довільний коефіцієнт.

Це співвідношення може вважатися розв’язком неоднорідного лінійного диференціального рівняння в загальному вигляді за методом Бернуллі.

Метод Лагранжа

Метод Лагранжа розв'язання неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь ще називають *методом варіації довільної сталої*.

Повернемося до поставленої задачі:

$$y' + P(x)\,y = Q(x).$$

Перший крок цього методу полягає у відкиданні правої частини рівняння й заміні її нулем:

$$y' + P(x)\,y = 0.$$

Далі знаходиться розв'язок однорідного диференціального рівняння, що вийшло:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, щоб знайти відповідний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, будемо вважати сталу C_1 деякою функцією від x.

Тоді за правилами диференціювання добутку функцій отримуємо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(-P(x)\right).$$

Підставляємо отримане співвідношення у вихідне рівняння:

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x) P(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x) C_1(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Із цього рівняння визначимо змінну функцію $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x) e^{\int P(x)dx} dx.$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Підставляючи це значення у вихідне рівняння, одержуємо:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right).$$

Таким чином, ми одержали результат, що повністю збігається з результатом розрахунку за методом Бернуллі.

Під час вибору методу розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку варто керуватися простотою інтегрування функцій, що входять у отриманий інтеграл. На практиці під час розв'язування лінійних диференціальних рівнянь методом Бернуллі або методом Лагранжа часто доцільніше використовувати наведені алгоритми, а не отримані кінцеві формули.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Спочатку приведемо це рівняння до стандартного виду: $y' + \frac{1}{x^2} y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Застосуємо отриману вище формулу, якщо $P = \frac{1}{x^2}, \quad Q = ae^{\frac{1}{x}}$,

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \cdot \left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2} dx} dx + C \right),$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C \right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\int adx + C \right),$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} (ax + C).$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' - \frac{1}{\sin x} y = tg \frac{x}{2}$.

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Згідно з методом Бернуллі, його розв'язок шукатимемо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y і y' в початкове рівняння, маємо:

$$u'v + uv' - \frac{1}{\sin x} uv = tg \frac{x}{2},$$

$$u'v + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{1}{\sin x} v \right) = tg \frac{x}{2}.$$

Далі виберемо функцію $v(x)$ так, щоб $\frac{dv}{dx} - \frac{1}{\sin x} v = 0$, тоді

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{\sin x}, \quad \ln|v| = \ln|tg \frac{x}{2}|,$$

а значить $v(x)=tg\frac{x}{2}$.

Підставляючи $v(x)$ в початкове рівняння, знаходимо $u(x)$:

$\frac{du}{dx}tg\frac{x}{2}=tg\frac{x}{2};\qquad \frac{du}{dx}=1,$

$du=dx,\quad u=x+C.$

Отже, $y=(x+C)tg\frac{x}{2}$ – загальний розв'язок початкового рівняння.

Рівняння Бернуллі.

Означення. *Рівнянням Бернуллі* називається рівняння виду $y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n$, де P і Q – деякі функції від x або сталі, а n – дійсне число, відмінне від 0 та 1 (інакше матимемо лінійне рівняння).

Для розв'язання рівняння Бернуллі, як правило, застосовують підстановку $z=\frac{1}{y^{n-1}}=y^{1-n}$, за допомогою якої рівняння Бернуллі приводиться до лінійного.

Для цього розділимо вихідне рівняння на y^n:

$\frac{y'}{y^n}+P(x)\frac{1}{y^{n-1}}=Q(x)$.

Застосуємо вищевказану підстановку, врахувавши, що

$$z'=\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)'=\left(y^{1-n}\right)'=(1-n)y^{-n}\cdot y'=-\frac{(n-1)y'}{y^n},$$

а тому $\frac{y'}{y^n}=-\frac{z'}{n-1}$.

Отримуємо $-\frac{z'}{n-1}+P(x)z=Q(x)$, або

$z'-(n-1)P(x)\cdot z=-(n-1)Q(x)$.

Тобто вийшло лінійне неоднорідне рівняння щодо невідомої функції z.

Розв'язок цього рівняння знайдемо у вигляді:

$$z = e^{-\int P_1 dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C\right)$$, врахувавши, що
$Q_1 = -(n-1)Q; \quad P_1 = -(n-1)P.$

Потім зробимо обернену заміну $y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{z}} = z^{\frac{1}{1-n}}$ і отримаємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі. Зауважимо, що особливий розв'язок $y \equiv 0$ матиме місце завжди, якщо $n > 0$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x y' + y = xy^2 \ln x$.

Розв'язання. Приведемо це рівняння до стандартного виду:

$$y' + \frac{1}{x} y = y^2 \ln x.$$

Розділимо рівняння на y^2: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \ln x.$

Виконаємо заміну $z = \frac{1}{y}; \quad z' = -\frac{y'}{y^2}.$

$$-z' + \frac{1}{x} z = \ln x,$$

$$z' - \frac{1}{x} z = -\ln x.$$

При $P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -\ln x$ розв'яжемо отримане лінійне рівняння

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(\int (-\ln x) e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C\right),$$

$$z = e^{\ln x}\left(\int (-\ln x) e^{-\ln x} dx + C\right),$$

$$z = x \cdot \left(\int (-\ln x) \cdot \frac{dx}{x} + C\right),$$

$$z = x \cdot \left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right),$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Зробивши обернену підстановку, отримуємо:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right),$$

$$y = \frac{1}{x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)} = \frac{1}{Cx - \frac{x \cdot \ln^2 x}{2}}.$$

Особливий розв'язок $y \equiv 0$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x y' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Розв'язання. Розділимо обидві частини рівняння на $x\sqrt{y}$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} y' - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Виконаємо заміну $z = \sqrt{y}$.

Врахуємо, що $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} y'$, $y' = 2\sqrt{y}\, z'$, $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$.

Тоді $2z' - \frac{4}{x} z = x$, $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}$.

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння. Для його розв'язання застосуємо метод Лагранжа. Розглянемо відповідне отриманому лінійне однорідне рівняння:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2\,dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dx}{x} + C_1, ¿ \ln|z| = 2\ln|x| + \ln|C|, ¿ z = Cx^2. ¿¿ \int ¿$$

Покладемо $C=C(x)$ і підставимо отриманий результат у лінійне неоднорідне рівняння, з врахуванням того, що

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx}.$$

Отримуємо $2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2 C(x)}{x} = \frac{x}{2}$,

$$x^2\frac{dC(x)}{dx} = \frac{x}{2}, \quad \frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x},$$

$$C(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + \tilde{C}.$$

Одержуємо $z = x^2\left(\tilde{C} + \frac{1}{2}\ln|x|\right)$.

Використавши обернену підстановку $y=z^2$, одержуємо остаточну відповідь: $y=x^4\left(\widetilde{C}+\frac{1}{2}\ln|x|\right)^2$.

Особливий розв'язок $y\equiv 0$.

Варто зауважити, що рівняння Бернуллі також можна інтегрувати за допомогою методу Бернуллі, тобто зразу шукати розв'язок у вигляді $y=u(x)\cdot v(x)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x\,y'+y=y^2\ln x$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $y'+\frac{1}{x}y=y^2\frac{\ln x}{x}$ і покладемо $y=u(x)\cdot v(x)$.

Тоді $y'=u'v+uv'$ і рівняння набуває вигляду

$u'v+uv'+\frac{1}{x}uv=u^2v^2\frac{\ln x}{x}$ або

$v\left(u'+\frac{1}{x}u\right)+uv'=u^2v^2\frac{\ln x}{x}$.

Виберемо функцію *u(x)* такою, щоб виконувалася умова $u'+\frac{1}{x}u=0$.

Отримане рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються. Розв'язуючи його, отримуємо:

$$\frac{du}{dx}=-\frac{u}{x},\ \frac{du}{u}=-\frac{dx}{x},$$

$$\ln|u|=-\ln|x|,\ u=\frac{1}{x}.$$

Підставимо *u(x)*, і рівняння набуває вигляду

$\frac{1}{x}v'=\frac{1}{x^2}v^2\frac{\ln x}{x}$ чи $v'=v^2\frac{\ln x}{x^2}$, звідки

$\frac{dv}{v^2}=\frac{\ln x}{x^2}dx$ і $\int\frac{dv}{v^2}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx-C$.

Отже, $-\frac{1}{v}=\frac{1}{x}(-\ln x-1)-C$, а тому $v=\dfrac{1}{\frac{1}{x}(\ln x+1)+C}$.

Остаточно, $y=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}(\ln x+1)+C}$, а значить $y=\frac{1}{\ln x+1+Cx}$.

Особливий розв’язок $y\equiv 0$.

Розділ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1. Загальні поняття та означення

Означення. *Диференціальним рівнянням n–го порядку* відносно функції $y(x)$ називається рівняння виду:

$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$.

У деяких випадках це рівняння можна розв'язати відносно старшої похідної $y^{(n)}$:

$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$.

Так само як і рівняння першого порядку, рівняння вищих порядків мають нескінченну кількість розв'язків.

Всяка функція $y=\phi(x)$, визначена і *n* разів диференційована на проміжку *(a, b)*, називається *розв'язком* цього рівняння, якщо вона перетворює його на тотожність.

Означення. Розв'язок $y=\phi(x)$ задовольняє *початкові умови* $x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$, якщо

$\phi(x_0)=y_0,\ \phi'(x_0)=y_0',\ \dots,\ \phi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Означення. Знаходження розв'язку рівняння $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$, що задовольняє початкові умови $x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$, називається *розв'язанням задачі Коші*.

Теорема Коші (теорема про необхідні й достатні умови існування розв'язку задачі Коші).

Якщо функція (*n+1*)*-ої змінної вигляду* $f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ *в деякій області D* (*n+1*)*-вимірного простору неперервна й має неперервні частинні похідні по* $y,y',\dots,y^{(n-1)}$*, то яка б не була точка* ($x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$) *у цій області, існує єдиний розв'язок* $y=\phi(x)$ *рівняння* $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$*, визначений в деякому інтервалі, що містить точку* x_0 *та задовольняє початкові умови* $x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$.

Звичайно, тоді вважається, що точка ($x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$) належить області, де виконується умова існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Означення. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння n-го порядку називають таку функцію $\phi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$, яка залежить від n незалежних сталих, якщо:

а) вона є розв'язком диференціального рівняння за будь-яких значень сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

б) за будь-яких початкових умов $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ можна підібрати сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, що функція $\phi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$ задовольняє всі ці початкові умови.

Співвідношення $\Phi\left(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0$, яке неявно визначає загальний розв'язок диференціального рівняння, називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння n-го порядку. Всяка функція, яка отримується з загального розв'язку (загального інтеграла) за конкретних значень сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, називається *частинним розв'язком* (*частинним інтегралом*) відповідного рівняння.

Диференціальні рівняння вищих порядків, розв'язки яких можуть бути знайдені аналітично, можна розділити на кілька основних типів. Розглянемо докладніше методи знаходження розв'язків цих рівнянь.

2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

Зниження порядку диференціального рівняння – основний метод розв'язання рівнянь вищих порядків. Цей метод дає можливість порівняно легко знаходити розв'язок, однак, він застосовний далеко не до всіх рівнянь. Розглянемо випадки, коли можливе зниження порядку.

Рівняння виду $y^{(n)}=f(x)$.

Якщо $f(x)$ – функція, неперервна на деякому проміжку $a<x<b$, то загальний розв'язок нашого рівняння може бути знайдено

n-кратним послідовним інтегруванням. Дійсно, за означенням похідної, маємо

$$y^{(n)}=\frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right)=f(x) \quad \text{чи} \quad d\left(y^{(n-1)}\right)=f(x)dx.$$

Інтегруючи, отримуємо $y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$.

Аналогічно знижуємо порядок початкового диференціального рівняння ще на одиницю: $y^{(n-1)}=\frac{d}{dx}\left(y^{(n-2)}\right)=\int f(x)dx+C_1$,

отже $d\left(y^{(n-2)}\right)=\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx$, а тому $d\left(y^{(n-2)}\right)=\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1dx$.

Інтегруючи, маємо $y^{(n-2)}=\int\int f(x)dxdx+C_1x+C_2$.

Через n таких кроків знаходимо потрібну невідому функцію

$$y=\int\int\ldots\int f(x)dxdx\ldots dx+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n,$$

яка і є загальним інтегралом початкового рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл рівняння $y''=\sin(kx)$.

Розв'язання. Маємо $\frac{d}{dx}\left(y'\right)=\sin(kx)$.

Розділяючи змінні, отримаємо $d\left(y'\right)=\sin(kx)dx$, звідки

$$y'=\int\sin(kx)dx+C_1=-\frac{1}{k}\cos(kx)+C_1.$$

Далі $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{k}\cos(kx)+C_1$ чи $dy=\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)+C_1\right]dx$.

Інтегруючи, отримаємо $y=\int\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)+C_1\right]dx+C_2$, а отже $y=\left(-\frac{1}{k^2}\right)\sin(kx)+C_1x+C_2$. Це і є шуканий загальний розв'язок.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'''=e^{2x}$ з початковими умовами (0, 1, –1, 0) (тобто $x_0=0$, $y_0=1$, $y_0'=-1$, $y_0''=0$).

Розв'язання. $y''=\int e^{2x}dx+C_1=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1$,

$$y'=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C_1\right)dx=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3.$$

Підставимо початкові умови: $1=\frac{1}{8}+C_3,\ -1=\frac{1}{4}+C_2,\ 0=\frac{1}{2}+C_1$, звідки $C_1=-\frac{1}{2},\ C_2=-\frac{5}{4},\ C_3=\frac{7}{8}$.

Отримуємо розв'язок задачі Коші: $y=\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{7}{8}$.

Рівняння, що не містять явно шуканої функції і її похідних до порядку k–1 включно.

Це рівняння виду $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\dots,y^{(n)})=0$.

У рівняннях такого типу можливе зниження порядку на k одиниць. Для цього роблять заміну змінної:

$y^{(k)}=z;\ \ y^{(k+1)}=z';\ \ \dots\ \ y^{(n)}=z^{(n-k)}$.

Тоді одержуємо рівняння n–k-го порядку: $F(x,z,z',\dots,z^{(n-k)})=0$.

Тепер припустимо, що отримане диференціальне рівняння можна проінтегрувати і сукупність його розв'язків виражається співвідношенням:

$z=\psi(x,C_1,C_2,\dots,C_{n-k})$.

Роблячи зворотну підстановку, маємо:

$y^{(k)}=\psi(x,C_1,C_2,\dots,C_{n-k})$

Інтегруючи отримане співвідношення послідовно k разів, отримуємо остаточну відповідь:

$y=\phi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$.

У випадку, коли $k=n-1$, вищевказане рівняння зводиться до диференціального рівняння першого порядку:

$F(x,y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ або $y^{(n)}=f(x,y^{(n-1)})$.

Заміною $y^{(n-1)}=p(x),\ \ y^{(n)}=p'=\frac{dp}{dx}$ воно приводиться до рівняння $p'=f(x,p)$, яке можна розв'язати. Нехай загальний розв'язок має вигляд $p(x)=\phi(x,C_1)$, тоді $y^{(n-1)}=\phi(x,C_1)$, і потім, після $n-1$ кроку інтегрування, ми зможемо отримати загальний розв'язок початкового рівняння.

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння $y''' = \frac{y''}{x}$.

<u>Розв’язання.</u> Застосовуємо підстановку $z = y''$, $z' = y'''$:

$z' = \frac{z}{x}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$,

$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C_1|$,

$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1| = \ln|C_1 x|$,

$z = C_1 x$.

Зробивши зворотну заміну, отримуємо:

$y'' = C_1 x$, $y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2$,

$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3$.

Загальний розв’язок вихідного диференціального рівняння:

$y = Cx^3 + C_2 x + C_3$;

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок рівняння

$\frac{d^2 y}{dx^2} = a\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$.

Розв’язання. Вважаючи $y' = p$, $y'' = p'$, отримаємо

$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1 - p^2}$,

$\frac{dp}{\sqrt{1 - p^2}} = adx$, звідки знаходимо

$\arcsin p = ax + C_1$, а отже

$p = \sin(ax + C_1)$.

Таким чином, $\frac{dy}{dx} = \sin(ax + C_1)$, а інтегруючи останнє, знаходимо $y = -\frac{1}{a}\cos(ax + C_1) + C_2$ – загальний розв’язок початкового диференціального рівняння.

Звернемо увагу, що останнє рівняння має вигляд $y'' = f(x, y')$ – такі рівняння другого порядку ще називають *рівняннями без y*. Вищевказаною заміною порядок таких рівнянь понижується до першого, що дає можливість, використовуючи перший розділ цього посібника, досить просто знайти загальний розв'язок отриманого рівняння.

Зауважимо, що частинним випадком такого рівняння є рівняння вигляду $y''=f(y')$, яке *не містить явно шуканої функції у та незалежної змінної х*. Метод його розв'язування такий самий – за допомогою заміни $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$. Тоді це рівняння приймає вигляд рівняння з відокремлюваними змінними: $p'=f(p)$ і нескладно інтегрується.

Рівняння, що не містять явно незалежної змінної

Це рівняння виду $F(y, y', \ldots, y^{(n)})=0$.

Порядок таких рівнянь може бути знижений на одиницю за допомогою заміни змінних $y'=p(y)$. Тоді варто врахувати, що

$$y''=\frac{d\,y'}{dx}=\frac{d\,y'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p,$$

$$y'''=\frac{d\,y''}{dx}=\frac{d\,y''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d\,y''}{dy}\cdot p=\frac{d\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)}{dy}\cdot p=\frac{d^2 p}{dy^2}\cdot p^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\cdot p \quad \text{тощо.}$$

Підставляючи ці значення у вихідне диференціальне рівняння, отримуємо рівняння нижчого порядку:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0.$$

Якщо це рівняння проінтегрувати, і $\Phi(y, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})=0$ – його загальний розв'язок, то для розв'язання початкового диференціального рівняння залишається розв'язати рівняння першого порядку: $\Phi(y, y', C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})=0$.

У випадку $n=2$ маємо справу з рівняннями другого порядку $y''=f(y, y')$ – такі рівняння називають *рівняннями без х*.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y\,y''-(y')^2-4\,y\,y'=0$.

Розв'язання. Маємо рівняння без x. Зробимо заміну змінної $y' = p(y)$, тоді $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$, і приходимо до рівняння

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0,$$

$$p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0.$$

Розглянемо два випадки.

1) $y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0$, звідки $\frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y}$.

Для розв'язання отриманого однорідного диференціального рівняння зробимо заміну змінної: $u = \frac{p}{y}$. Тоді $p = yu$, $\frac{dp}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$ і

$$u + y\frac{du}{dy} = 4 + u, \quad y\frac{du}{dy} = 4, \quad du = 4\frac{dy}{y},$$

$$\int du = 4\int \frac{dy}{y} + 4\ln|C_1|, \quad u = 4\ln|y| + 4\ln|C_1|, \quad u = 4\ln|C_1 y|,$$

$$\frac{p}{y} = 4\ln|C_1 y|, \quad p = 4y\ln|C_1 y|.$$

Зі врахуванням того, що $p = \frac{dy}{dx}$, одержуємо:

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|, \quad \int \frac{dy}{4y\ln|C_1 y|} = \int dx,$$

$$x = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(\ln|C_1 y|\right)}{\ln|C_1 y|} + C_2 = \frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1 y|\right| + C_2.$$

Загальний інтеграл має вигляд: $\ln\left|\ln|C_1 y|\right| = 4x + C$.

2) $p = 0, \quad y' = 0, \quad y = C$.

Таким чином, одержали два загальних розв'язки.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'' = \left(y'\right)^2$.

Розв'язання. Покладемо $y' = p(y)$, тоді маємо $y'' = pp'$ і отримуємо рівняння першого порядку $ypp' = p^2$ або $p \cdot \left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0$.

У результаті маємо два окремих рівняння:

$p=0$ та $y\dfrac{dp}{dy}=p$.

З першого отримуємо $p=0,\ \ y'=0,\ \ y=C$.

З другого знаходимо $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dy}{y}$, $p=C_1 y$, $\dfrac{dy}{dx}=C_1 y$, звідки

$\dfrac{dy}{y}=C_1 dx$,

$\ln|y|=C_1 x+C_2$,

$y=e^{C_1 x+C_2}$ чи, остаточно, загальний розв'язок − це функція $y=\widetilde{C}_2 e^{C_1 x}$ $\left(\widetilde{C}_2 \overset{df}{=} e^{C_2}\right)$.

Розв'язок $y=C$ вийде з цього, якщо $C_1=0$ і не представляє окремого інтересу.

2.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку* називається будь-яке рівняння першого ступеня щодо шуканої функції y та її похідних $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ виду:

$$p_0 y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1} y'+p_n y=f(x),$$

де $p_0, p_1, \ldots, p_n$ – функції від x або сталі величини, причому $p_0 \neq 0$.

Означення. Якщо $f(x)=0$, то наше рівняння називається *лінійним однорідним рівнянням*, або рівнянням *без правої частини*, а якщо $f(x)\neq 0$, то рівняння називається *лінійним неоднорідним рівнянням*, або рівнянням *з правою частиною*.

Означення. Якщо всі коефіцієнти $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$ – сталі числа, то це рівняння називається *лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Відзначимо одну важливу властивість лінійних рівнянь вищих порядків, що відрізняє їх від нелінійних. Для нелінійних рівнянь частинний інтеграл знаходиться із загального, а для лінійних – навпаки, загальний інтеграл складається із частинних. Лінійні рівняння являють собою найбільш вивчений клас диференціальних рівнянь вищих порядків. Це пояснюється порівняною простотою знаходження розв'язку. Якщо під час розв'язання якихось практичних задач потрібно розв'язати нелінійне диференціальне рівняння, то часто застосовуються наближені методи, що дають змогу замінити таке рівняння «близьким» до нього лінійним.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку з довільними коефіцієнтами

Спочатку встановимо деякі загальні властивості лінійних однорідних рівнянь, обмежуючись спочатку рівняннями другого порядку $p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$, або в наведеній формі $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Теорема. *Якщо функції y_1 і y_2 є розв'язками рівняння, то їхня сума $y_1 + y_2$ також є його розв'язком.*

Теорема. *Якщо функція y_1 є розв'язком рівняння, то функція Cy_1, де C – стале число, також є його розв'язком.*

Означення. Два розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку y_1 і y_2 називаються *лінійно незалежними* на відрізку $[a;b]$, якщо їхнє відношення на цьому відрізку не є сталою величиною, тобто $\frac{y_1}{y_2} \neq const$. У протилежному випадку розв'язки називають *лінійно залежними* $\left(\frac{y_1}{y_2} = \lambda \leftrightarrow y_1 = \lambda \cdot y_2 \right)$.

Означення. Якщо y_1 *і* y_2 – функції від *x*, то визначник $W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ називається *вронскіаном*, або *визначником Вронського* даних функцій.

Теорема. *Якщо функції y_1 і y_2 лінійно залежні на відрізку $[a;b]$, то їхній вронскіан на цьому відрізку тотожно дорівнює нулю.*

Теорема. *Якщо визначник Вронського $W(y_1, y_2)$, складений для розв'язків y_1 і y_2 рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, не дорівнює нулю за якого-небудь значення $x = x_0$ на відрізку $[a;b]$, де коефіцієнти* *рівняння неперервні, то він не перетворюється на нуль ні за якого значення x на цьому відрізку.*

Зауваження. Якщо визначник Вронського дорівнює нулю за якого-небудь *x*, то він буде рівним нулю за будь-якого *x*.

Теорема. *Якщо розв'язки* y_1 *і* y_2 *рівняння* $y''+a_1 y'+a_2 y=0$ *лінійно незалежні на відрізку* $[a;b]$, *то визначник Вронського* $W(y_1,y_2)$, *складений для цих розв'язків, не перетворюється на нуль у жодній точці вказаного відрізка.*

Теорема. *Якщо* y_1 *і* y_2 *– два лінійно незалежні розв'язки рівняння* $y''+a_1 y'+a_2 y=0$, *то* $y=C_1 y_1+C_2 y_2$ *за довільних сталих* C_1, C_2 *є загальним розв'язком цього рівняння.*

Теорема. *Якщо задано рівняння виду* $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ *і відомий один ненульовий розв'язок* $y=y_1$, *то загальний розв'язок може бути знайдений за формулою*:

$$y=C_1 y_1+C_2 y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx.$$

З вищевикладеного видно, що відшукання загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зводиться до знаходження двох його лінійно незалежних розв'язків.

Однак, навіть для рівняння другого порядку, якщо його коефіцієнти залежать від *x*, ця задача не може бути вирішена в загальному виді. (Проте, якщо відомо один ненульовий частинний розв'язок, то задача може бути вирішена, хоча знайти чи вгадати цей розв'язок буває часто достатньо складно.)

Приклад 1. Розв'язати рівняння $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$.

Розв'язання. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку. Для знаходження загального розв'язку необхідно відшукати якийсь частинний розв'язок. Таким частинним розв'язком буде функція $y_1=x$. Справді,

$$y_1'=1,\; y_1''=0,\; 0-2x+2x=0.$$

Вихідне диференціальне рівняння можна привести до виду:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0.$$

Згідно з останньою теоремою, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} dx + C_2 x,$$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx + C_2 x,$$

$$y = C_1 x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2 x,$$

$$y = C_1 x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx + C_2 x,$$

$$y = C_1 x \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) + C_2 x.$$

Остаточно отримуємо загальний розв'язок у вигляді:

$$y = \frac{C_1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - C_1 + C_2 x.$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку $y'' + p y' + qy = 0$, де p і q – сталі числа.

Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння, достатньо встановити два його частинних лінійно незалежних розв'язки. Будемо шукати їх у вигляді $y = e^{kx}$, де $k = const.$ Тоді $y' = ke^{kx}$ і $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставимо в рівняння: $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$,

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то отримуємо:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Це рівняння називається *характеристичним рівнянням* початкового диференціального.

Як відомо, $k_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \ k_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Можливі три випадки:

I) k_1, k_2 – дійсні і різні, тоді частинними розв'язками нашого диференціального рівняння будуть функції $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ (лінійно незалежні, бо $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} ¿ const$). Таким чином, загальний розв'язок матиме вигляд: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

II) k_1, k_2 – комплексні (спряжені), $k_1 = \alpha + i\beta, \ k_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha = -\frac{p}{2}, \ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Тоді частинні розв'язки $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$, $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$ – комплексні функції дійсного аргументу.

Але очевидно, що якщо яка-небудь комплексна функція $y = u(x) + i \cdot v(x)$ задовольняє рівняння $y'' + p y' + qy = 0$, то це рівняння задовольняє і функції $u(x)$ та $v(x)$, взяті окремо. Справді, нехай $y = u + i \cdot v$, тоді

$y'' + p y' + qy = (u+iv\{\,)'' + p(u+iv\{\,)¿' + q(u+iv) = (u''+pu'+qu) + i\cdot(v''+pv'+qv) = 0¿$,

а отже $\begin{cases} u''+pu'+qu=0 \\ v''+pv'+qv=0 \end{cases}$.

У нашому випадку за формулою Ейлера:
$e^{(\alpha\pm i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x \pm i\cdot\sin\beta x)$.

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x + i\cdot\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x - i\cdot\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - i\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

А тому дійсними частинними розв’язками нашого рівняння будуть функції $\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

$\dfrac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \dfrac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = ctg\,\beta x \neq const$, отже, ці функції лінійно незалежні.

Таким чином, загальний розв’язок матиме вигляд: $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

III) $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$ – дійсні і рівні, тоді першим частинним розв’язком нашого диференціального рівняння буде функція $y_1 = e^{k_1 x} = e^{-\frac{p}{2}x}$. Тоді згідно з попередньою теоремою маємо:

$$y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2}dx = e^{-\frac{p}{2}x}\int\frac{e^{-\int p dx}}{(e^{-\frac{p}{2}x})^2}dx = e^{-\frac{p}{2}x}\int\frac{e^{-px}}{e^{-px}}dx = e^{-\frac{p}{2}x}\int dx = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Таким чином, загальний розв’язок матиме вигляд:
$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} ¿ e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$.

Приклад 2. $y'' + y' - 2y = 0$.

Розв’язання. $k^2 + k - 2 = 0$, $D = 9 > 0$, $k_1 = 1,\ k_2 = -2$, $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$.

Приклад 3. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв’язання. $k^2 + 2k + 5 = 0$, $D = -16 < 0$, $k_1 = -1+2i,\ k_2 = -1-2i$, $\tilde{y}_1 = e^{-x}\cos 2x$, $\tilde{y}_2 = e^{-x}\sin 2x$, $y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

Приклад 4. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Розв'язання. $k^2-4k+4=0$, $D=0$, $k_1=k_2=2$,
$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=e^{2x}(C_1+C_2x)$.

Як бачимо, розглянутий вище метод знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння фактично зводиться до знаходження коренів його характеристичного рівняння та встановлення відповідних їм частинних розв'язків (*фундаментальної системи розв'язків*) без використання техніки інтегрування.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку

Розглянутий вище метод побудови загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами можна поширити і на рівняння *n*–го порядку. Не розглядаючи детально теорію, сформулюємо основні твердження.

Нехай маємо рівняння *n–го порядку* вигляду:
$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$.

Означення. Якщо для всіх значень $x\in[a;b]$ має місце рівність $\phi_n(x)=A_1\phi_1(x)+A_2\phi_2(x)+\ldots+A_{n-1}\phi_{n-1}(x)$, де $A_1, A_2,\ldots, A_{n-1}$ – сталі числа, то кажуть, що функція $\phi_n(x)$ *лінійно виражається* через функції $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_{n-1}(x)$.

Означення. *n* функцій $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$ називаються *лінійно незалежними*, якщо жодна з них лінійно не виражається через інші.

Зауваження. Якщо функції $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ – лінійно залежні, то знайдуться такі сталі $A_1, A_2,\ldots, A_n$, не всі одночасно рівні нулю, що $A_1\phi_1+A_2\phi_2+\ldots+A_n\phi_n=0$.

Означення. *Фундаментальною системою розв'язків* лінійного однорідного диференціального рівняння *n*-го порядку на відрізку $[a;b]$ називається всяка система *n* лінійно незалежних на цьому інтервалі частинних розв'язків рівняння.

Означення. Якщо з функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ скласти визначник

$$W=W\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$ то він називається *визначником Вронського* або *вронскіаном* цих функцій.

Теорема. *Якщо функції* $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *лінійно залежні, то складений для них визначник Вронського дорівнює нулю.*

Теорема. *Якщо функції* $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *лінійно незалежні, то складений для них визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці розглянутого відрізка.*

Теорема. *Для того, щоб система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння* $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *була фундаментальною, необхідно й достатньо, щоб складений для них визначник Вронського був відмінним від нуля.*

Теорема. *Якщо* $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *– фундаментальна система розв'язків на відрізку* $[a;b]$*, то загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння є лінійною комбінацією цих розв'язків.*

$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, де C_i – *сталі* коефіцієнти.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Розв'язок диференціального рівняння виду $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$ будемо шукати у вигляді $y=e^{kx}$, де $k=const$.

Оскільки $y'=ke^{kx};\ y''=k^2e^{kx};\ \ldots\ y^{(n)}=k^ne^{kx}$, то рівняння набуває вигляду $e^{kx}(k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n)=0$.

При цьому многочлен $k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n$ називається *характеристичним многочленом* нашого диференціального рівняння.

Оскільки $e^{kx}\neq0$, то потрібно, щоб $k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n=0$ – це рівняння називається *характеристичним рівнянням*.

Як і будь-яке алгебраїчне рівняння степеня n, характеристичне рівняння $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ має n коренів. Кожному кореню характеристичного рівняння відповідає певний частинний розв'язок початкового диференціального рівняння.

Залежно від коефіцієнтів характеристичне рівняння може мати або n різних дійсних коренів, або серед дійсних коренів можуть бути кратні корені, а можуть бути і комплексно-спряжені корені, як різні, так і кратні.

Сформулюємо загальне правило знаходження розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. Виписуємо характеристичне рівняння й знаходимо його корені.

2. Знаходимо частинні розв'язки диференціального рівняння, причому:

а) кожному дійсному кореню кратності 1 відповідає розв'язок e^{kx};

б) кожному дійсному кореню кратності m ставиться у відповідність m розв'язків: $e^{kx};\ \ xe^{kx};\ \ \ldots\ \ x^{m-1}e^{kx};$

в) кожній парі однократних комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність два розв'язки: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ та $e^{\alpha x}\sin\beta x;$

г) кожній парі m-кратних комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність $2m$ розв'язків:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ \ldots\ \ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ \ldots\ \ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3. Записуємо довільну лінійну комбінацію знайдених розв'язків. Ця лінійна комбінація й буде загальним розв'язком вихідного лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y''' - y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^3 - 1 = 0$ і розв'яжемо його: $(k-1)(k^2+k+1)=0,\quad k_1 = 1,\quad k^2+k+1=0,$

$$D = 1-4 = -3,\quad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Дійсному кореню $k_1=1$ відповідає частинний розв'язок $y_1=e^x$, а парі комплексно-спряжених коренів $k_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ відповідає пара функцій $y_2=e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ і $y_3=e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Загальний же розв'язок рівняння має вигляд: $y=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y'''-7y''+6y'=0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння: $k^3-7k^2+6k=0$ має розв'язки $k(k^2-7k+6)=0$, $k_1=0,\ k_2=1,\ k_3=6$ – дійсні і однократні, а тому загальний розв'язок: $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{6x}$.

Приклад 7. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння $y'''+4y''+13\{y'=0¿$ за початкових умов $y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=-4$.

Розв'язання. Для того, щоб розв'язати задачу Коші, спочатку відшукаємо загальний розв'язок рівняння. Запишемо відповідне характеристичне рівняння $\lambda^3+4\lambda^2+13\lambda=0$. Привівши його до вигляду $\lambda\left(\lambda^2+4\lambda+13\right)=0$, знаходимо корені $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-2+3i,\ \lambda_3=-2-3i$.

Тоді фундаментальна система розв'язків рівняння має вигляд $y_1=e^{0x}=1,\ y_2=e^{-2x}\cos 3x,\ y_3=e^{-2x}\sin 3x$.

Загальний розв'язок запишеться у вигляді $y(x)=C_1+C_2e^{-2x}\cos 3x+C_3e^{-2x}\sin 3x$.

Підберемо тепер такі значення довільних сталих *C₁*, *C₂*, *C₃*, щоб знайдений розв'язок задовольняв задані початкові умови. Знайдемо похідні:

$$y'=C_2e^{-2x}\left(-2\cos 3x-3\sin 3x\right)+C_3e^{-2x}\left(-2\sin 3x+3\cos 3x\right),$$

$$y''=e^{-2x}\left[\left(12C_2-5C_3\right)\sin 3x+\left(-5C_2-12C_3\right)\cos 3x\right].$$

Тоді в початковій точці $x_0=0$ матимемо:

$$y(0)=C_1+C_2e^{-2\cdot 0}\cos 3\cdot 0+C_3e^{-2\cdot 0}\sin 3\cdot 0=C_1+C_2,$$

$$y'(0)=C_2e^{-2\cdot 0}(-2\cos 3\cdot 0-3\sin 3\cdot 0)+C_3e^{-2\cdot 0}(-2\sin 3\cdot 0+3\cos 3\cdot 0)=$$

$$\text{¿}C_2\cdot 1\cdot(-2\cdot 1-3\cdot 0)+C_3\cdot 1\cdot(-2\cdot 0+3\cdot 1)=-2C_2+3C_3,$$

$$y''(0)=e^{-2\cdot 0}[(12C_2-5C_3)\sin 3\cdot 0+(-5C_2-12C_3)\cos 3\cdot 0]=$$

$$\text{¿}(12C_2-5C_3)\cdot 0+(-5C_2-12C_3)\cdot 1=-5C_2-12C_3.$$

Використавши початкові умови, отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення C_1, C_2 і C_3: $\{C_1+C_2=1,\text{¿}\,|\,-2C_2+3C_3=1,\text{¿¿¿¿}$

звідки знаходимо $C_1=1,\ C_2=0,\ C_3=\dfrac{1}{3}$.

Таким чином, шуканим розв’язком задачі Коші буде функція $y(x)=1+\dfrac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x$.

2.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з довільними коефіцієнтами

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку виду $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=f(x)$.

За цієї умови будемо вважати, що коефіцієнти і права частина цього рівняння неперервні на деякому інтервалі (скінченному або нескінченному) функції.

Означення. Рівняння виду $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0$, ліва частина якого співпадає з лівою частиною лінійного неоднорідного рівняння, а права рівна нулю, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням, відповідним даному неоднорідному*.

Теорема. *Загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння* $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=f(x)$ *в деякій області є сума будь-якого частинного його розв'язку і загального розв'язку відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.*

$$y_{заг.неоднор.}=y_{част.неоднор.}+y_{заг.однор.}$$

Таким чином, для розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння необхідно знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння і якимось чином відшукати один частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Зазвичай він знаходиться підбором.

На практиці зручно застосовувати метод *варіації довільних сталих*. Для цього спочатку знаходять загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння у вигляді:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i.$$

Потім, вважаючи коефіцієнти C_i функціями від x, шукають розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i.$$

Можна довести, що для знаходження функцій $C_i(x)$ треба розв’язати систему рівнянь:

$$C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\dots+C_n'(x)y_n=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i=0,\quad C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\dots+C_n'(x)y_n'=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i'=0,\ \dots$$

Покажемо це для випадку рівнянь другого порядку $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$.

Нехай функції y_1 і y_2 є незалежними частинними розв’язками відповідного однорідного рівняння $y''+a_1y'+a_2y=0$, тоді його загальний розв’язок має вигляд $y=C_1y_1+C_2y_2$. Будемо шукати розв’язок неоднорідного рівняння у вигляді $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$, де $C_1(x)$, $C_2(x)$ – нові невідомі функції від x. Для їхнього знаходження необхідні два рівняння, які містять ці функції. Функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ повинні задовольняти умову, що якщо у вихідне рівняння замість *y(x)* підставити вираз $C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$, то рівність не порушиться.

Продиференцюємо $y'=C_1'(x)y_1(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_2(x)y_2'(x)$ і накладемо на функції C_1 і C_2 додаткову умову $C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0$. Тоді друга похідна матиме вид $y''=C_1'(x)y_1'+C_1(x)y_1''+C_2'(x)y_2'+C_2(x)y_2''$.

Підставляючи вирази для y, y', y'' в наше неоднорідне рівняння, отримаємо:

$$C_1'(x)y_1'+C_1(x)y_1''+C_2'(x)y_2'+C_2(x)y_2''+a_1(C_1(x)y_1'+C_2(x)y_2')+a_2(C_1(x)y_1+C_2(x)y_2)=$$
$$=C_1(x)\left[y_1''+a_1y_1'+a_2y_1\right]+C_2(x)\left[y_2''+a_1y_2'+a_2y_2\right]+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x).$$

Вирази у квадратних дужках тотожно рівні нулю, оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв’язками відповідного однорідного рівняння, а тому отримуємо: $C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x)$.

Отже, функція $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ є розв'язком нашого неоднорідного рівняння, якщо функції C_1(x) та C_2(x) будуть задовольняти систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases}$$

Розв'язуємо її, як лінійну алгебраїчну відносно $C_1'(x),\ C_2'(x)$: $C_1'(x)=\phi_1(x),\ C_2'(x)=\phi_2(x)$, ($\phi_1(x), \phi_2(x)$ – відомі функції) та інтегруємо:

$C_1(x)=\int\phi_1(x)dx+\widetilde{C}_1,\ C_2(x)=\int\phi_2(x)dx+\widetilde{C}_2$, де $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ – сталі інтегрування.

Підставляючи знайдені вирази для $C_1(x)$, $C_2(x)$ в $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$, знайдемо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_1(x)\int\phi_1(x)dx+y_2(x)\int\phi_2(x)dx.$$

Приклад 1. Знайти розв'язок рівняння: $y''+y=tgx$.

Розв'язання. Спочатку розглянемо відповідне цьому неоднорідному однорідне рівняння $y''+y=0$.

Складаємо його характеристичне рівняння $\lambda^2+1=0$, корені якого будуть: $\lambda_{1,2}=\pm i$. Відповідні частинні розв'язки матимуть вигляд $y_1=\cos x,\ y_2=\sin x$, а тому загальний розв'язок однорідного рівняння буде: $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Розв'язок початкового рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих: $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$, де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ потрібно знайти із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0, \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=tgx. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, наприклад, методом Крамера, одержуємо: $C_1'(x)=\dfrac{-\sin^2 x}{\cos x},\ C_2'(x)=\sin x$.

Інтегруючи, маємо: $C_1(x)=\sin x-\ln tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+\widetilde{C}_1,\ C_2(x)=-\cos x+\widetilde{C}_2$.

Загальний розв’язок запишемо у вигляді:

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x=\left(\sin x-\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\widetilde{C}_1\right)\cos x+\left(-\cos x+\widetilde{C}_2\right)\sin x,$$

$$y=\widetilde{C}_1\cos x+\widetilde{C}_2\sin x-\cos x\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Перші два доданки описують, власне, загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння, а останній є частинним розв’язком цього неоднорідного рівняння.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $y''-\frac{y'}{x}=x$.

Розв’язання. Спочатку розглянемо відповідне однорідне рівняння $y''-\frac{y'}{x}=0$. Розв’яжемо його, застосувавши наступні перетворення:

$$y''=\frac{y'}{x},\ \ \frac{y''}{y'}=\frac{1}{x},$$

$$\frac{d(y')}{y'dx}=\frac{1}{x},\ \ \frac{d(y')}{y'}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{d(y')}{y'}=\int\frac{dx}{x},\ \ \ln|y'|=\ln|x|+\ln|C_1|=\ln|C_1x|,\ \ y'=C_1x.$$

$y=\widetilde{C}_1x^2+C_2$ – загальний розв’язок однорідного рівняння.

Таким чином, функції $y_1=x^2,\ y_2=1$ утворюють його фундаментальну систему.

Розв’язок початкового рівняння шукатимемо у вигляді $y=C_1(x)x^2+C_2(x)$, де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases}C_1'(x)\cdot x^2+C_2'(x)\cdot 1=0,\\ C_1'(x)\cdot 2x+C_2'(x)\cdot 0=x.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}C_2'(x)=-C_1'(x)x^2,\\ C_1'(x)=\frac{1}{2}.\end{cases}$ $\begin{cases}C_2'(x)=-\frac{1}{2}x^2,\\ C_1'(x)=\frac{1}{2}.\end{cases}$

Інтегруючи отримане, маємо: $C_1(x)=\frac{x}{2}+\widetilde{C}_1$, $C_2(x)=-\frac{x^3}{6}+\widetilde{C}_2$.

Загальний розв’язок запишемо у вигляді:

$$y=\left(\frac{x}{2}+\widetilde{C}_1\right)\cdot x^2+\left(-\frac{x^3}{6}+\widetilde{C}_2\right)\cdot 1=\frac{x^3}{3}+\widetilde{C}_1 x^2+\widetilde{C}_2 .$$

Загалом кажучи, метод варіації довільних сталих придатний для знаходження розв'язків будь-якого лінійного неоднорідного рівняння. Але в силу того, що знаходження фундаментальної системи розв'язків відповідного однорідного рівняння може бути достатньо складною задачею, цей метод в основному застосовується для лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

2.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Спочатку розглянемо неоднорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами: $y'' + p\,y' + qy = f(x)$, де p і q – сталі, а $f(x)$ – функція, неперервна на деякому проміжку. Структура загального розв'язку рівняння визначається за формулою: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x)$, де $\tilde{y}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Отже, щоб знайти загальний розв'язок рівняння, треба знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння і додати до нього один розв'язок $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$.

У загальному випадку використовують метод варіації довільних сталих, але в деяких випадках можливо знайти відповідний частинний розв'язок простіше, без інтегрувань.

Для правих частин *спеціального виду* частковий розв'язок знаходиться *методом підбору*.

I. Нехай права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$,
де $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ – многочлен степені m.

Шукатимемо частинний розв'язок нашого рівняння у вигляді $\tilde{y} = Q_n(x)e^{\alpha x}$, де $Q_n(x)$ – деякий многочлен степені n з невідомими коефіцієнтами. Знайдемо похідні і підставимо в наше рівняння:

$$\tilde{y}' = Q_n'(x)e^{\alpha x} + \alpha \cdot Q_n(x)e^{\alpha x},$$

$$\tilde{y}'' = (Q_n'(x)e^{\alpha x} + \alpha \cdot Q_n(x)e^{\alpha x})' = Q_n''(x)e^{\alpha x} + \alpha \cdot Q_n'(x)e^{\alpha x} + \alpha \cdot Q_n'(x)e^{\alpha x} + \alpha^2 \cdot Q_n(x)e^{\alpha x} =$$
$$= Q_n''(x)e^{\alpha x} + 2\alpha \cdot Q_n'(x)e^{\alpha x} + \alpha^2 \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

$$\tilde{y}'' + p\tilde{y}' + q\tilde{y} = Q_n''(x)e^{\alpha x} + 2\alpha \cdot Q_n'(x)e^{\alpha x} + \alpha^2 \cdot Q_n(x)e^{\alpha x} + p\left(Q_n'(x)e^{\alpha x} + \alpha \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}\right) + q \cdot Q_n(x)e^{\alpha x} = = \{Q_n''(x)e^{\alpha x} + (2\alpha + p) \cdot Q_n'(x)e^{\alpha x} + (\alpha^2 + p\alpha + q) \cdot Q_n(x)e^{\alpha x} = f(x) = P(x)e^{\alpha x}, ¿$$

а отже $Q_n''(x) + (2\alpha + p) \cdot Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) \cdot Q_n(x) = P(x)$.

Можливі наступні випадки:

а) α не є коренем характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$ відповідного однорідного диференціального рівняння. Тоді степінь

n=m, і, прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів змінної, визначимо коефіцієнти многочлена $Q_n(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m$.

б) α є однократним коренем характеристичного рівняння ($\alpha^2+p\alpha+q=0,\ 2\alpha+p\neq 0$). У такому випадку степінь $n=m+1$ і варто шукати многочлен $Q_n(x)$ у вигляді многочлена без вільного члена, оскільки останній пропадає під час диференціювання

$$Q_n(x)=B_0x^{m+1}+B_1x^m+\ldots+B_mx=x(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m).$$

в) α є двократним коренем характеристичного рівняння ($\alpha^2+p\alpha+q=0,\ 2\alpha+p=0$). У такому випадку степінь $n=m+2$ і варто шукати многочлен $Q_n(x)$ у вигляді многочлена без лінійного і вільного члена, оскільки останні пропадають під час диференціювання

$$Q_n(x)=B_0x^{m+2}+B_1x^{m+1}+\ldots+B_mx^2=x^2(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m).$$

Загалом, частинний розв'язок варто шукати у вигляді $y=x^re^{\alpha x}Q(x)$, де $Q(x)$ – многочлен тієї ж степені, що й $P(x)$, але з невизначеними коефіцієнтами, а r – число, що показує, скільки разів число α є коренем характеристичного рівняння для відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y''-2y'+y=3e^x$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння для відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=1.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y=C_1e^x+C_2xe^x$.

Тепер знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді: $y=x^re^{\alpha x}Q(x)$.

$f(x)=3e^x,\ P(x)=3,\ \alpha=1,\ r=2,\ Q(x)=C$, тоді $y=Cx^2e^x$.

Скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

$$y'=2Cxe^x+Cx^2e^x;\quad y''=2Ce^x+2Cxe^x+2Cxe^x+Cx^2e^x.$$

Підставляючи у вихідне рівняння, одержуємо:

$$2Ce^x+4Cxe^x+Cx^2e^x-4Cxe^x-2Cx^2e^x+Cx^2e^x=2Ce^x=3e^x.$$

$$2C=3;\quad C=\frac{3}{2}.$$

Частинний розв’язок має вигляд: $y=\frac{3}{2}x^2e^x$.

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння: $y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{3}{2}x^2e^x$.

II. Нехай тепер права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння має більш загальний вигляд $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right]$ (якщо $\beta=0$, маємо попереднє).

У такому випадку частинний розв’язок знаходять так:

а) якщо $\alpha\pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то шукають частинний розв’язок у вигляді $\tilde{y}=e^{\alpha x}\left[T_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x\right]$, де $k=\max(m;n)$ – степінь відповідних многочленів з невідомими коефіцієнтами.

б) якщо $\alpha\pm i\beta$ є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то шукають частинний розв’язок у вигляді $\tilde{y}=x\cdot e^{\alpha x}\left[T_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x\right]$, $k=\max(m;n)$.

Приклад 2. Знайти розв’язок рівняння: $y''-4y'+4y=\cos x$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння: $\lambda^2-4\lambda+4=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=2$.

Загальний розв’язок однорідного рівняння: $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

Права частина має спеціальний вид:

$\cos x=e^{0x}(1\cdot\cos 1x+0\cdot\sin 1x)$, а тому

$\alpha=0,\ \beta=1,\ P_m(x)=1,\ Q_n(x)=0,\ k=\max(0;\ 0)=0$.

Оскільки $\alpha\pm i\beta=\pm i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв’язок будемо шукати у формі $\tilde{y}(x)=A\cos x+B\sin x$, де *A* і *B* – невизначені коефіцієнти. Диференціюючи, отримаємо:

$\tilde{y}'(x)=-A\sin x+B\cos x,\ \tilde{y}''(x)=-A\cos x-B\sin x$.

Підставляючи $\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x),\tilde{y}''(x)$ в початкове рівняння, матимемо:

$-A\cos x-B\sin x+4A\sin x-4B\cos x+4A\cos x+4B\sin x=\cos x$,

$(3A-4B)\cos x+(4A+3B)\sin x=\cos x$.

Прирівнюючи коефіцієнти cos*x* і sin*x*, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 3A-4B=1, \\ 4A+3B=0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо: $A=\frac{3}{25},\ B=-\frac{4}{25}$. Частковий розв'язок запишеться у формі: $\tilde{y}(x)=\frac{3}{25}\cos x-\frac{4}{25}\sin x$.

Загальний розв'язок нашого неоднорідного рівняння буде мати вигляд: $y(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{1}{25}(3\cos x-4\sin x)$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків із правою частиною спеціального виду

Перейдемо тепер до розгляду лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь вищих порядків $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$, де права частина має вигляд $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right]$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени порядку m і n відповідно, $\alpha,\beta\in R$.

Як відомо, загальний розв'язок такого рівняння має вигляд $y=\tilde{y}+C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, де $\tilde{y}$ – є частинним розв'язком цього неоднорідного рівняння, а функції $y_1,y_2,\ldots,y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідного йому однорідного рівняння.

Як і у випадку рівнянь другого порядку, є можливим представити вигляд частинного розв'язку залежно від вигляду правої частини неоднорідного рівняння.

Назвемо число $\sigma=\alpha\pm i\beta$ *контрольним числом* правої частини. Нехай контрольне число σ є коренем кратності $r\geq 0$ характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння. Тоді неоднорідне рівняння має єдиний частинний розв'язок вигляду $\tilde{y}=x^re^{\alpha x}\left[T_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x\right]$, де $T_k(x),\ S_k(x)$ – це многочлени степені $k=\max(m,\ n)$, коефіцієнти яких підлягають визначенню. Зауважимо, що многочлени повинні бути повними, тобто містити всі степені x від нуля до k, з різними невизначеними коефіцієнтами за однакових степеней x в обох многочленах. Окрім того, якщо у вираз функції $f(x)$ входить хоча б одна з функцій $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$, то у вираз частинного розв’язку треба завжди записувати обидві функції.

Розглянемо деякі частинні випадки функції $f(x)$, до яких можна застосувати метод підбору частинного розв'язку, і вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв’язок цього рівняння залежно від вигляду його правої частини.

1. Нехай права частина неоднорідного рівняння має вигляд $f(x)=P_m(x)$, тобто $\alpha=0,\ \beta=0$, тоді:

а) якщо контрольне число $\sigma=0$ не є коренем відповідного характеристичного рівняння, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{y}=T_m(x)$;

б) якщо контрольне число $\sigma=0$ є коренем кратності r характеристичного рівняння, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{y}=x^r T_m(x)$.

2. Нехай права частина неоднорідного рівняння має вигляд $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$, тобто $\alpha\neq 0,\ \beta=0$, тоді:

а) якщо контрольне число $\sigma=\alpha$ не є коренем відповідного характеристичного рівняння, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{y}=T_m(x)e^{\alpha x}$;

б) якщо контрольне число $\sigma=\alpha$ є коренем кратності r характеристичного рівняння, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{y}=x^r T_m(x)e^{\alpha x}$.

3. Нехай права частина неоднорідного рівняння має вигляд $f(x)=P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x$, тобто $\alpha=0,\ \beta\neq 0$, тоді:

а) якщо контрольне число $\sigma=\pm i\beta$ не є коренем відповідного характеристичного рівняння, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{y}=T_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x$;

б) якщо контрольне число $\sigma=\pm i\beta$ є коренем кратності r характеристичного рівняння, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{y}=x^r\left[T_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x\right]$.

4. Нехай права частина неоднорідного рівняння має вигляд $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right]$, тобто $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, тоді:

а) якщо контрольне число $\sigma=\alpha\pm i\beta$ не є коренем відповідного характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{y}=e^{\alpha x}\left[T_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x\right]$;

б) якщо контрольне число $\sigma=\alpha\pm i\beta$ є коренем кратності r характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}\left[T_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x\right]$.

В усіх випадках $k=\max(m, n)$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $y''' - 4y' = x$.

Розв’язання. Спочатку розв’яжемо відповідне однорідне рівняння: $y''' - 4y' = 0$. Складемо характеристичне рівняння і встановимо його корені:

$k^3 - 4k = 0,\ k(k^2 - 4) = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = 2,\ k_3 = -2.$

Загальний розв’язок однорідного рівняння: $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$.

Тепер знайдемо частинний розв’язок вихідного неоднорідного рівняння. Для цього співставимо праву частину рівняння з виглядом правої частини, розглянутим вище.

$P(x) = x,\ \alpha = 0,\ \beta = 0.$

Частинний розв’язок шукаємо у вигляді: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$, де $\sigma = 0,\ r = 1,\ \alpha = 0,\ Q(x) = Ax + B.$

Тобто $y = Ax^2 + Bx$.

Тепер визначимо невідомі коефіцієнти *A* і *B*.

Підставимо частинний розв’язок у загальному вигляді у вихідне неоднорідне диференціальне рівняння.

$y' = 2Ax + B,\ y'' = 2A,\ y''' = 0,$

$0 - 8Ax - 4B = x,\ -8A = 1,\ A = -\dfrac{1}{8},\ B = 0.$

Таким чином ми отримали частинний розв’язок: $\tilde{y} = -\dfrac{x^2}{8}$.

Тоді загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = -\frac{x^2}{8} + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

Приклад 4. Розв’язати рівняння $y''' - y' = e^{2x}$.

Розв’язання. Запишемо і розв’яжемо характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння:

$k^3 - k = 0,\ k(k^2 - 1) = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1.$

Загальний розв’язок однорідного рівняння: $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді: $y=x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

$\alpha = 2, \quad \beta = 0, \quad \sigma = 2, \quad r = 0, \quad Q(x) = A, \quad y = Ae^{2x}$.

Знаходимо похідні й підставляємо їх у вихідне неоднорідне рівняння: $y' = 2Ae^{2x}$, $y'' = 4Ae^{2x}$, $y''' = 8Ae^{2x}$,

$8Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = 6Ae^{2x} = e^{2x}$, $A = \frac{1}{6}$.

Таким чином ми отримали частинний розв'язок: $\tilde{y} = \frac{1}{6}e^{2x}$.

Одержуємо загальний розв'язок нашого неоднорідного диференціального рівняння: $y = \frac{1}{6}e^{2x} + C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

Метод суперпозиції.

Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами не має спеціального вигляду сама, але є сумою виразів такого вигляду, то відповідний частинний розв'язок знаходиться як сума частинних розв'язків допоміжних рівнянь, кожне з яких має праву частину, яка відповідає одному з доданків виразу, що входять у суму.

Тобто, наприклад, якщо рівняння має вигляд: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок цього рівняння матиме вигляд $y = y_1 + y_2$, де y_1 і y_2 – частинні розв'язки для рівнянь

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_1(x)$ і $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_2(x)$.

Для більшої кількості доданків правої частини підхід аналогічний.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y'' + y = x - \sin 2x$.

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння: $y'' + y = 0$. Складемо й розв'яжемо його характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm i$.

Розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Помітимо, що права частина нашого диференціального рівняння не є функцією спеціального вигляду, але її можна подати як суму двох таких функцій $f_1(x)+f_2(x)=x+(-\sin 2x)$.

Підберемо компоненти частинного розв'язку, скориставшись методом суперпозиції.

Спочатку встановимо частинний розв'язок рівняння $y''+y=x$.

Для функції $f_1(x)=x$ маємо $P(x)=x,\ \alpha=0,\ \beta=0$, а тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_1=x^r e^{\alpha x}Q(x)$.

Одержуємо: $\sigma=0,\quad r=0,\quad \alpha=0,\quad Q(x)=Ax+B$, тобто $y_1=Ax+B$.

$y'=A,\ y''=0,$

$y_1''+y_1=0+Ax+B=x,\ A=1,\ B=0.$

Таким чином: $y_1=x$.

Тепер підберемо частинний розв'язок для другого допоміжного рівняння $y''+y=-\sin 2x$.

Для функції спеціального виду $f_2(x)=-\sin 2x$ маємо $\alpha=0,\ \beta=2,\ \sigma=\pm 2i,\ r=0,\ P_m(x)=0,\ Q_n(x)=-1$, а тому розв'язок шукаємо у вигляді: $y_2=T_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x$, точніше, як $y_2=T_0(x)\cos 2x+S_0(x)\sin 2x$.

Таким чином, $y_2=A\cos 2x+B\sin 2x$.

$y_2'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$,

$y_2''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$.

$y_2''+y_2=-4A\cos 2x-4B\sin 2x+A\cos 2x+B\sin 2x=$

$¿-3A\cos 2x-3B\sin 2x=-\sin 2x=0\cdot\cos 2x-1\cdot\sin 2x.$

Це приводить нас до системи рівнянь $\begin{cases}-3A=0,\\ -3B=-1.\end{cases}$

Розв'язавши $A=0,\ B=\dfrac{1}{3}$, отримуємо другу компоненту шуканого частинного розв'язку $y_2=\dfrac{1}{3}\sin 2x$.

Згідно з вищевказаним, шуканий частинний розв'язок початкового рівняння має вигляд: $y = y_1 + y_2 = x + \frac{1}{3}\sin 2x$, а значить, загальний розв'язок наведеного в умові неоднорідного диференціального рівняння запишеться так:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

Розділ 3

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Загальні поняття та означення

Цілий ряд фізичних та інших прикладних задач приводять до необхідності розв'язувати не одне, а зразу декілька диференціальних рівнянь, тобто їх систему.

Означення. Сукупність диференціальних рівнянь, кожне з яких містить незалежну змінну, шукані функції та їхні похідні, тобто співвідношення вигляду:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

називається *системою диференціальних рівнянь n-го порядку*.

Означення. *Система диференціальних рівнянь першого порядку*, яка містить *n* шуканих функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (x – незалежна змінна), має вигляд:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \end{cases}.$$

Означення. Система диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язних відносно похідних від невідомих функцій, називається *нормальною системою диференціальних рівнянь*. Така система має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}.$$

Якщо функції $f_i\,(i=1,\ldots,n)$ не залежать явно від незалежної змінної *x,* то така система називається *автономною нормальною системою*.

Означення. Сукупність функцій $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$, які визначені в деякій області і мають неперервну похідну першого порядку, називають *розв'язком системи диференціальних рівнянь першого порядку*, якщо ці функції перетворюють всі рівняння системи в тотожності для довільних значень змінної *x* в цій області.

З геометричного погляду, розв'язок системи диференціальних рівнянь першого порядку визначає в (*n+1*)-вимірному просторі деяку інтегральну криву. Зокрема, графік розв'язку системи двох диференціальних рівнянь являє собою інтегральну криву в просторі третього порядку.

Початкові умови для системи диференціальних рівнянь першого порядку мають вигляд:

$y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},\ldots,y_n(x_0)=y_{n0}$, або $(x_0.\,y_{10},y_{20},\ldots,y_{n0})$.

Задача Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку ставиться наступним чином: знайти розв'язок такої системи, який задовольняє відповідні початкові умови.

Умови існування та єдності розв'язку задачі Коші описує наступна теорема.

Теорема Коші. *Якщо в деякій області* (*n*+1)*-вимірного простору функції* $f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$,..., $f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ *неперервні й мають неперервні частинні похідні по* $y_1,y_2,\ldots,y_n$*, то для будь-якої точки* $(x_0.\,y_{10},y_{20},\ldots,y_{n0})$ *цієї області існує єдиний розв'язок* $y_1=\phi_1(x), y_2=\phi_2(x),\ldots,y_n=\phi_n(x)$ *системи диференціальних рівнянь першого порядку, визначений в деякому околі точки* x_0 *і такий, що задовольняє початкову умову* $y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},\ldots,y_n(x_0)=y_{n0}$.

Означення. *Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь першого порядку* буде сукупність функцій $y_1=\phi_1(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$, $y_2=\phi_2(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$,…,$y_n=\phi_n(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$, які є розв’язком цієї системи, і для будь-якої початкової умови можна підібрати сталі так, щоб ця умова виконувалась.

3.2. Інтегрування нормальних систем

Одним з методів інтегрування систем диференціальних рівнянь першого порядку є *метод диференціювань і виключень* невідомих функцій. Суть його полягає в тому, щоб за допомогою диференціювання одного з рівнянь системи і виключення усіх невідомих функцій, крім однієї (вибраної довільно), отримати одне диференціальне рівняння з однією невідомою функцією порядку ¿ n. Інтегруючи це рівняння і повертаючись назад (використовуючи рівняння системи, та, можливо, отримані попутно рівняння), знаходимо усі інші шукані функції, а з ними і загальний розв’язок початкової системи.

Візьмемо перше рівняння системи

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \ldots$$

і продиференціюємо його по змінній *x*:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\right) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}$$

Вирази для перших похідних шуканих функцій підставимо з системи і отримаємо: $\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Знову диференціюємо по змінній *x* і підставимо: $\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ і т. д.

У результаті отримаємо систему:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,...,y_n);\\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,...,y_n);\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,...,y_n).\end{cases}$$

Тепер з перших n–1 рівнянь виразимо $y_2,\ldots,y_n$ через $x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$. Нехай це приводить до співвідношень:

$$y_2=\phi_2\left(x,y_1,\frac{dy_1}{dx},\frac{d^2y_1}{dx^2},\ldots,\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right);\ y_3=\phi_3\left(x,y_1,\frac{dy_1}{dx},\frac{d^2y_1}{dx^2},\ldots,\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right);\ \ldots\ldots$$

.

Підставимо їх в останнє рівняння попередньої системи і в результаті отримаємо диференціальне рівняння n–го порядку відносно функції y_1: $\frac{d^ny_1}{dx^n}=F\left(x,y_1,\frac{dy_1}{dx},\frac{d^2y_1}{dx^2},\ldots,\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right)$.

Знайдемо його загальний розв'язок $y_1=\phi_1(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ і, користуючись попередніми співвідношеннями, обчислимо інші функції $y_2,\ldots,y_n$: . $y_2=\phi_2(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$,…,$y_n=\phi_n(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$.

Якщо матимемо систему диференціальних рівнянь з початковими умовами (задачу Коші), то підставимо їх в отриманий загальний розв'язок і підберемо значення відповідних сталих.

Як бачимо, нормальну систему диференціальних рівнянь першого порядку можна звести до одного диференціального рівняння n–го порядку. Можливий і обернений перехід. Справді, нехай маємо диференціальне рівняння n–го порядку, розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}=F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}\right)$. Позначимо

$$y=y_1,\ y'=y_2,\ y''=y_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_n,$$

тоді $\qquad y_1' = y' = y_2,\ y_2' = y'' = y_3,\ \dots,\ y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n$,

а значить $y_n' = y^{(n)} = F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, тобто функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ задовольняють нормальну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n). \end{cases}$$

Приклад 1. Знайти розв'язок системи рівнянь $\{ y' = y + z$ ¿¿¿¿.

Розв'язання. Маємо систему двох диференціальних рівнянь першого порядку з шуканими функціями $y = y(x)$ та $z = z(x)$. Система не автономна, бо у рівняння входить незалежна змінна *x*.

Для розв'язання продиференціюємо перше рівняння по *x*. Одержуємо:

$y'' = y' + z'$.

Заміняючи значення z' виразом з другого рівняння, одержуємо: $y'' = y' + y + z + x$.

З урахуванням першого рівняння ($z = y' - y$), одержуємо:

$y'' = y' + y + y' - y + x,\quad y'' = 2y' + x$.

Розв'язуємо отримане лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку: $y'' - 2y' = x$.

Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 2y' = 0,\quad k^2 - 2k = 0,\quad k_1 = 0,\quad k_2 = 2.$

Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Тепер підбираємо частинний розв'язок нашого неоднорідного диференціального рівняння згідно з раніше розглянутим підходом $y = x^r e^{\alpha x} Q(x),\ \alpha = 0,\ \beta = 0,\ \sigma = 0,\ r = 1,\ Q(x) = Ax + B,$ а значить, $\tilde{y} = x \cdot (Ax + B) = Ax^2 + Bx,\ \tilde{y}' = 2Ax + B,\ \tilde{y}'' = 2A,$

$2A - 4Ax - 2B = -4Ax + (2A - 2B) = x,\quad A = -\frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4}.$

Отримали частинний розв’язок $\widetilde{y}=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x=-\frac{1}{4}x(x+1)$, а значить, загальний розв’язок нашого неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}x(x+1).$$

Врахувавши раніше виведене співвідношення $z=y'-y$, одержуємо другу частину розв’язку системи:

$$z=-C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}(x^2-x-1).$$

Відповідь.

$y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}x(x+1)$, $z=-C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}(x^2-x-1)$, $C_1,C_2\in R$.

3.3. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами

Означення. Нормальна система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо кожне рівняння системи лінійне відносно шуканих функцій та їхніх похідних:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Тут $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \dots,\ x_n = x_n(t)$ – невідомі функції, $\boldsymbol{t}$ – незалежна змінна, а функції $a_{ij}(t),\ f_i(t),\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n$ – визначені та неперервні на деякому інтервалі.

Означення. Якщо всі $a_{ij}(t)$ сталі, то така система називається *лінійною системою рівнянь зі сталими коефіцієнтами*.

Означення. Лінійна система рівнянь називається *однорідною*, якщо всі функції $f_i(t),\ i = 1,\dots,n$ тотожно дорівнюють нулю, тобто система автономна.

Таким чином, нормальна лінійна однорідна система *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд (позначення похідної крапкою є дань традиції):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Таку систему можна подати в матричній формі $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, де $A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Звичайно, нормальні лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами можна розв’язувати вищеописаним методом диференціювань і виключень, причому його застосування приводить нас до потреби розв’язання лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 1. Знайти розв’язок системи $\begin{cases} \dot{x}_1=-3x_1+x_2, \\ \dot{x}_2=-20x_1+6x_2. \end{cases}$

Розв’язання. Диференціюємо по *t* перше рівняння системи: $\ddot{x}_1=-3\dot{x}_1+\dot{x}_2$.

З другого рівняння підставимо $\dot{x}_2$ і отримаємо рівняння $\ddot{x}_1=-3\dot{x}_1-20x_1+6x_2$.

Тепер з першого рівняння знаходимо $x_2=\dot{x}_1+3x_1$ і підставляємо в останнє рівняння. Отримуємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами: $\ddot{x}_1-3\dot{x}_1+2x_1=0$.

Його характеристичне рівняння має вигляд: $k^2-3k+2=0$.

Знаходимо корені: $k_1=1$, $k_2=2$. Отже, загальний розв’язок рівняння матиме вигляд $x_1=C_1e^t+C_2e^{2t}$. Тоді $x_2=4C_1e^t+5C_2e^{2t}$.

Таким чином, за будь-яких сталих C_1 і C_2 система функцій $x_1=C_1e^t+C_2e^{2t}$, $x_2=4C_1e^t+5C_2e^{2t}$ буде загальним розв’язком початкової системи.

З іншого боку, під час розв’язання лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами можна використати *методи лінійної алгебри*. Цей підхід був запропонований Ейлером.

Розв’язок системи шукаємо у вигляді $\vec{x}=e^{\lambda t}\vec{v}$, $\vec{v}=(v_1,\dots,v_n)$.

Легко побачити, що функція $\vec{x}=e^{\lambda t}\vec{v}$ є розв’язком нашої системи, якщо λ – власне значення матриці *A*, а $\vec{v}$ – власний вектор цієї матриці, що відповідає числу λ.

Якщо власні значення $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ матриці попарно різні і $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ – відповідні їм власні вектори цієї матриці, то загальний розв’язок лінійної однорідної системи рівнянь визначається формулою $x=C_1e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1+\ldots+C_ne^{\lambda_n t}\vec{v}_n$, де $C_1,C_2,\dots,C_n$ – довільні сталі.

Якщо для кратного власного значення λ матриці *A* є стільки лінійно незалежних власних векторів $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$, яка його кратність, то йому відповідають k лінійно незалежних розв'язків початкової системи $e^{\lambda t}\vec{v}_1, e^{\lambda t}\vec{v}_2, \ldots, e^{\lambda t}\vec{v}_k$.

Якщо ж для власного значення λ кратності k є тільки m $(m<k)$ лінійно незалежних власних векторів, то розв'язки, що відповідають λ, знаходимо у вигляді добутку векторного многочлена степені $k-m$ на $e^{\lambda t}$, тобто у вигляді $\vec{x}=\left(\vec{v}_0+\vec{v}_1 t+\ldots+\vec{v}_{k-m}t^{k-m}\right)\cdot e^{\lambda t}$.

Щоб знайти вектори $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-m}$, потрібно підставити цей вираз у початкову систему і, прирівнявши коефіцієнти подібних членів в лівій і правій частинах системи, отримаємо рівняння для знаходження векторів $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-m}$.

Якщо ж серед власних чисел матриці A є комплексні, то вказаним раніше методом будується відповідний такому власному числу розв'язок системи, виражений через комплексні функції.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь: $\left\{\dot{x}_1=x_1+3x_2, ¿¿¿¿\right.$

Розв'язання. Матриця системи має вигляд $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$. Її характеристичне рівняння $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ -1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+8=0$ має корені $\lambda_1=2,\ \lambda_2=4$.

Визначимо відповідні їм власні вектори. Для цього розв'яжемо систему $(A-\lambda E)\vec{v}=0$: $\begin{cases}(1-\lambda)v_1+3v_2=0,\\ -v_1+(5-\lambda)v_2=0.\end{cases}$

Нехай $\lambda=\lambda_1=2$, тоді маємо $\left\{-v_1+3v_2=0, ¿¿¿¿\right.$ Тоді $\vec{v}_1=(3;1)$.

Вважаючи, що $\lambda=\lambda_2=4$, отримаємо $\left\{-3v_1+3v_2=0, ¿¿¿¿\right.$ Тоді $\vec{v}_2=(1;1)$.

Таким чином, загальний розв'язок нашої системи має вигляд $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, або, іншими словами, загальним розв'язком є система функцій $\begin{cases} x_1=3C_1 e^{2t}+C_2 e^{4t}, \\ x_2=C_1 e^{2t}+C_2 e^{4t}. \end{cases}$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок системи $\{\dot{x}_1=2x_1-5x_2,$¿¿¿¿

Розв'язання. Матриця системи має вигляд $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Легко бачити, що характеристичне рівняння вигляду $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 5 & -6-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+13=0$ має комплексно спряжені корені $\lambda_{1,2}=-2\pm 3i$. Для знаходження власного вектору, що відповідає кореню $\lambda=-2+3i$, отримуємо систему $\begin{cases} (4-3i)v_1-5v_2=0, \\ 5v_1+(-4-3i)v_2=0. \end{cases}$

Прийнявши $v_1=5$, визначимо $v_2=4-3i$, тобто $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 5 \\ 4-3i \end{pmatrix}$, а значить, $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} 5 \\ 4-3i \end{pmatrix}e^{(-2+3i)t}$.

Замість комплексних частинних розв'язків цього виду слід використати дійсні частинні розв'язки $\vec{x}_1=\operatorname{Re}x(t)$, $\vec{x}_2=\operatorname{Im}x(t)$. Тому пара дійсних частинних розв'язків має наступний вигляд:

$$\vec{x}_1=\operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4-3i \end{pmatrix}e^{(-2+3i)t}\right)=\begin{pmatrix} 5e^{-2t}\cos 3t \\ e^{-2t}(4\cos 3t+3\sin 3t) \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_2=\operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4-3i \end{pmatrix}e^{(-2+3i)t}\right)=\begin{pmatrix} 5e^{-2t}\sin 3t \\ e^{-2t}(-3\cos 3t+4\sin 3t) \end{pmatrix}.$$

Остаточно отримуємо загальний розв'язок:

$$\vec{x}(t)=C_1\begin{pmatrix}5\cos 3t\\ 4\cos 3t+3\sin 3t\end{pmatrix}e^{-2t}+C_2\begin{pmatrix}5\sin 3t\\ -3\cos 3t+4\sin 3t\end{pmatrix}e^{-2t}$$, або

$$x_1=5(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)e^{-2t},$$

$$x_2=((4C_1-3C_2)\cos 3t+(3C_1+4C_2)\sin 3t)e^{-2t}.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок системи $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+2x_2, ¿¿¿¿\end{cases}$

Розв'язання. Матриця системи має вигляд $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & -5\end{pmatrix}$.

У цьому випадку характеристичне рівняння отриманої матриці $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ -2 & -5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+9=0$ має корінь $\lambda=-3$ кратності $k=2$. Тому розв'язок шукаємо у вигляді $\vec{x}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 t\\ \alpha_2+\beta_2 t\end{pmatrix}e^{-3t}$.

Підставимо цей вираз у початкову систему і скоротимо на e^{-3t}:

$$\dot{\vec{x}}=\left(\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 t\\ \alpha_2+\beta_2 t\end{pmatrix}e^{-3t}\right)'_t=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}e^{-3t}-3\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 t\\ \alpha_2+\beta_2 t\end{pmatrix}e^{-3t}=\begin{pmatrix}\beta_1-3\alpha_1-3\beta_1 t\\ \beta_2-3\alpha_2-3\beta_2 t\end{pmatrix}e^{-3t},$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1-3\alpha_1-3\beta_1 t\\ \beta_2-3\alpha_2-3\beta_2 t\end{pmatrix}e^{-3t}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 t\\ \alpha_2+\beta_2 t\end{pmatrix}e^{-3t},$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1-3\alpha_1-3\beta_1 t\\ \beta_2-3\alpha_2-3\beta_2 t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 t\\ \alpha_2+\beta_2 t\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1-3\alpha_1\\ \beta_2-3\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\beta_1\\ -3\beta_2\end{pmatrix}t=\begin{pmatrix}-\alpha_1+2\alpha_2\\ -2\alpha_1-5\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta_1+2\beta_2\\ -2\beta_1-5\beta_2\end{pmatrix}t.$$

Прирівнюючи коефіцієнти за умови однакових степенів *t*, маємо:

$$\begin{cases}\beta_1-3\alpha_1=-\alpha_1+2\alpha_2,\\ \beta_2-3\alpha_2=-2\alpha_1-5\alpha_2,\\ -3\beta_1=-\beta_1+2\beta_2,\\ -3\beta_2=-2\beta_1-5\beta_2.\end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ \beta_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \beta_1 + \beta_2 = 0, \\ \beta_1 + \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Система має безліч розв'язків, а тому, вважаючи $\alpha_1 = C_1$ і $\beta_1 = C_2$, маємо $\beta_2 = -C_2$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}C_2 - C_1$.

Таким чином, загальний розв'язок системи має вигляд $\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -C_1 + \frac{1}{2}C_2 - C_2 t \end{pmatrix} e^{-3t}$ або $\begin{matrix} x_1 = (C_1 + C_2 t)e^{-3t} \\ x_2 = ((-C_1 + \frac{1}{2}C_2) - C_2 t)e^{-3t} \end{matrix}$.

Розділ 4

ЗАДАЧІ НА СКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

На практиці треба вміти не тільки розв'язувати диференціальні рівняння, але ще й складати ці рівняння. Диференціальне рівняння, одержане у процесі дослідження деякого реального явища або процесу, називають *диференціальною моделлю* цього явища або процесу. Диференціальні моделі називають ще *динамічними математичними моделями* описуваних ними реальних об'єктів. У таких моделях, крім шуканих залежних величин (функцій), містяться також похідні цих шуканих залежностей, наприклад, швидкості, прискорення тощо.

Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища і процеси, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики їхніх станів. Використовуючи відповідні математичні моделі, можна описати механізм протікання процесу, а також передбачити його подальший розвиток без натуральних експериментів, проведення яких часто є надто дорогим або просто неможливим.

У процесі побудови диференціальних моделей важливе значення має розуміння механічного та геометричного сенсу похідних та знання законів тієї галузі науки, з якою пов'язана природа задачі, що вивчається. Наприклад, у механіці це може бути другий закон Ньютона ($F=ma$, де m – маса тіла, a – прискорення руху, F – сума сил, що діють на тіло); у електротехніці – закон Кірхгофа (алгебраїчна сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю); у хімії – закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу) тощо.

Питання про відповідність математичної моделі і реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їхнього порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Розглянемо декілька прикладних задач, які приводять до використання звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку *А* (1, 2), кутовий коефіцієнт дотичної до якої в кожній її точці дорівнює подвійній ординаті цієї точки.

Розв'язання. Використаємо геометричний зміст похідної як кутового коефіцієнта дотичної. Нехай рівняння нашої шуканої кривої $y=y(x)$. Цю функцію і треба відшукати. Виберемо на кривій довільну точку $M(x,y)$. Відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної до кривої у точці $M(x,y)$ дорівнює похідній функції $y=y(x)$, яка фіксується у точці дотику. За умовою задачі, для кожної точки *M* (*x*, *y*) шуканої кривої має місце рівняння $y'(x)=2y(x)$.

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{dy}{dx}=2y,\ \ \frac{dy}{y}=2dx,\ \ \int\frac{dy}{y}=2\int dx,$$

$$\ln|y|=2x+\ln|C|,\ \ y=Ce^{2x}.$$

Ми отримали загальний розв'язок рівняння. Відшукаємо тепер його частинний розв'язок, тобто рівняння тієї кривої, яка проходить через точку $A(1,2)$. Підставляючи у загальне рівняння замість (x,y) координати точки *А*, маємо:

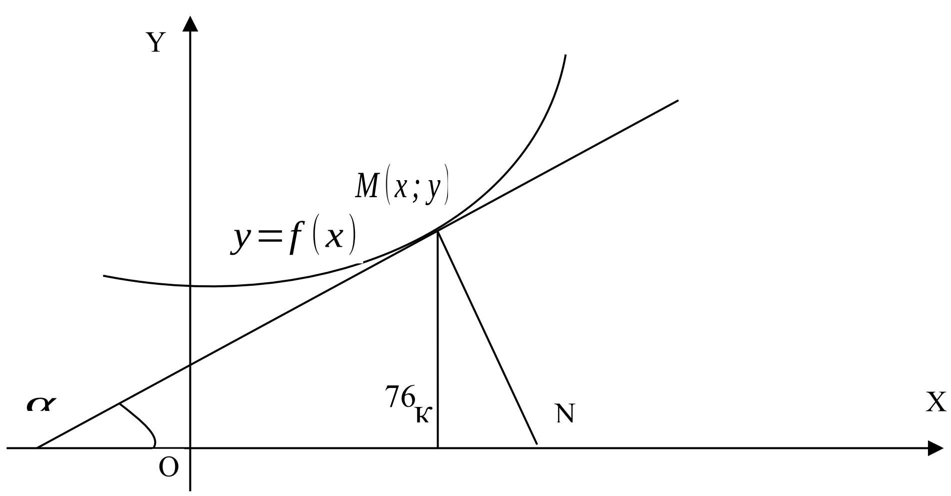
$y(1)=Ce^{2\cdot 1}=2$, звідки отримуємо значення $C=2\cdot e^{-2}$.

Підставляючи знайдене значення *С* у загальний розв'язок, одержуємо шукане рівняння кривої:

$$y=2e^{-2}e^{2x}=2\cdot e^{2x-2}.$$

Приклад 2. Знайти криву, що проходить через точку $M(0,1)$ і має всюди піднормаль, рівну *p*.

Розв'язання.



Нехай $y=f(x)$ – рівняння шуканої кривої, $M(x,y)$ – довільна точка цієї кривої. Кутовий коефіцієнт дотичної в цій точці дорівнює похідній в точці дотику y'.

Як видно з малюнка, піднормаль $KN=y\cdot tg\,\alpha=y\,y'$. За умовою задачі $KN=p$, а значить, $y\,y'=p$.

Ми отримали співвідношення, що зв'язує невідому функцію *y*, похідну від *y* по *x* і незалежну змінну *x*, тобто це – диференціальне рівняння. Перепишемо його так:

$$y\frac{dy}{dx}=p, \quad ydy=pdx.$$

Інтегруючи, знайдемо $y^2=2px+C$.

Отримана рівність визначає нескінченну кількість (сімейство) кривих, що відрізняються значеннями сталої *C*. Це сімейство парабол. Слід взяти ту з них, яка проходить через точку $M(0,\,1)$. Підставляючи координати точки *M* в отриманий загальний розв'язок, маємо $C=1$. Отже, рівняння шуканої кривої: $y^2=2px+1$.

Під час складання диференціальних рівнянь у фізичних задачах часто застосовується метод диференціалів, згідно з яким наближені співвідношення між малими приростами величин замінюються співвідношеннями між їхніми диференціалами. Така заміна не відбивається на результатах, оскільки метод зводиться до відкидання нескінченно малих вищих порядків.

Іншим методом складання диференціальних рівнянь є використання фізичного змісту похідної, як швидкості протікання процесу.

Приклад 3. У деякій посудині міститься 10 кг речовини, розчиненої в 20 л води. Кожну хвилину в резервуар надходить 5 л води і витікає 2 л розчину, причому концентрація залишається рівномірною. Знайти закон, який описує залежність маси речовини в посудині від часу.

Розв'язання. Позначимо через *x=x(t)* кількість речовини в резервуарі через *t* хвилин після початку процесу і через $x+\Delta x$ – у момент $t+\Delta t$. За цієї умови, якщо $\Delta x<0$ і $\Delta t>0$, розчин збіднюється.

Нехай $V(t)$ – об'єм суміші в момент *t:* $V(t)=20+5t-2t$, тобто $V(t)=20+3t$. Концентрація речовини в момент *t* дорівнює $\frac{x}{V}$. За нескінченно малий проміжок часу Δt кількість речовини зміниться на Δx, для якої є справедливою наближена рівність $\Delta x\approx -\frac{x}{V}2\Delta t=-\frac{2x}{20+3t}\Delta t$. Звідси $\frac{\Delta x}{\Delta t}\approx -\frac{2x}{20+3t}$, а якщо $\Delta t\to 0$, ми отримаємо диференціальне рівняння $x'=-\frac{2x}{20+3t}$, або $\frac{dx}{dt}=-\frac{2x}{20+3t}$. Розділяючи змінні та інтегруючи це рівняння, знаходимо його загальний розв'язок $x(t)=\frac{C}{\sqrt[3]{(20+3t)^2}}$. Врахувавши початкову умову *x(0)=10*, визначимо відповідне значення сталої $C=20\sqrt[3]{50}$. Отже, шуканий закон має вигляд $x(t)=20\cdot\sqrt[3]{\frac{50}{(20+3t)^2}}$.

Приклад 4. Вважаючи, що опір повітря прямо пропорційний швидкості тіла, треба дослідити падіння тіла в повітрі, тобто знайти закон його руху.

Розв'язання. На тіло діють дві сили: вага $p=mg$ та сила опору $f=bv$. Отже, результуюча сила дорівнює $F=mg-bv$.

Складаємо диференціальне рівняння руху:

$m\frac{dv}{dt}=mg-bv$, звідки маємо $dt=\frac{mdv}{mg-bv}$.

Інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$t=-\frac{m}{b}\ln(mg-bv)+C.$$

Коли *t*=0, *v*=0, таким чином, $C=\frac{m}{b}\ln(mg)$, а значить,

$$t=-\frac{m}{b}\ln(mg-bv)+\frac{m}{b}\ln(mg)=\frac{m}{b}\ln\frac{mg}{mg-bv}.$$

Далі, розв'язавши останнє рівняння відносно v, дістанемо:

$$v=\frac{ds}{dt}=k\cdot\left(1-e^{-\frac{gt}{k}}\right),\text{ де } k=\frac{mg}{b}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо: $s=kt+\frac{k^2}{g}e^{-\frac{gt}{k}}+C_1$.

Коли $t=0$, $s=0$, а отже, $C_1=-\frac{k^2}{g}$.

Остаточно отримуємо: $s=k\left(t+\frac{k}{g}\left(e^{-\frac{gt}{k}}-1\right)\right)$.

Приклад 5. Визначити період напіврозпаду радіоактивної речовини, якщо експериментально встановлено, що швидкість розпаду речовини прямо пропорційна її кількості.

Розв'язання. Нехай *x(t)* – кількість радіоактивної речовини в момент часу t, а на початку спостережень $x(0)=x_0$. За умовою задачі

$x'(t)=-kx,\ \ k>0$. Тому

$$\frac{dx}{dt}=-kx,\ \ \frac{dx}{x}=-kdt,$$

$$\ln|x|=-kt+\ln|C|,\ \ x=Ce^{-kt}.$$

Оскільки $x(0)=x_0$, то легко побачити, що закон зміни кількості речовини з часом має вигляд $x(t)=x_0e^{-kt}$.

З рівняння $\frac{1}{2}x_0=x_0e^{-kt}$ можна визначити час T, за який розпадається половина речовини: $T=\frac{\ln 2}{k}$.

Як бачимо, від початкової кількості речовини знайдений час не залежить. Для конкретних речовин період напіврозпаду залежить від коефіцієнта пропорційності k, який визначається дослідним шляхом.

Перелік завдань до варіантів

1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
2. Знайти загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння.
3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння, яке зводиться до однорідного.
4. Розв’язати диференціальне рівняння в повних диференціалах.
5. Розв’язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку.
6. Розв’язати рівняння Бернуллі.
7. Розв’язати диференціальне рівняння вищого порядку.
8. Розв’язати диференціальне рівняння вищого порядку.
9. Розв’язати диференціальне рівняння вищого порядку.
10. Розв’язати лінійне однорідне диференціальне рівняння.
11. Знайти розв’язок задачі Коші.
12. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.
13. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.
14. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.
15. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння методом варіації довільних сталих.
16. Знайти загальний розв’язок наведеної системи лінійних диференціальних рівнянь.
17. За умовами задачі скласти диференціальне рівняння і розв’язати його.
18. За умовами протікання наведеного фізичного процесу скласти диференціальне рівняння і розв’язати його.

Варіант 1

1. $\left(1+x^2\right)dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$	**2.** $\left(x^2-xy\right)dy+y^2\,dx=0$
3. $\left(x+2y+1\right)dx-\left(2x-3\right)dy=0$	**4.** $e^y\,dx+\left(xe^y-2y\right)dy=0$
5. $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$	**6.** $y'-y\;tgx+y^2\cos x=0$
7. $y'''=e^{2x}+x^2$	**8.** $y''\left(x^2+1\right)-2xy'=0$
9. $yy''-\left(y'\right)^2+\left(y'\right)^3=0$	**10.** $y'''+3y''+2y'=0$
11. $y'''+y''=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=1$	**12.** $y''+2y'+y=xe^{2x}$
13. $y''+2y'=3x$	**14.** $y''+y=x+\sin x$
15. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$	**16.** $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y\end{cases}$
17. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку (1,1) і має таку властивість, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої вдвічі більший за кутовий коефіцієнт радіус-вектора точки дотику.	
18. На тіло діє сила, пропорційна часу. Крім того, воно відчуває протидію середовища, пропорційну його швидкості. Знайти закон руху тіла (залежність шляху від часу).	

Варіант 2

1. $x^2 y' + y^2 = 0$	**2.** $x y' \cos\frac{y}{x} = y \cos\frac{y}{x} - x$
3. $(5x - 7y + 1)dy + (x + y - 1)dx = 0$	**4.** $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2 y)dy = 0$
5. $x y' + 2y = e^{-x^2}$	**6.** $y' + \frac{xy}{1 - x^2} = x\sqrt{y}$
7. $y^{IV} = x^3 + \cos 3x$	**8.** $y'' = \frac{1}{x} y'$
9. $y'' y^3 + 1 = 0$	**10.** $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 0$
11. $y'' - 2y' + 3y = 0,$ $y(0) = 0, y'(0) = 1$	**12.** $y'' + y = 1 + x$
13. $y'' + 4y = x \cos 2x$	**14.** $y'' - 4y' + 3y = xe^x + \cos 2x$
15. $y'' + 4y = 18\, ctg\, 2x$	**16.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}$

17. Знайти криві, у яких довжина відрізка, що відсікається будь-якою дотичною від осі ординат, дорівнює квадрату ординати точки дотику.

18. Матеріальна точка маси *m* без початкової швидкості повільно занурюється в рідину. Знайти шлях, пройдений точкою за час *t=2c*, вважаючи, що під час повільного занурення сила опору рідини пропорційна швидкості занурення (коефіцієнт пропорційності *k=3*).

Варіант 3

1. $ydx - xdy = 0$	**2.** $x y' = x \sin \frac{y}{x} + y$
3. $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$	**4.** $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + {}$ $+ (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$
5. $(5x + 1)y' + y = x$	**6.** $y' + \frac{1}{x} 2y = x^5 y^2$
7. $y^{IV} = \cos x + x$	**8.** $(x - 3)y'' + y' = 0$
9. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$	**10.** $y''' - 5y'' + 6y' = 0$
11. $y''' + y' = 0, \quad y(0) = 2,$ $y'(0) = 1, \ y''(0) = -1$	**12.** $y'' - y' = (x^8 + 2)\, e^{2x}$
13. $y'' + 2y' + 5y = 7e^{-x} \sin 2x$	**14.** $y'' - y = (x + 2)e^{-x} + 7 \sin 3x$
15. $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$	**16.** $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 4x_2 \end{cases}$

17. Знайти таку криву, що проходить через точку (0,2), щоб кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнював ординаті цієї точки, збільшеної в три рази.

18. Точка маси *m* рухається прямолінійно, і на неї діє сила, пропорційна часу, що пройшов від моменту, коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності k_1). Крім того, точка відчуває опір середовища, пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює k_2). Знайти залежність швидкості від часу.

Варіант 4

1. $\sqrt{1-x^2}dy-\sqrt{1-y^2}dx=0$	**2.** $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$
3. $(6x+y-1)dx-(4x+y-2)dy=0$	**4.** $(6xy+x^2+3)dy+$ $+(3y^2+2xy+2x)dx=0$
5. $(a^2+x^2)y'+xy=1$	**6.** $y'=y^4\cos x+ytgx$
7. $y'''=x^{-2}+2^x$	**8.** $(1-x^2)y''-xy'=0$
9. $y''=ae^y$	**10.** $y^{IV}+y'''=0$
11. $y''-2y'+2y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1$	**12.** $y''+2y'=xe^{3x}$
13. $y''+y=(x+3)\cos x$	**14.** $y''-6y'+9y=xe^{3x}+2\cos 3x$
15. $y''-6y'+8y=\frac{7}{2+e^{-2x}}$	**16.** $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=4x_1-x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}=4x_1+2x_2\end{cases}$

17. Знайти криву $y=f(x)$, для якої площа Q, обмежена лініями $y=f(x),\ y=0,\ x=0,\ x=a,$ є функцією від $y:\ Q=a^2\ln\left(\frac{y}{a}\right)$.

18. Швидкість розпаду радію прямо пропорційна його наявній кількості. Відомо, що через 1600 років залишається половина початкового запасу радію. Знайти, який відсоток радію розпадеться через 800 років.

Варіант 5

1. $(x-y^2x)dx+(y-x^2y)dy=0$	**2.** $xdy=\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx$
3. $(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy=0$	**4.** $(2x-y)dx-xdy=0$
5. $y'+ytgx=\cos^2 x$	**6.** $xy'+y=y^2\ln x$
7. $y^{IV}=3x^2+2\sin x$	**8.** $y''x=y'\ln x$
9. $yy''+(y')^2=0$	**10.** $y^{IV}-2y'''+y''=0$
11. $y''-3y'+2y=0,$ $y(0)=-3,\ y'(0)=0$	**12.** $y''-3y'+2y=(x+1)\sin 2x$
13. $y''+2y'+y=e^{-x}(x^2+6x)$	**14.** $y''+2y'+10y=e^{-x}\cos 3x+x^2$
15. $y''+y=\dfrac{8}{\cos^3 x}$	**16.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1-x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=4x_1-2x_2\end{cases}$

17. Тіло масою 1 кг рухається прямолінійно під дією сили, прямо пропорційної часу, що відраховується з моменту $t=0$, і обернено пропорційною швидкості руху точки. У момент $t=10$ с швидкість дорівнювала 50 см/с, а сила − 4 Н. Яка буде швидкість тіла через хвилину після початку руху?

18. Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Якщо температура повітря дорівнює 20° і тіло протягом години охолоджується від 100° до 30°, через скільки хвилин (з моменту початку охолодження) його температура знизиться до 60°?

Варіант 6

1. $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$	**2.** $2xydx=-(y^2-x^2)dy$
3. $(8y+10x-1)dx+(5y+7x-4)dy=0$	**4.** $\sin(x+y)dx+$ $+x\cos(x+y)(dx+dy)=0$
5. $x(y'-y)=(1-x^2)e^x$	**6.** $y'-2xy=y^2$
7. $y'''=x^{-2}+2^x$	**8.** $y''=1+\dfrac{x(y'-x)}{1-x^2}$
9. $y''+2y(y')^3=0$	**10.** $y'''-y''-9y'+9y=0$
11. $y'''-3y''+3y'-y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=3$	**12.** $4y''+4y'+y=4e^{-\frac{x}{2}}\cos 2x$
13. $y''+2y'+10y=e^{-x}x\cos 3x$	**14.** $y''-4y'+3y=xe^x+\dfrac{1}{2}x$
15. $y''+y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x\cos x}}$	**16.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2\end{cases}$

17. Довести, що крива, яка має властивість, що всі її нормалі проходять через фіксовану точку, є колом.

18. Гнучкий однорідний нерозтяжний канат, закріплений кінцями у двох точках, провисає під дією власної ваги. Визначити форму рівноваги канату, якщо q − питома вага. (Диференціальне рівняння лінії рівноваги $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{W}{H}$, де Н − горизонтальний натяг (сталий), $W=f(x)$ – вертикальне навантаження, що припадає на частину канату від найнижчої його точки *M(0;a)* до точки з абсцисою *x*.)

Варіант 7

1. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$	**2.** $(3x^2-y^2)dx-2xydy=0$
3. $(x+y+2)dx+(y-x-1)dy=0$	**4.** $(e^y+ye^x+3)\,dx= =(2-e^y x-e^x)\,dy$
5. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$	**6.** $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$
7. $y'''=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}$	**8.** $xy''=y'$
9. $y''\,tg\;y=2(y')^2$	**10.** $y^{IV}-3y'''+3y''-y'=0$
11. $y''-4y'+3t=0,$ $y(0)=6,\, y'(0)=10$	**12.** $y''+49y=e^{7x}\cos x$
13. $y''-y'=-9x$	**14.** $y''-y=7x^2+x+\cos x$
15. $y''+y=\frac{2}{\sin^3 x}$	**16.** $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=x_1-2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2\end{cases}$
17. Швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості. За який час кількість бактерій збільшиться в m разів у порівнянні з їхньою початковою кількістю?	
18. Тіло падає без початкової швидкості під дією сили тяжіння, відчуваючи в цей час дію сили тертя, пропорційної швидкості руху. Визначити положення тіла (його висоту) через t_1 секунд після початку падіння.	

Варіант 8

1. $(x^2 - yx^2)\dfrac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$	**2.** $(xy' - y)\, arctg\dfrac{y}{x} = x$
3. $(x + y - 2)dx - (3x - y - 2)dy = 0$	**4.** $(3x^2y^2 + 7)dx + 2x^3ydy = 0$
5. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$	**6.** $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{2}{\cos^2 x}\sqrt{y}$
7. $y^{IV} = \cos x + shx$	**8.** $y'' + 2x(y')^2 = 0$
9. $2yy'' = 1 + (y')^2$	**10.** $y''' + y'' - y' - y = 0$
11. $y''' + y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -1$	**12.** $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}\cos 3x$
13. $4y'' + 4y' + 1 = 4x^2 e^{\frac{x}{2}}$	**14.** $y'' + y = x^2 + 2 + \cos 2x$
15. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$	**16.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \end{cases}$

17. Крива $y = \phi(x)$ проходить через точку (1, 2). Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою, рівною подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти криву $y = \phi(x)$.

18. Важка матеріальна точка маси m падає без початкової швидкості в середовищі, де діє опір, сила опору *f* якого виражається формулою $f = kv^2$. Знайти закон залежності швидкості від часу, а також шлях, пройдений точкою за час τ.

Варіант 9

1. $(y-a)dx+x^2dy=0$	**2.** $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$
3. $(x+7y-8)dx-(9x-y-8)dy=0$	**4.** $(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0$
5. $y'=1-\frac{1-2x}{x^2}y$	**6.** $y'+2xy=2x^3y^3$
7. $y'''=\frac{1}{x}+e^{\frac{x}{2}}$	**8.** $y''\,tgx=y'+1$
9. $2(y')^2=(y-1)y''$	**10.** $y'''-64\{y'=0$¿
11. $y^{IV}+y'''=0,\ y(0)=2,$ $y'(0)=1,\ y''(0)=y'''(0)=-1$	**12.** $y''+4y'+4y=10e^x\cos 2x$
13. $y''+25y=(-x+2)\cos 5x$	**14.** $y''-6y'+10y=e^{3x}\cos x+2\sin x$
15. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2+1}$	**16.** $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=x_1-x_2, \\ \frac{dx_2}{dt}=-4x_1-x_2 \end{cases}$
17. Крива $y=\phi(x)$ проходить через точку (0, 1) і володіє такою властивістю, що в кожній її точці тангенс кута дотичної дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику. Знайти цю криву.	
18. Тіло маси *m* ковзає по горизонтальній площині під дією поштовху, що надав йому початкову швидкість V_0. На тіло діє сила тертя, рівна –*km*. Знайти відстань, пройдену цим тілом до зупинки.	

Варіант 10

1. $ydx-\left(x^2-a^2\right)dy=0$	**2.** $xy'-x\cos\frac{y}{x}-y=0$
3. $\left(x+3y+3\right)dx-\left(9x-3y+4\right)dy=0$	**4.** $\left(x\cos 2y+1\right)dx-x^2\sin 2y dy=0$
5. $y'+ay=e^{mx}$	**6.** $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$
7. $y'''=x^{-3}+3^x$	**8.** $y''=y'+x$
9. $y''y^3=1$	**10.** $y^{IV}+2y''+y=0$
11. $y^{IV}+y''=0, y(0)=2,$ $y'(0)=1, y''(0)=y'''(0)=0$	**12.** $y''+2y'+5y=\left(x^2+3x\right)e^x$
13. $y''+3y'=8x^2$	**14.** $y''-3y'+2y=e^{2x}+3x^2+1$
15. $y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}$	**16.** $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=3x_1-x_2, \\ \frac{dx_2}{dt}=4x_1-x_2 \end{cases}$

17. У прямолінійній трубі радіуса R тече рідина. Швидкість течії V кожного шару рідини збільшується з наближенням цього шару до центру труби (вісі циліндра). Знайти V як функцію відстані r відповідного шару рідини від вісі циліндра. (Примітка: $dv=-\left(\frac{\gamma i}{2\varepsilon}\right)rdr$, де ε – коефіцієнт пружності, i– гідравлічний спад, γ – питома вага рідини.)

18. Матеріальна точка маси m кинута вертикально вгору зі швидкістю V_0. Вважаючи опір повітря пропорційним квадрату швидкості руху точки, знайти швидкість падіння її на землю.

Варіант 11

1. $\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{1+y^2}$	**2.** $y^2+x^2 y'=xy\{y'¿$
3. $(x-2y+3)dx+(2x+y+2)dy=0$	**4.** $(3x^2y-4xy^2)dx+$ $+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$
5. $y'+y=\cos x$	**6.** $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$
7. $y^{IV}=\cos x+shx$	**8.** $xy''=-y'\ln x$
9. $2yy''-(y')^2=0$	**10.** $y^{IV}+4y''+4y=0$
11. $y'''+3y''+2y'=0,$ $y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=-4$	**12.** $y''-y=x^2\cos x$
13. $y''=x^2+2x$	**14.** $9y''+6y'+y=e^{\frac{1}{3}x}+x\cos x$
15. $y''-y=\frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$	**16.** $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=-x_1+8x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}=x_1+x_2\end{cases}$

17. Знайти криву, для якої тангенс кута нахилу її дотичної в *n* разів більший за тангенс кута нахилу прямої, що з'єднує ту ж точку з початком координат.

18. Еластичний однорідний шнур довжини *l* під дією сили *F* подовжується на величину *klF*, де *k*=const. Знайти подовження *S* цього шнура під дією власної його ваги *Q*, якщо він підвішений за один кінець.

Варіант 12

1. $(1+y^2)\ dx-\sqrt{x}\,dy=0$	**2.** $(x-y)dx+(x+y)dy=0$
3. $(2x+y-2)dx-(2x+2y-1)dy=0$	**4.** $3x^2e^y dx+(x^3e^y-1)dy=0$
5. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$	**6.** $xy'+xy^2=y$
7. $y'''=\frac{1}{x^2}+shx$	**8.** $x(y''+1)+y'=0$
9. $(y'')^2+(y')^2=a^2$	**10.** $y^{IV}+8y''+16y=0$
11. $y'''+y'=0,\ y(0)=2,$ $y'(0)=3,\ y''(0)=-1$	**12.** $y''-2y'+y=-2e^x\sin x$
13. $y''-2y'+10y=6e^x\sin 3x$	**14.** $y''+9y=-2\cos 3x+e^{-3x}$
15. $y''-2y'+y=\frac{x^2+2x+2}{x^3}$	**16.** $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=3x_1+8x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}=-x_1-3x_2\end{cases}$

17. Матеріальна точка маси $m=1$ рухається прямолінійно, наближаючись до центру, який відштовхує її з силою, рівною kx^2 (x – відстань від точки до центру). Знайти закон руху матеріальної точки, якщо $t=0$, $x=a$, $\frac{dx}{dt}=ka$.

18. Знайти закон руху тіла, що вільно падає без початкової швидкості, вважаючи опір повітря пропорційним квадрату швидкості руху тіла і величину 75 м/с – граничним значенням цієї швидкості.

Варіант 13

1. $x\left(1+y^2\right)dx-y\left(1+x^2\right)dy=0$	**2.** $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$
3. $\left(x+3y+4\right)dx-\left(3x+y-6\right)dy=0$	**4.** $\left(2y-3\right)dx+\left(2x-3y^2\right)dy=0$
5. $y'+2xy=xe^{-x^2}$	**6.** $y'+4x^3y^3+2xy=0$
7. $y'''=2^x+\sin\frac{x}{2}$	**8.** $y''\sin x=\left(1+y'\right)\cos x$
9. $\left(y'\right)^2+2yy''=0$	**10.** $y'''+4y''+3y'=0$
11. $y'''-3y'+2y=0,$ $y(0)=0, y'(0)=-2, y''(0)=0$	**12.** $y''+2y'+10y=\left(x+7\right)e^{3x}$
13. $y''-4y'+3y=\left(x^2+2\right)e^{3x}$	**14.** $y''-2y'+y=xe^x+7\cos x$
15. $y''+9y=\frac{9}{\sin 3x}$	**16.** $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=2x_1-9x_2, \\ \frac{dx_2}{dt}=x_1+8x_2 \end{cases}$
17. Конденсатор ємності Q ввімкнено в ланцюг з напругою E та опором R. Визначити заряд q конденсатора в момент t після ввімкнення.	
18. Матеріальна точка занурюється в рідину, відчуваючи опір рідини, пропорційний швидкості руху. Знайти закон руху матеріальної точки, що занурюється в цю рідину зі стану спокою.	

Варіант 14

1. $x y' = y \ln y$	**2.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$
3. $(x+8y-9)dx-(10x-y-9)dy=0$	**4.** $2x\cos^2 y dx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$
5. $y'+2y=4x$	**6.** $x(2x-1)y'+y^2=(4x+1)y$
7. $y^{IV}=x+\sin 2x$	**8.** $y''-2x(x^2-y')=0$
9. $y''=\dfrac{1}{a}\left[1+(y')^2\right]$	**10.** $y'''+3y''+2y'=0$
11. $y^{IV}+2y''+y=0,$ $y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=-1, y'''(0)=-5$	**12.** $y''+4y=xe^x$
13. $y''-4y'+4y=8e^{2x}$	**14.** $y''-y=2xe^{-x}-4\sin 2x$
15. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$	**16.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-7x_1+x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1-5x_2 \end{cases}$

17. Знайти криву, для кожної точки якої трикутник, утворений нормаллю з координатними осями, рівновеликий трикутнику, утвореному віссю абсцис, дотичною і нормаллю.

18. Потяг рухається горизонтальним шляхом. Вага потяга *P*, сила тяги тепловоза – *T*, сила опору під час руху рівна *F=a+bv,* де *a* і *b* – сталі, а *v* – швидкість руху. Визначити закон руху потяга, приймаючи нульові початкові умови.

Варіант 15

1. $\left(1+x^2\right)y^3 dx - x^3\left(1+y^2\right)dy = 0$	**2.** $x^2 y' = y^2 + xy$
3. $\left(2x+3y-1\right)dx - \left(5x+y-5\right)dy = 0$	**4.** $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2 y\right)dy = 0$
5. $y' + \dfrac{n}{x}y = \dfrac{a}{x^n}$	**6.** $a y' + y = xy^{n-1}$
7. $y''' = shx + x^2$	**8.** $y'' - 2y' ctgx = \sin^3 x$
9. $y y''' - \sqrt{1+\left(y'\right)^2} = 0$	**10.** $2y^{IV} + 4y'' + 2y = 0$
11. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0,$ $y(0)=3, y'(0)=0, y''(0)=2, y'''(0)=0$	**12.** $y'' - 6y' + 9y = 6\cos xe^{3x}$
13. $y'' + 16y = 7\cos 4x$	**14.** $y'' + 4y' - 5y = -3e^{-5x} + 2\sin x$
15. $y'' + 4y' = \dfrac{1}{\sin 2x}$	**16.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2 \end{cases}$

17. Балка довжиною l, що лежить на двох опорах, перебуває під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q. Знайти рівняння зігнутої осі балки і її максимальний прогин, вибравши початок координат в середині ненавантаженої балки.

18. Куля входить в дошку товщиною h=0,1 м зі швидкістю $V_0 = 200$ м/с, а вилітає з дошки, пробивши її зі швидкістю $V_1 = 80$ м/с. Беручи до уваги, що сила опору дошки руху кулі пропорційна квадрату швидкості руху, знайти, скільки часу тривав рух кулі крізь дошку.

Варіант 16

1. $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$	**2.** $\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$
3. $(x-3y-1)dx-(5x-y+1)dy=0$	**4.** $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$
5. $y'-\frac{n}{x}y=e^x x^n$	**6.** $y'-\frac{1}{2a}y=-\frac{1}{y}2x$
7. $y'''=chx+x^{-2}$	**8.** $y''x\ln x-y'=0$
9. $yy''=y'$	**10.** $y'''-y''+y'-y=0$
11. $y'''+2y''+y'=0,$ $y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=-1$	**12.** $y''+y=6e^{-x}\sin x$
13. $y''-2y'+y=(x^2+1)e^x$	**14.** $y''-3y'+2y=xe^{2x}+7x^2+x$
15. $y''-y'=e^{2x}\cos e^x$	**16.** $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2, \\ \frac{dx_2}{dt}=3x_1+4x_2 \end{cases}$

17. Знайти криву, що перетинає всі прямі виду $y=kx$ під однаковим кутом $\frac{\pi}{4}$.

18. Точка маси *m* = 1 рухається прямолінійно; на неї діє сила, пропорційна квадрату часу, що пройшов від моменту, коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності дорівнює 2). Крім того, точка відчуває опір середовища, пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності рівний 1). Знайти залежність шляху від часу.

Варіант 17

1. $\dfrac{x^2}{y^3}dx + e^{x+y}dy = 0$	**2.** $x\,y' = 2\sqrt{xy} = y$
3. $(x+4y-5)dx - (x-y-1)dy = 0$	**4.** $ydx + (x - y^3)dy = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = 1$	**6.** $(1+x^2)y' - 2xy = =4\sqrt{y(1+x^2)}\,arctgx$
7. $y''' = e^{3x} + 3^x$	**8.** $x\,y'' - y' = 1$
9. $y\,y''' - 2\,y\,y'\ln y = (y')^2$	**10.** $y''' - 2y'' + 5y' = 0$
11. $y''' - 5y'' + 6y' = 0,$ $y(0)=0,\, y'(0)=0,\, y''(0)=3$	**12.** $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}\sin 2x$
13. $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$	**14.** $y'' + 49y = 3\cos 7x + 2e^{7x}$
15. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$	**16.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 \end{cases}$

17. Вітер, проходячи лісом, через опір дерев втрачає швидкість. На нескінченно малому шляху ця втрата пропорційна швидкості вітру на початку цього шляху та на його довжині. Знайти швидкість вітру, що пройшов лісом 150 м, знаючи, що початкова швидкість була 12 м/с, після проходження шляху *S*=1м швидкість його зменшилася до 11,8 м/с.

18. Два однакових вантажі підвішені до кінця жорстко закріпленої другим кінцем пружини. Знайти закон руху одного з вантажів, якщо другий зірветься. Відомо, що вільно підвішений до пружини вантаж подовжує її на *a* см.

Варіант 18

1. $\frac{1}{4y}e^{2x^2+\ln x}dx-\frac{1}{\sqrt{2+2y^2}}dy=0$	**2.** $y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}$
3. $(2x+2y-2)dx-(x+y+8)dy=0$	**4.** $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$
5. $(x-x^3)y'+(2x^2-1)y-ax^3=0$	**6.** $2yx'-x=-x^3\sin y$
7. $y^{IV}=2^{-x}$	**8.** $x(y''+4)+y'=0$
9. $2yy'+y''=0$	**10.** $y'''-3y''+7y'-5y=0$
11. $y^{IV}-6y'''+9y''=0,$ $y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=1, y'''(0)=-1$	**12.** $9y''-6y'+y=-\cos x$
13. $y''+y'=x^2+7x$	**14.** $y''-4y'+5y=$ $=3e^{2x}\sin x+2\cos 2x$
15. $y''+y=3\,tgx$	**16.** $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=x_1+5x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}=-x_1-3x_2\end{cases}$

17. Цегляна стіна має товщину 30 см. Знайти залежність температури від відстані точки до зовнішнього краю стіни, якщо температура дорівнює 20° на внутрішній і 0° на зовнішній поверхні стіни. (Швидкість *Q*, з якою теплота поширюється через ділянку *A*, перпендикулярну до осі *Ox:* $Q=-kS\frac{dT}{dt}$, *к*=0,0015, *T* – температура, *t* – час, *S* – площа *A*.)

18. Зісковзування важкого ланцюга з гаку починається в момент, коли довжина однієї його частини дорівнює 10 м, а другої – 8 м. Сила тертя дорівнює вазі 1 м ланцюга. Знайти час зісковзування ланцюга по гаку.

Варіант 19

1. $x\left(1+y^4\right)dx+e^{-x}\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)dy=0$	**2.** $y+\left(2\sqrt{xy}-x\right)y'=0$
3. $\left(-2x+3y+1\right)dx-\left(x+y-2\right)dy=0$	**4.** $\left(2x+3y^2\right)dx+\left(6xy-y+1\right)dy=0$
5. $y'-\dfrac{3y}{x}=x$	**6.** $y'+2x=e^x y^2$
7. $y'''=10^x+x^{10}$	**8.** $x^3 y''+x^2 y'=1$
9. $y'''=\dfrac{1}{4}y^{-\frac{1}{2}}$	**10.** $y^{IV}+3y'''+2y''=0$
11. $y'''-3y''-y'+3y=0,$ $y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=-1$	**12.** $y''+2y'+10y=x^2+3x$
13. $9y''-6y'+y=\left(x+6\right)e^{\frac{x}{3}}$	**14.** $y''-y'=xe^x+1$
15. $y''-3y'+2y=\dfrac{-4}{2+e^{-x}}$	**16.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=4x_1-x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+2x_2 \end{cases}$

17. Знайти рівняння руху точки, якщо прискорення залежно від часу виражається формулою *a=1,2t*, а за умови, коли *t*=0, маємо *S*=0, а якщо *t*=5, буде *S*=20.

18. Крапля води, що має початкову масу m_0 г і рівномірно випаровується зі швидкістю *m* г/с, рухається за інерцією з початковою швидкістю v_0 см/с. Сила опору середовища пропорційна швидкості руху краплі та її радіусу. У початковий момент (*t*=0) вона дорівнює f_0 дин. Знайти залежність швидкості краплі від часу.

Варіант 20

1. $y' = e^{x+y}$	**2.** $\left(x^2 - 2xy + y^2\right) y' + y^2 = 0$
3. $(x + 6y - 3) dx - (8x - y - 7) dy = 0$	**4.** $\left(y - 3x^2\right) dx - (4y - x) dy = 0$
5. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$	**6.** $2\frac{dy}{dx} + 2y = xy^2$
7. $y''' = 5^x + x^5$	**8.** $y'' + y' tgx = \sin 2x$
9. $y'' = ay\{y'¿$	**10.** $y''' - 3y'' + 2y' = 0$
11. $y''' - 9y' = 0,$ $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 3$	**12.** $y'' - 5y' + 4y = 9\cos 3x$
13. $y'' - 6y' + 10y = e^{3x} \cos x$	**14.** $y'' + 8y' + 16y = 3e^{-4x} + x\cos x$
15. $y'' + y = 6\,ctgx$	**16.** $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 \end{cases}$

17. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку М (2, 5) та має таку властивість, що відрізок будь-якої її дотичної, розміщений між осями координат, ділиться навпіл в точці дотику.

18. Ланцюг довжиною 6 м зісковзує зі столу без тертя. Рух цього ланцюга починається з моменту, коли звисає 1 м ланцюга. Обчислити час, після закінчення якого він впаде зі столу.

Варіант 21

1. $e^y\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=1$	**2.** $\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx+xdy=0$
3. $(5x+4y-3)dx=(6x-4y-3)dy$	**4.** $\left(x^2+y^2+x\right)dx+\left(2xy-e^y+1\right)dy=0$
5. $y'+y=e^{-x}$	**6.** $-2xy'+3y=\left(5x^2+3\right)y^3$
7. $y'''=\cos 2x+11e^x$	**8.** $xy''-y'=x^2e^x$
9. $y^3y'''=-1$	**10.** $y'''-3y''+2y=0$
11. $y'''+4y''+3y'=0,$ $y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=-1$	**12.** $-y''+2y'-y=e^{2x}\sin 4x$
13. $y''+y=(x-3)\sin x$	**14.** $y''-6y'+8y=e^{3x}+x^2+4x$
15. $y''+3y'=\frac{5e^{3x}}{1+e^{3x}}$	**16.** $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=x_1-2x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}=3x_1+6x_2\end{cases}$

17. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку М (1, 1) та володіє такою властивістю, що відстань від початку координат до будь-якої її дотичної рівна абсцисі точки дотику.

18. Моторний човен рухається у спокійній воді зі швидкістю v_0=9 км/год. На повному ходу його двигун був вимкнений, і через 20 с швидкість човна зменшилася до 4,5 км/год. Визначити шлях, пройдений човном за 1 хв (з моменту вимкнення двигуна).

Варіант 22

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^2+y^2}{x^2y-x^3}$	**2.** $xy'-y=xtg\frac{y}{x}$
3. $(2x+y-4)dx-(3x+5y+1)dy=0$	**4.** $\frac{x}{(x+y)^2}dx+\frac{2x+y}{(x+y)^2}dy=0$
5. $y'+xy=x^3$	**6.** $x^3dy+(2x^2y-y^3x)dx=0$
7. $y'''=\sin 2x+\frac{1}{x}$	**8.** $x^2y''+xy'-1=0$
9. $yy''+y=(y')^2$	**10.** $y^{IV}+y''=0$
11. $y'''+4y'=0,$ $y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=0$	**12.** $y''-2y'+17y=x\cos 4x$
13. $y''-4y'+3y=5e^{3x}$	**14.** $y''+2y'+y=4x^2+2\sin x\cos x$
15. $y''+\pi^2y=\frac{4}{\cos \pi x}$	**16.** $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=x_1-3x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}=x_1+5x_2\end{cases}$
17. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку M (1, 2) та володіє такою властивістю, що відрізок, який відсікається від осі ординат будь-якою дотичною, дорівнює абсцисі точки дотику.	
18. Зісковзування без тертя ланцюга, що висить на гаку, починається в той момент, коли довжина однієї його частини дорівнює 8 м, а другої – 10 м. Знайти час зісковзування ланцюга по гаку.	

Варіант 23

1. $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$	**2.** $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$
3. $(7x-y-6)dx-(x+5y-6)dy=0$	**4.** $(3x^2y+\cos x)dx+(x^3+2y)dy=0$
5. $\dfrac{dy}{dx}+2xy=2xe^{-x^2}$	**6.** $y'-y\sin x=y^2\sin x$
7. $xy'''=x^2+x\cos x$	**8.** $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$
9. $yy'''-(y')^2=y^3$	**10.** $y'''-3y''-y'+3y=0$
11. $y'''-y''=0,$ $y(0)=0, y'(0)=6, y''(0)=2$	**12.** $y''-6y'+8y=x\sin 2x$
13. $y''+2y'+17y=7e^{-x}\cos 4x$	**14.** $y''-2y'+y=$ $=xe^x+\dfrac{1}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)$
15. $y''+\dfrac{1}{\pi^2}y=\dfrac{1}{\pi^2\cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}$	**16.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1\end{cases}$
17. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку М (–1, 1) та має таку властивість, що відрізок, який відсікається на осі Ох дотичною, проведеною в будь-якій точці кривої, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.	
18. Точка маси *m*=1 рухається прямолінійно; на неї діє сила, пропорційна часу, що пройшов від моменту, коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності рівний 3). Крім того, точка відчуває опір середовища, пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності рівний 2). Знайти шлях, пройдений точкою за час *t*=4 с.	

Варіант 24

1. $x+xy+y'(y+xy)=0$	**2.** $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$
3. $(x+y+2)dx-(2x+1)dy=0$	**4.** $(5x-y)dx-xdy=0$
5. $y'+y\cos x=\sin x\cos x$	**6.** $(x^2+y^2+1)dy+xydx=0$
7. $e^x y'''=e^{2x}+2$	**8.** $(y''x-y')y'=x^3$
9. $y^2-(y')^2-2yy''=0$	**10.** $y'''+y'=0$
11. $y''+6y'+13y=0,$ $y(0)=0, y'(0)=1$	**12.** $y''-9y=x^2e^x$
13. $y''+9y=x\sin 3x$	**14.** $y''-4y=3e^{2x}-7x\cos x$
15. $y''+\frac{1}{4}y=\frac{1}{8}ctg\frac{x}{2}$	**16.** $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=4x_1+6x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}=4x_1+2x_2\end{cases}$
17. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку М (3, 1) та має таку властивість, що відрізок дотичної між точкою дотику і віссю *Ox* ділиться навпіл в точці перетину з віссю *Oy*.	
18. Резервуар містить 100 л розсолу, в якому розчинено 10 кг солі. У цю посудину вливається вода зі швидкістю 3 л/хв, і виливається з неї розчин зі швидкістю 2 л/хв, водночас концентрація розчину підтримується рівномірною шляхом перемішування. Скільки солі залишиться в резервуарі через годину від початку такого процесу?	

Варіант 25

1. $x^2 y' + y = 0$	**2.** $\left(x^2 + y^2\right) y' = 2xy$
3. $(2x + 3y - 5)dx - (5x - 5)dy = 0$	**4.** $\frac{2x - y}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y + x}{x^2 + y^2} dy = 0$
5. $x \ln x \, y' + y = 2 \ln x$	**6.** $y' - y \cos x = y^2 \cos x$
7. $x y''' = 2$	**8.** $\left(1 + x^2\right) y'' + 2x y' = x^3$
9. $y(1 - \ln y) y'' + (1 + \ln y)\left(y'\right)^2 = 0$	**10.** $y''' - 8y = 0$
11. $y'' + 2y' + 5y = 0,$ $y(0) = -1, y'(0) = 2$	**12.** $y'' + 2y' + y = 17 \sin 2x$
13. $y'' - 5y' + 6y = \left(x^2 + x\right) e^{2x}$	**14.** $4y'' - 4y' + y = 6e^{\frac{x}{2}} + 8x$
15. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{9 + e^{-x}}$	**16.** $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 8x_1 + x_2 \end{cases}$
17. Знайти рівняння лінії, що перетинає вісь абсцис в точці x=1 і має таку властивість: довжина піднормалі (проекції на вісь абсцис відрізка нормалі від точки перетину з кривою до точки перетину з віссю Ox) в кожній точці лінії дорівнює середньому арифметичному координат цієї точки.	
18. Знайти час падіння тіла на Землю з висоти $4 \cdot 10^5$ км (відстань до Місяця). Радіус Землі прийняти рівним 6400 км.	

Варіант 26

1. $y\,y' + x = 0$	**2.** $4x^2 + xy - 3y^2 + \left(y^2 + 2xy - 5x^2\right)y' = 0$
3. $(4x + 3y - 1)dy - (5y + x + 5)dx = 0$	**4.** $e^{-y}dx + \left(1 - xe^{-y}\right)dy = 0$
5. $x\,y' + y = x\cos x$	**6.** $2\left(x\,y' + y\right) = xy^2$
7. $y^{(n)} = x^m$	**8.** $y''\left(2y' + x\right) = 1$
9. $y\,y''' - \left(y'\right)^2 = y^2\,y'$	**10.** $y''' - 3y' - 2y = 0$
11. $4y'' - 4y' + 8y = 0,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0$	**12.** $y'' + 4y = x^2 + 2x$
13. $y'' + 4y' - 5y = 4e^{-5x}$	**14.** $y'' + 2y' + 5y = $ $= 4e^{-x}\cos x + x\sin 2x$
15. $y'' + 4y = 6\,tg\,2x$	**16.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 \end{cases}$

17. Знайти лінію, яка має таку властивість, що відрізок дотичної в будь-якій її точці, який пролягає між віссю *Ox* і прямою $y = ax + b$, ділиться точкою дотику навпіл.

18. Катер рухається у спокійній воді зі швидкістю $v_0 = 10$ км/год. На повному ходу двигун катера був вимкнений, і через 2 хв швидкість катера зменшилася до $v_1 = 0.5$ км/год. Визначити швидкість, з якою рухався катер через 40 с після вимкнення двигуна, вважаючи, що опір води пропорційний швидкості руху катера.

Варіант 27

<table>
<tr><td>1. $\sin x\cos y dx-\cos x\sin y dy=0$</td><td>2. $\left(y^2-4x^2\right)dy+xydx=0$</td></tr>
<tr><td>3. $\left(x+y+2\right)dx-\left(2x+y-4\right)dy=0$</td><td>4. $\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx-2\dfrac{y}{x}dy=0$</td></tr>
<tr><td>5. $y'-ytgx=\dfrac{1}{\cos^3 x}$</td><td>6. $y'-y=y^2e^{-x}\cos x$</td></tr>
<tr><td>7. $y'''=6e^{3x}$</td><td>8. $xy''=y'\left(\ln\{y$¿¿$'-\ln x\right)$</td></tr>
<tr><td>9. $y''\sin y-2\left(y'\right)^2\cos y=0$</td><td>10. $9y^{IV}+6y''+y=0$</td></tr>
<tr><td>11. $y'''-5y''+4y=0,$
$y(0)=0,\ y'(0)=4,\ y''(0)=3$</td><td>12. $y''+y=-\sin 2x$</td></tr>
<tr><td>13. $4y''-4y'+y=\left(x+7\right)e^{\frac{x}{2}}$</td><td>14. $y''+16y=x\cos 4x+8$</td></tr>
<tr><td>15. $4y''+y=\dfrac{7}{\sin^3\dfrac{x}{2}}$</td><td>16. $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_1-5x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-7x_1-3x_2\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">17. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку M($\sqrt{10}$;$\sqrt{10}$) і має таку властивість, що відрізок, який відсікається від осі абсцис дотичною, проведеною в будь-якій точці кривої, дорівнює кубу абсциси точки дотику.</td></tr>
<tr><td colspan="2">18. Крапля води, що має початкову масу m_0 г, рівномірно випаровується зі швидкістю m г/с та вільно падає в повітрі. Сила опору пропорційна швидкості руху краплі (коефіцієнт пропорційності k ($k\neq 2m$)). Знайти залежність швидкості руху краплі від часу, що пройшов з початку падіння краплі, якщо в початковий момент часу швидкість краплі дорівнювала нулю.</td></tr>
</table>

Варіант 28

1. $\sec^2 x \cdot tgy \cdot dy + \sec^2 y \cdot tgx \cdot dx = 0$	**2.** $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0$
3. $(x+5y-1)dx - (2x+11y+1)dy = 0$	**4.** $2e^y dx + (x^2 e^y - 3y)dy = 0$
5. $y' - yctgx = tg^2 x$	**6.** $y' - y = xy^2$
7. $y''' = 5x + 2e^{\frac{1}{2}x}$	**8.** $xy'' = y' + x^2 \sin x$
9. $2yy''' - 3(y')^2 = 4y^2$	**10.** $4y^{IV} + 4y'' + y = 0$
11. $4y^{IV} + 2y''' + y'' = 0,$ $y(0)=1, y'(0)=-1, y''(0)=0, y'''(0)=11$	**12.** $y'' - 2y' + 26y = 2e^{-5x}\cos 2x$
13. $y'' + 25\{y' = 2x\cos 5x¿$	**14.** $9y'' - 6y' + y = -3e^{\frac{1}{3}x} + x^2 + 2x$
15. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{4e^{-x}}{6+e^x}$	**16.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -5x_1 - 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2 \end{cases}$
17. Знайти лінію, у якої будь-яка дотична перетинається з віссю ординат в точці, однаково віддаленій від точки дотику та від початку координат.	
18. Сила струму I електричного ланцюга задовольняє диференціальне рівняння $Z\dfrac{dI}{dt} + RI = u,$ де Z – індуктивність, R – активний опір ланцюга, u – напруга на затискачах джерела струму. Знайти силу струму в цьому ланцюзі через $t = t_0$ після ввімкнення, якщо $u = u_0 \sin(2\pi nt),$ а за умови $t = 0$ сила струму $I = I_0$.	

Варіант 29

1. $x\,y' - y = 0$	**2.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + tg\,\dfrac{y}{x}$
3. $(-2x + 3y + 1)\,dx - (x - 2)\,dy = 0$	**4.** $yx^{y-1}dx + x^{y}\ln x dy = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$	**6.** $y' - y\sin x = y^2 \sin x$
7. $y''' = \sin\dfrac{x}{2} + \cos 2x$	**8.** $(x+1)\,y'' - (x+2)\,y' + x + 2 = 0$
9. $y\,y' = \sqrt{y^2 + (y')^2}\,y'' - y'\,y''$	**10.** $y''' + 2y'' + 10\,\{\,y' = 0$¿
11. $4y^{IV} + 4y'' + y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 8,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 11$	**12.** $y'' + 4y' - 5y = \cos 2x$
13. $y'' + y = x\cos x$	**14.** $y'' - 2y' + y = 8e^{x} + x\sin x$
15. $9y'' + y = 7\,tg\,\dfrac{x}{3}$	**16.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -7x_1 + 5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 - 8x_2 \end{cases}$
17. Знайти лінію, для якої відношення відстані від нормалі в будь-якій її точці до початку координат до відстані від тієї ж нормалі до точки (*a;b*) дорівнює сталій *k*.	
18. Знайти згинання осі балки сталого перерізу довжиною 2*l*, вільно обпертої кінцями на опори та рівномірно навантаженої з інтенсивністю *q*. (Потрібно знайти рівняння прогнутої балки і найбільший її прогин.) Диференціальне рівняння згинання такої балки $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sum_{i=1}^{n} M_i$, де E – модуль Юнга матеріалу балки, I – момент інерції перерізу балки, перпендикулярного до неї відносно тієї ж осі, $\sum_{i=1}^{n} M_i$ – алгебраїчна сума моментів всіх сил, що діють на балку, відносно її перерізу з абсцисою *x*, *y* – прогин балки в цьому перерізі.	

Варіант 30

1. $\left(1-e^{x}\right) y\, y^{'}=e^{x}$	**2.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^{2}e^{\frac{-x}{y}}}{x^{2}}$
3. $\left(x+6\,y-1\right)dx-\left(5\,x-y+7\right)dy=0$	**4.** $\left(1+x\sqrt{x^{2}+y^{2}}\right)dx+$ $+\left(-1+x\sqrt{x^{2}+y^{2}}\right)ydy=0$
5. $y^{'}-\dfrac{y}{1-x^{2}}=1+x$	**6.** $3\,x\,y^{'}+5\,y=\left(4\,x-5\right)y^{4}$
7. $y^{'''}=e^{3\,x}+3^{x}$	**8.** $y^{''}\left(1+\ln x\right)+\dfrac{1}{x}\,y^{'}=2+\ln x$
9. $y\,y^{''}=\left(y^{'}\right)^{2}+y^{'}\sqrt{y^{2}+\left(y^{'}\right)^{2}}$	**10.** $y^{'''}+4\,y^{''}+y=0$
11. $y^{'''}+4\,y^{''}+3\,y^{'}=0,$ $y\left(0\right)=4,\,y^{'}\left(0\right)=0,\,y^{''}\left(0\right)=2$	**12.** $y^{''}-4\,y^{'}+5\,y=xe^{x}$
13. $y^{''}-5\,y^{'}+4\,y=\left(x-1\right)e^{x}$	**14.** $y^{''}-5\,y^{'}+6\,y=7\,e^{2\,x}-3\cos 5\,x$
15. $y^{''}+16\,y=\dfrac{8}{\sin 4\,x}$	**16.** $\begin{cases}\dfrac{dx_{1}}{dt}=-5\,x_{1}-8\,x_{2}, \\ \dfrac{dx_{2}}{dt}=-3\,x_{1}-3\,x_{2}\end{cases}$
17. Знайти лінію, для якої відстань від початку координат до дотичної в довільній її точці дорівнює відстані від початку координат до нормалі в тій же точці.	
18. Маятник, що складається з матеріальної точки маси *m*, прикріпленої до нерозтяжної нитки довжини *l*, підвішений в нерухомій точці. Він гойдається в середовищі, опір якого пропорційний швидкості руху точки. Знайти період коливання маятника. (Коливання вважати малими, і тому $\sin\theta\approx\theta$.)	

Список рекомендованої літератури

1. *Самойленко А.М.* Диференціальні рівняння / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – Київ : Либідь, 2003. – 600 с.

2. *Шкіль М.І.* Диференціальні рівняння / М.І. Шкіль, В.М. Лейфура, П.Ф. Самусенко. – Київ : Техніка, 2003. – 368 с.

3. *Самойленко А.М.* Диференціальні рівняння у задачах / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. – Київ : Либідь, 2003. – 504 с.

4. *Герасимчук В.С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навч. посіб. / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2013. – 470 с.

5. *Івасишен С.Д.* Диференціальні рівняння: методи і застосування : навч. посіб. / С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, П.П. Настасієв, І.І. Дрінь. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 288 с.

6. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. І.М. Копась. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.

7. *Міхайленко В.М.* Збірник прикладних задач з вищої математики : навч. посіб. / В.М. Міхайленко, Н.Д. Федоренко. – Київ : вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.

8. *Огурцов А.П.* Вища математика для підготовки бакалаврів з інженерії : навч. посіб. у 3 ч. / за ред. А. П. Огурцова. / А.П. Огурцов, О.В. Наконечна, О.В. Нікулін. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2010. – Ч. 1, 428 с.; ч. 2, 340 с.; ч. 3, 320 с.

9. *Федоренко Н.Д.* Інтегральне числення та диференціальні рівняння. Практичний посібник з вищої математики для студентів першого курсу інженерних спеціальностей / Н.Д. Федоренко, С.В. Білощицька, О.В. Забарило, Ю.А. Коротких – Київ : КНУБА, 2018. – 100 с.

Навчальне видання

ЗАБАРИЛО Олексій Віталійович,
КОРОТКИХ Юлія Анатоліївна,
ЗАБАРИЛО Павло Олексійович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Редагування та коректура *Д.С. Виноградової*
Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 23.04.2026. Формат 60 × 84 1/16
Ум. друк. арк. 6,04. Обл.-вид. арк. 6,5.
Тираж 25 прим. Вид. № 11/І-26. Зам. № 7/1-26.

Виконавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03680

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р