

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

**РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ РАМИ НА СТІЙКІСТЬ.
ДИНАМІЧНИЙ РОЗРАХУНОК РАМИ**

Методичні вказівки
до виконання розрахунково-графічної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
освітньо-професійної програми «Промислове і цивільне будівництво»

Київ 2024

УДК 624.01/07

Р64

Укладачі: І. Д. Кара, канд. техн. наук, доцент;
А. А. Козак, канд. техн. наук, доцент;
І. І. Солодей, д-р техн. наук, професор;
О. О. Лук'янченко, д-р техн. наук, професор

Рецензент Ю. В. Максим'юк, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск П. П. Лізунов, д-р техн. наук,
професор

*Затверджено на засіданні кафедри будівельної механіки,
протокол № 1 від 30 серпня 2023 року.*

В авторській редакції.

Розрахунок плоскої рами на стійкість. Динамічний
Р64 розрахунок рами : методичні вказівки до виконання
розрахунково-графічної роботи / уклад.: Кара І. Д. та ін. –
Київ : КНУБА, 2024. – 28 с.

Містять короткі теоретичні відомості, методичні вказівки,
приклад виконання розрахунково-графічної роботи.

Призначено для здобувачів спеціальності 192 «Будівництво та
цивільна інженерія» освітньо-професійної програми «Промислове і
цивільне будівництво».

© КНУБА, 2024

ЗМІСТ

Загальні положення	4
Короткі теоретичні відомості	5
Приклад виконання розрахунково-графічної роботи	10
Частина I. Розрахунок плоскої рами на стійкість	10
Частина II. Динамічний розрахунок рами	16
Рекомендована література.....	28

Загальні положення

Освітня компонента «Динаміка і стійкість будівель і споруд» є вибірковою компонентою в навчальному плані підготовки бакалаврів за освітньо-професійною програмою «Промислове і цивільне будівництво» спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія» галузі знань «Архітектура та будівництво». Ця освітня компонента базується на попередньо отриманих знаннях із вищої математики, фізики, теоретичної механіки, опору матеріалів, будівельної механіки.

Відповідно до навчального плану та робочої програми передбачається виконання здобувачами денної та заочної форм навчання однієї розрахунково-графічної роботи «Розрахунок плоскої рами на стійкість. Динамічний розрахунок рами». Виконання здобувачами розрахунково-графічної роботи є важливим інструментом для ефективного засвоєння теоретичного матеріалу, набуття практичних здібностей до використання пройденого матеріалу. Аналіз виконання здобувачами РГР дає змогу викладачу оцінити якість засвоєння пройденого матеріалу, виявити прогалини у знаннях здобувачів.

Методичні вказівки містять короткі теоретичні відомості, приклад виконання розрахунково-графічної роботи з поетапними поясненнями та ілюстраціями. Список літературних джерел наведено в розділі «Рекомендована література».

Виконана РГР оформляється на аркушах паперу формату А4 вручну або електронно. Титульний лист є першим аркушем роботи. Після оформлення роботи листи скріпляються скобами. РГР з відповідними рисунками повинна оформлятися здобувачем охайно.

Короткі теоретичні відомості

Мета розрахунку на стійкість полягає в обчисленні значення критичного навантаження. Розрахунок рами на стійкість базується на припущеннях:

- матеріал, з якого вироблені елементи рами, працює в зоні пружних деформацій до настання втрати стійкості;
- прикладене на раму навантаження призводить до вузлових сил, які не зумовлюватимуть згину до настання втрати стійкості;
- значення вузлових сил залежать від одного параметра – параметра навантаження;
- поздовжні деформації та деформації зсуву не враховуються в розрахунку, тому відстань між вузлами в разі згину стержнів залишається незмінною.

До настання втрати стійкості, відповідно до припущень, елементи рами перебувають в умовах центрального стиснення. У розрахунку на стійкість розглядається рама після втрати стійкості, коли до поздовжніх деформацій додається згин, рама стає стиснено-зігнутою.

Під час розрахунку рами на стійкість досить часто використовується метод переміщень. Із застосуванням цього методу до вихідної розрахункової схеми накладаються додаткові в'язі («плаваючі» затиснення та додаткові опорні стержні), які розділяють раму на сукупність прямолінійних стержнів. Задача визначення значення критичного навантаження полягає у розв'язанні рівняння стійкості, для одержання якого прирівнюється до нуля визначник матриці коефіцієнтів системи рівнянь, які виражають рівність нулю реакцій у накладених в'язях.

Для побудови системи рівнянь використовуються формули методу переміщень в розгорнутій формі (табл. 1, 2, 3). Під час вибору формули для стержня рами слід враховувати граничні умови стержня: затиснення з обох кінців (табл. 1); затиснення та шарнір на кінцях (табл. 2); шарніри з обох кінців (табл. 3). Також береться до уваги наявність поздовжніх і поперечних зусиль у стержні.

Вплив поздовжнього зусилля в стержні на кінцеві зусилля залежить від безрозмірного параметра ν :

$$\nu = \sqrt{\frac{N \cdot l^2}{EI}} = \sqrt{\frac{N \cdot l}{i}},$$

де i – погонна жорсткість стержня; N – поздовжнє зусилля в стержні (стискуюче зусилля приймається додатним).

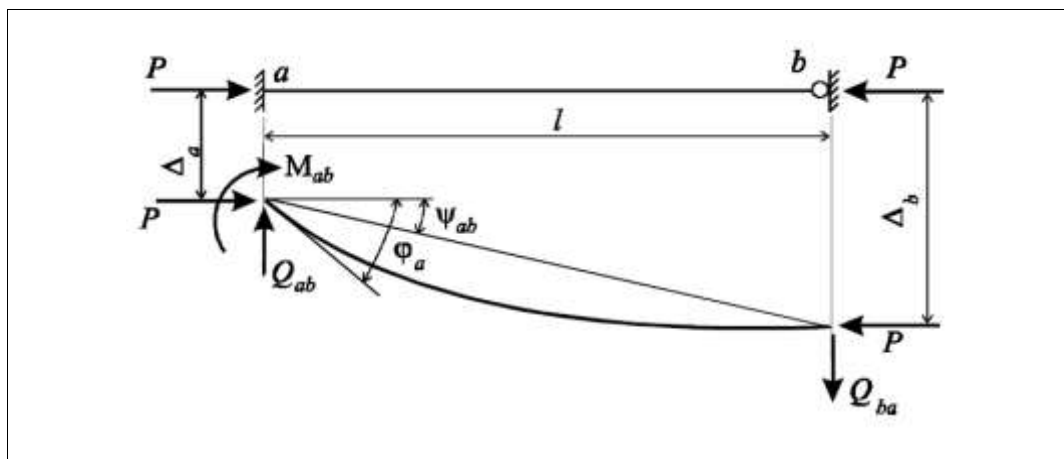
Таблиця 1

Стержень із затисненнями з обох кінців

$N \neq 0$ $Q = ?$	$M_{ab} = 2i_{ab}(\alpha_{ab}\varphi_a + \beta_{ab}\varphi_b - (\alpha + \beta)_{ab}\psi_{ab})$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{2i_{ab}}{l_{ab}}((\alpha + \beta)_{ab}(\varphi_a + \varphi_b) - \gamma_{ab}\psi_{ab})$
$N \neq 0$ $Q = 0$	$M_{ab} = i_{ab} \left(\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v} \right)_{ab} \varphi_a - \left(\frac{v}{\sin v} \right)_{ab} \varphi_b \right)$
$N = 0$	$M_{ab} = 2i_{ab}(2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab})$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab})$

Таблиця 2

Стержень із затисненням шарніром на кінцях



$N \neq 0$ $Q = ?$	$M_{ab} = i_{ab} \bar{\alpha}_{ab} (\varphi_a - \psi_{ab})$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{i_{ab}}{l_{ab}} (\bar{\alpha}_{ab} \varphi_a - \bar{\gamma}_{ab} \psi_{ab})$
$N \neq 0$ $Q = 0$	$M_{ab} = -i_{ab} \nu_{ab} \operatorname{tg} \nu_{ab} \varphi_a$
$N = 0$	$M_{ab} = 3i_{ab} (\varphi_a - \psi_{ab})$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_a - \psi_{ab})$

Таблиця 3

Стержень із шарнірами з обох кінців

$N \neq 0$ $Q = ?$	$Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{i_{ab}}{l_{ab}} \nu_{ab}^2 \psi_{ab}$
$N \neq 0$ $Q = 0$	$Q_{ab} = Q_{ba} = 0$
$N = 0$	$Q_{ab} = Q_{ba} = 0$

Розв'язання рівняння стійкості зазвичай проводять шляхом підбору, почергово надаючи параметру ν різних значень (0, 1, 2, 3, ...) та обчислюючи значення детермінанта. Після визначення значення ν^{kp} обчислюється значення критичного навантаження:

$$P^{kp} = \frac{(\nu^{kp})^2 \cdot i}{l}.$$

Завданням динамічного розрахунку споруди є визначення значень динамічних зусиль і переміщень, які зумовлюються динамічними

деформаціями елементів споруди. Динамічний розрахунок рами має два етапи: розрахунок на вільні коливання й розрахунок на змушені коливання. Вільні коливання здійснює система, яка початково виведена зі стану рівноваги, після чого зовнішнє навантаження усувається і система продовжує рух завдяки енергії, яку отримала за початкового впливу. Змушені коливання здійснює система за постійної дії зовнішнього динамічного навантаження $P(t)$ завдяки енергії, отриманої від роботи навантаження.

Порядок проведення розрахунку на вільні коливання системи:

- визначення ступенів динамічної вільності розрахункової схеми та побудова схеми з позначеними додатними напрямками незалежних переміщень мас системи $y_i(t)$ та сил інерції $F_i(t)$;
- складання системи диференціальних рівнянь руху розрахункової схеми із зазначенням можливих незалежних переміщень мас системи як суми переміщень від дії сил інерції:

$$\begin{cases} y_1(t) = -\tilde{m}_1 \ddot{y}_1(t) \delta_{11} - \tilde{m}_2 \ddot{y}_2(t) \delta_{12} - \dots - \tilde{m}_n \ddot{y}_n(t) \delta_{1n} \\ y_2(t) = -\tilde{m}_1 \ddot{y}_1(t) \delta_{21} - \tilde{m}_2 \ddot{y}_2(t) \delta_{22} - \dots - \tilde{m}_n \ddot{y}_n(t) \delta_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n(t) = -\tilde{m}_1 \ddot{y}_1(t) \delta_{n1} - \tilde{m}_2 \ddot{y}_2(t) \delta_{n2} - \dots - \tilde{m}_n \ddot{y}_n(t) \delta_{nn} \end{cases},$$

де \tilde{m}_i – сумарна маса, яка переміщується в напрямі i ; $\ddot{y}_i(t)$ – прискорення відповідної маси; δ_{ij} – переміщення сумарної маси \tilde{m}_i в напрямі j .

Характеристичне рівняння, яке є умовою наявності коливань, одержується шляхом прирівнювання до нуля детермінанта матриці коефіцієнтів системи рівнянь руху:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \tilde{m}_1 \delta_{11} - \lambda & \tilde{m}_2 \delta_{12} & \dots & \tilde{m}_n \delta_{1n} \\ \tilde{m}_1 \delta_{21} & \tilde{m}_2 \delta_{22} - \lambda & \dots & \tilde{m}_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{m}_1 \delta_{n1} & \tilde{m}_2 \delta_{n2} & \dots & \tilde{m}_n \delta_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

де $\lambda = 1/\omega^2$ – власне число матриці коефіцієнтів системи рівнянь руху; ω – частота власних коливань;

- визначення власних характеристик матриці рівнянь руху – визначення власних чисел λ матриці коефіцієнтів системи рівнянь руху й одержання спектра власних частот;
- побудова форм вільних коливань – після визначення з рівнянь співвідношення між амплітудами будуються деформовані осі системи. Система з n ступенями вільності має n головних форм коливань.

Порядок проведення розрахунку на змушені коливання системи:

- розв’язання рівнянь руху за змушених коливань, які одержуються, – система лінійних алгебраїчних рівнянь у випадку змушених коливань має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\delta_{11} - \frac{1}{\tilde{m}_1 \theta^2} \right) B_1 + \delta_{12} B_2 + \dots + \delta_{1n} B_n + \delta_{1p} P_0 = 0; \\ \delta_{21} B_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{\tilde{m}_2 \theta^2} \right) B_2 + \dots + \delta_{2n} B_n + \delta_{2p} P_0 = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{n1} B_1 + \delta_{n2} B_2 + \dots + \left(\delta_{nn} - \frac{1}{\tilde{m}_n \theta^2} \right) B_n + \delta_{np} P_0 = 0, \end{array} \right.$$

де $\theta = k \cdot \omega_1$ – циклічна частота зміни зовнішнього навантаження; ω_1 – циклічна частота основного тону власних коливань; P_0 – амплітудне значення динамічного навантаження; B_n – амплітудні значення сил інерції;

- розв’язання рівнянь руху за змушених коливань – розв’язками системи рівнянь є значення амплітудних сил B_n з боку мас системи за змушених коливань;
- побудова динамічних епюр внутрішніх зусиль $M_{дин}(t)$, $Q_{дин}(t)$, $N_{дин}(t)$;
- виконання кінематичної перевірки – порівняння амплітудних значень переміщень мас з відповідними переміщеннями, визначеними за методом Мора;
- виконання перевірки динамічної рівноваги всієї розрахункової схеми.

У разі проведення динамічного розрахунку системи одержані амплітудні значення параметрів відповідають моменту часу, за якого значення зовнішнього динамічного навантаження досягає $P(t)$ додатного амплітудного значення P_0 .

Приклад виконання розрахунково-графічної роботи
Частина I. Розрахунок плоскої рами на стійкість

Дано: стержнева система (рис. 1.1) завантажена силами $P_1 = P$, $P_2 = 2P$, $n = 2$.
 Потрібно виконати розрахунок рами на стійкість.

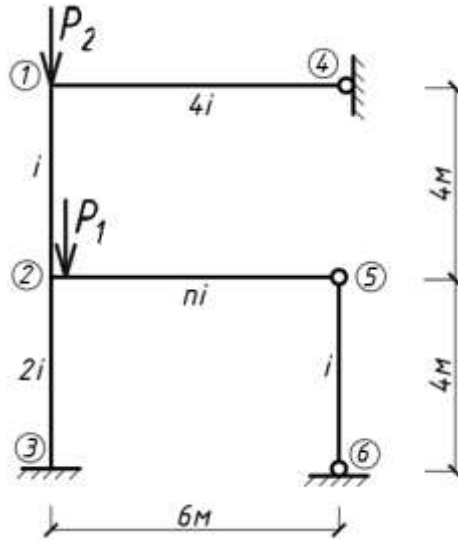


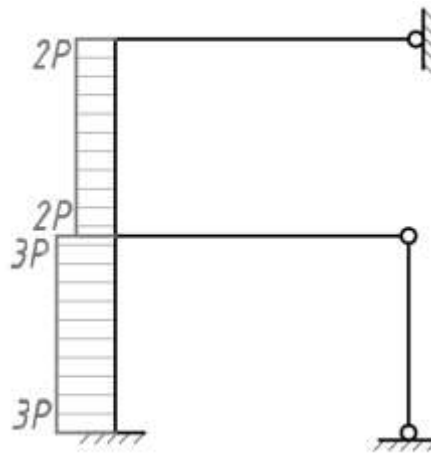
Рис. 1.1

1. Визначення кількості основних невідомих методу переміщень (рис. 1.2, а, б).

Кутові:	Лінійні:	
<p align="center">а</p>	<p align="center">б</p>	Кути перекосу рами: $\psi_{1-2} = -\frac{\Delta}{4}$ $\psi_{2-3} = \psi_{5-6} = +\frac{\Delta}{4}$ $\psi_{1-4} = \psi_{2-5} = 0$
Рис. 1.2		
$k = k_{\varphi} + k_{\Delta} = 2 + 1 = 3$		

2. Побудова системи рівнянь рівноваги накладених в'язей із використанням методу переміщень у розгорнутій формі.

Побудуємо епюру
 поздовжніх зусиль (рис. 1.3):



еп. N

Рис. 1.3

Основна система методу
 переміщень має вигляд
 (рис. 1.4):

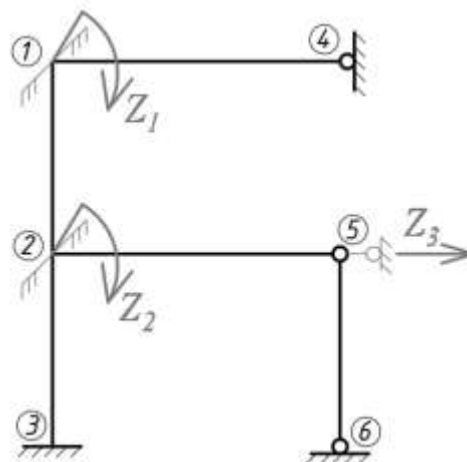


Рис. 1.4

Визначимо параметри стійкості:

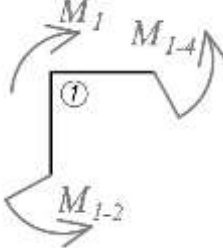
$$v_{1-4} = v_{2-5} = v_{5-6} = 0,$$

$$v_{1-2} = \sqrt{\frac{2P \cdot 4}{i}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{P}{i}},$$

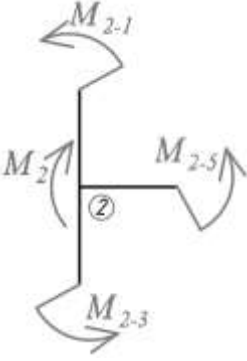
$$v_{2-3} = \sqrt{\frac{3P \cdot 4}{2i}} = \sqrt{6}\sqrt{\frac{P}{i}}.$$

Запишемо рівняння методу переміщень, які виражають рівність нулю реакцій у додаткових в'язях стиснено-зігнутого стану основної системи, тобто після втрати стійкості.

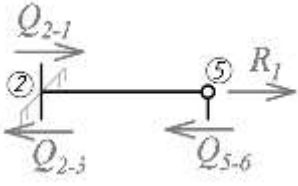
Для запису першого рівняння виріжемо вузол 1 (рис. 1.5):

 <p>Рис. 1.5</p>	$\sum M_1 = 0: M_1 - M_{1-4} - M_{1-2} = 0,$ $M_1 = M_{1-4} + M_{1-2} = 0,$ $M_{1-4} = 3i_{1-4}(\varphi_1 - \psi_{1-4}) = 3 \cdot 4i \cdot \varphi_1 = 12i\varphi_1$ $M_{1-2} = 2i_{1-2}(\alpha_{1-2} \cdot \varphi_1 + \beta_{1-2} \cdot \varphi_2 - (\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \psi_{1-2}) =$ $= 2i \left(\alpha_{1-2} \cdot \varphi_1 + \beta_{1-2} \cdot \varphi_2 + (\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \frac{\Delta}{4} \right) =$ $= 2i\alpha_{1-2} \cdot \varphi_1 + 2i\beta_{1-2} \cdot \varphi_2 + \frac{i}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \Delta;$
$12i \cdot \varphi_1 + 2i\alpha_{1-2} \cdot \varphi_1 + 2i\beta_{1-2} \cdot \varphi_2 + \frac{i}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \Delta = 0,$ $i\varphi_1 \cdot (12 + 2\alpha_{1-2}) + i\varphi_2 \cdot 2\beta_{1-2} + i\Delta \cdot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} = 0 - I \text{ рівняння}$	

Для запису другого рівняння виріжемо вузол 2 (рис. 1.6):

 <p>Рис. 1.6</p>	$\sum M_2 = 0: M_2 - M_{2-1} - M_{2-5} - M_{2-3} = 0,$ $M_2 = M_{2-1} + M_{2-5} + M_{2-3} = 0,$ $M_{2-1} = 2i_{1-2}(\alpha_{1-2} \cdot \varphi_2 + \beta_{1-2} \cdot \varphi_1 - (\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \psi_{1-2}) =$ $= 2i \left(\alpha_{1-2} \cdot \varphi_2 + \beta_{1-2} \cdot \varphi_1 + (\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \frac{\Delta}{4} \right) =$ $= 2i\alpha_{1-2} \cdot \varphi_2 + 2i\beta_{1-2} \cdot \varphi_1 + \frac{i}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \Delta;$ $M_{2-5} = 3i_{2-5}(\varphi_2 - \psi_{2-5}) = 3 \cdot ni \cdot \varphi_2 = 6i \cdot \varphi_2;$ $M_{2-3} = 2i_{2-3}(\alpha_{2-3} \cdot \varphi_2 + \beta_{2-3} \cdot \varphi_3 - (\alpha + \beta)_{2-3} \cdot \psi_{2-3}) =$ $= 2 \cdot 2i \left(\alpha_{2-3} \cdot \varphi_2 - (\alpha + \beta)_{2-3} \cdot \frac{\Delta}{4} \right) =$ $= 4i\alpha_{2-3} \cdot \varphi_2 - i(\alpha + \beta)_{2-3} \cdot \Delta;$
$2i\alpha_{1-2} \cdot \varphi_2 + 2i\beta_{1-2} \cdot \varphi_1 + \frac{i}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \Delta + 6i \cdot \varphi_2 + 4i\alpha_{2-3} \cdot \varphi_2 - i(\alpha + \beta)_{2-3} \cdot \Delta = 0$ $i\varphi_1 \cdot 2\beta_{1-2} + i\varphi_2 \cdot (2\alpha_{1-2} + 6 + 4\alpha_{2-3}) + i\Delta \cdot \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} - (\alpha + \beta)_{2-3} \right) = 0 -$ <p style="text-align: right;">II рівняння</p>	

Для запису третього рівняння виріжемо ригель 2–5 (рис. 1.7):

 <p>Рис. 1.7</p>	$\sum F_x = 0: R_1 - Q_{2-3} - Q_{5-6} + Q_{2-1} = 0,$ $R_1 = Q_{2-3} + Q_{5-6} - Q_{2-1} = 0,$ $Q_{2-3} = -\frac{2i_{2-3}}{l_{2-3}}((\alpha + \beta)_{2-3}(\varphi_2 + \varphi_3) - \gamma_{2-3} \cdot \psi_{2-3}) =$ $= -\frac{2 \cdot 2i}{4} \left((\alpha + \beta)_{2-3} \cdot \varphi_2 - \gamma_{2-3} \frac{\Delta}{4} \right) =$ $= -i(\alpha + \beta)_{2-3} \cdot \varphi_2 + \frac{i}{4} \gamma_{2-3} \cdot \Delta;$ $Q_{5-6} = 0;$ $Q_{2-1} = -\frac{2i_{1-2}}{l_{1-2}}((\alpha + \beta)_{1-2}(\varphi_1 + \varphi_2) - \gamma_{1-2} \cdot \psi_{1-2}) =$ $= -\frac{2i}{4} \left((\alpha + \beta)_{1-2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \gamma_{1-2} \frac{\Delta}{4} \right) =$ $= -\frac{i}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \varphi_1 - \frac{i}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \varphi_2 - \frac{i}{8} \gamma_{1-2} \cdot \Delta;$
$-i(\alpha + \beta)_{2-3} \cdot \varphi_2 + \frac{i}{4} \gamma_{2-3} \cdot \Delta + \frac{i}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \varphi_1 + \frac{i}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} \cdot \varphi_2 + \frac{i}{8} \gamma_{1-2} \cdot \Delta = 0,$ $i\varphi_1 \cdot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} + i\varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} - (\alpha + \beta)_{2-3} \right) + i\Delta \cdot \left(\frac{1}{8} \gamma_{1-2} + \frac{1}{4} \gamma_{2-3} \right) = 0 -$ <p style="text-align: right;"><i>III рівняння</i></p>	

3. Складання рівняння стійкості рами та його розв'язання.

Маємо систему з трьох рівнянь. Рівняння стійкості отримаємо, прирівнявши до нуля визначник матриці коефіцієнтів системи.

$$D = \begin{vmatrix} 12 + 2\alpha_{1-2} & 2\beta_{1-2} & \frac{1}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} \\ 2\beta_{1-2} & 2\alpha_{1-2} + 6 + 4\alpha_{2-3} & \frac{1}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} - (\alpha + \beta)_{2-3} \\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} & \frac{1}{2}(\alpha + \beta)_{1-2} - (\alpha + \beta)_{2-3} & \frac{1}{8}\gamma_{1-2} + \frac{1}{4}\gamma_{2-3} \end{vmatrix},$$

$$D(v_{1-2}; v_{2-3}) = 0.$$

Для розв'язання рівняння стійкості як незалежний параметр візьмемо v_{2-3} . Тоді: $v_{1-2}=1,1547 \cdot v_{2-3}$.

v_{2-3}	v_{1-2}	α_{1-2}	α_{2-3}	β_{1-2}	$(\alpha+\beta)_{1-2}$	$(\alpha+\beta)_{2-3}$	γ_{1-2}	γ_{2-3}	D
0	0	2	2	1	3	3	6	6	553,5
1	1,1547	1,9092	1,932	1,0232	2,9324	2,95	5,197	5,399	465,114
2	2,3094	1,6165	1,718	1,106	2,7227	2,794	2,7781	3,588	223,423
3	3,4641	1,0288	1,312	1,3113	2,34	2,518	-1,3203	0,536	-57,623
2,7	3,1177	1,2473	1,459	1,2285	2,4758	2,615	0,0919	1,585	24,408
2,8	3,2322	1,1787	1,413	1,2536	2,4331	2,584	-0,3621	1,248	-3,948

Зобразимо графік залежності значення D від значення параметра v_{2-3} (рис 1.8):

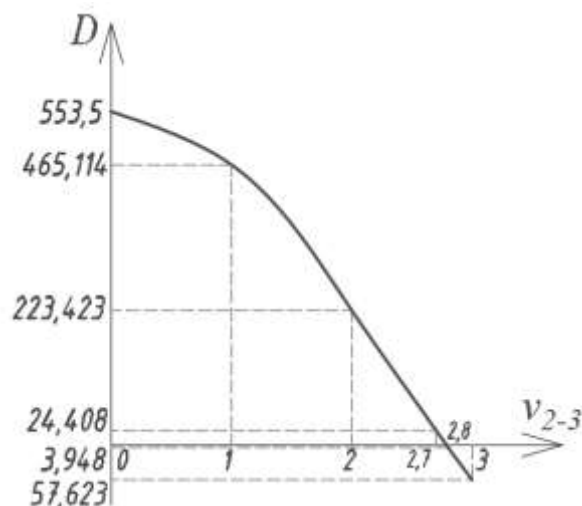


Рис. 1.8

Розглянемо ділянку графіка на ділянці $v_{2-3} = [2,7-2,8]$ (рис 1.9):

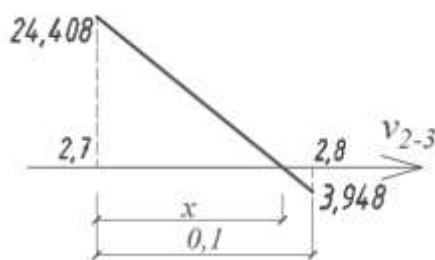


Рис. 1.9

$$x = \frac{24,408 \cdot 0,1}{(24,408 + 3,948)} = 0,0861$$

$$v_{2-3}^{kp} = 2,7 + 0,0861 = 2,7861$$

3. Визначення значення критичної сили.

$$v_{2-3} = \sqrt{6} \sqrt{\frac{P}{i}}$$

$$P^{kp} = \frac{(v_{2-3})^2 \cdot i}{6} = \frac{(2,7861)^2 \cdot i}{6} = 1,2937 i$$

$$P_1 = P = 1,2937 i$$

$$P_2 = 2P = 2 \cdot 1,2937 i = 2,5874 i$$

4. Перевірка розрахунків за допомогою навчального програмного комплексу ASSISTANT.

За результатами роботи з програмою отримуємо роздруківку:

```

:          РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ РАМ НА СТІЙКІСТЬ
:
:  Дата
:  Схема 17
:
:          Шарніри у вузлах 6, 4
:
:          Постановка 1
:  L = 6          h = 4          n = 2
:  P(1)=P        P(2)=2P        S(1)=0        S(2)=0
:
:  Критичний параметр стійкості V(1-2) = +3,2211
:  Критичний параметр навантаження P = +1,2969i
:-----

```

Частина II. Динамічний розрахунок рами

Дано: невагома стержнева система (рис. 2.1) з точковими масами $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$, $n = 2$. На раму прикладене зовнішнє навантаження $P(t) = P_0 \cdot \sin \theta t$, $P_0 = 25 \text{ кН}$, $\theta = k \cdot \omega_1$, $k = 0,75$.

Потрібно виконати динамічний розрахунок рами.

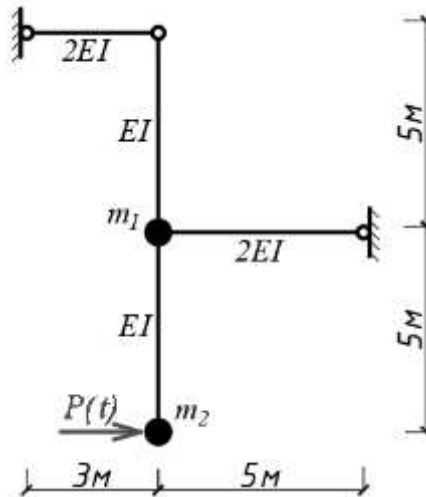


Рис. 2.1

1. Розрахунок на вільні коливання

1.1. Визначення кількості ступенів динамічної вільності невагомої стержневої системи з кількома точковими масами.

Можливі переміщення мас цієї стержневої системи: y_1 , y_2 , y_3 (рис. 2.2). Нехтуючи поздовжніми деформаціями елементів рами, можна припустити, що $y_3 = y_1$. Отже, система має два ступені динамічної свободи: $n_{\text{дин}} = 2$, тобто можливість двох незалежних лінійних переміщень y_1 та y_2 . Маса, яка переміщується в напрямі y_1 : $m_1 + m_2 = 2m + 3m = 5m$; у напрямі y_2 : $m_2 = 3m$. На рис 2.1 зображені додатні напрямки можливих переміщень та сил інерції F_1 , F_2 .

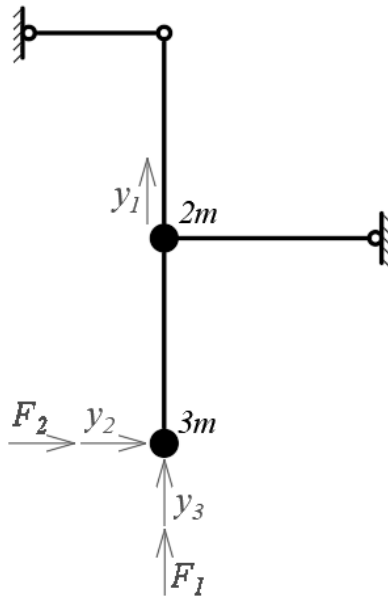


Рис. 2.2

1.2. Складання системи диференціальних рівнянь руху.

Виразимо можливі незалежні переміщення мас системи як суми переміщень від дії сил інерції:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} F_1 + \delta_{12} F_2 \\ y_2 = \delta_{21} F_1 + \delta_{22} F_2 \end{cases},$$

Запишемо сили інерції:

$$\begin{aligned} F_1 &= -5m \cdot \ddot{y}_1 \\ F_2 &= -3m \cdot \ddot{y}_2 \end{aligned}$$

Підставимо в систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 = -\delta_{11} \cdot 5m \cdot \ddot{y}_1 - \delta_{12} \cdot 3m \cdot \ddot{y}_2 \\ y_2 = -\delta_{21} \cdot 5m \cdot \ddot{y}_1 - \delta_{22} \cdot 3m \cdot \ddot{y}_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (y_1 + 5m \cdot \delta_{11} \cdot \ddot{y}_1) + 3m \cdot \delta_{12} \cdot \ddot{y}_2 = 0 \\ 5m \cdot \delta_{21} \cdot \ddot{y}_1 + (y_2 + 3m \cdot \delta_{22} \cdot \ddot{y}_2) = 0 \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь розшукуємо у вигляді:

$$y_1 = a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y_2 = a_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{y}_1 = -a_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{y}_2 = -a_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Підставляємо до системи рівнянь і скорочуємо на $\sin(\omega t + \varphi)$:

$$\begin{cases} (-5m \cdot \delta_{11} \cdot a_1 \cdot \omega^2 + a_1) - 3m \cdot \delta_{12} \cdot a_2 \cdot \omega^2 = 0 \\ -5m \cdot \delta_{21} \cdot a_1 \cdot \omega^2 + (-3m \cdot \delta_{22} \cdot a_2 \cdot \omega^2 + a_2) = 0 \end{cases}$$

Введемо позначення $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$:

$$\begin{cases} (5m \cdot \delta_{11} - \lambda) \cdot a_1 + 3m \cdot \delta_{12} \cdot a_2 = 0 \\ 5m \cdot \delta_{21} \cdot a_1 + (3m \cdot \delta_{22} - \lambda) \cdot a_2 = 0 \end{cases}$$

Щоб обчислити переміщення δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} , розглянемо допоміжні стани системи (рис. 2.3а, рис. 2.4а) та побудуємо епюри моментів (рис. 2.3б, рис. 2.4б) від дії одиничних сил, прикладених у напрямках можливих незалежних переміщень.

I допоміжний стан (рис. 2.4):

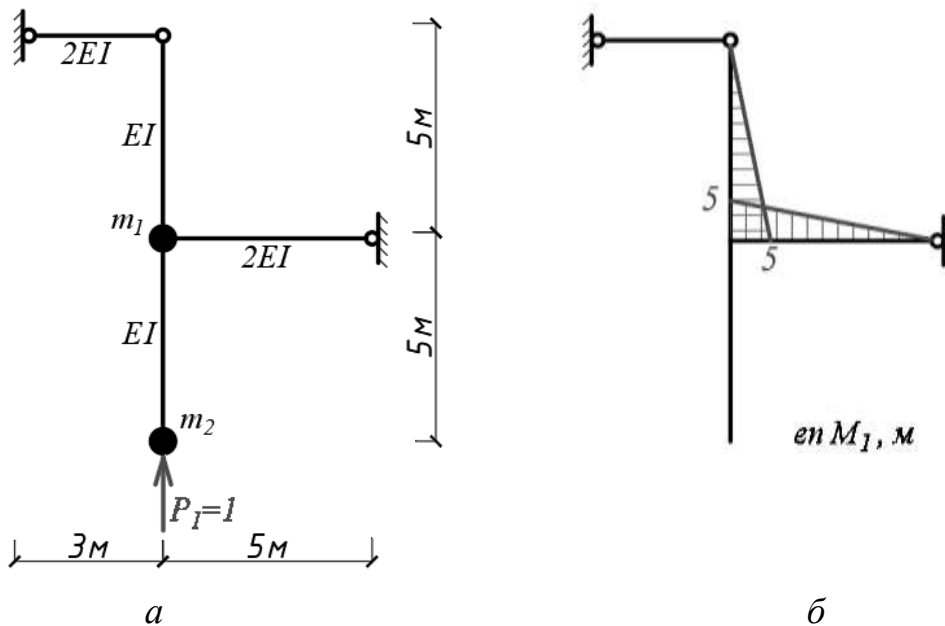


Рис. 2.3

II допоміжний стан (рис. 2.4):

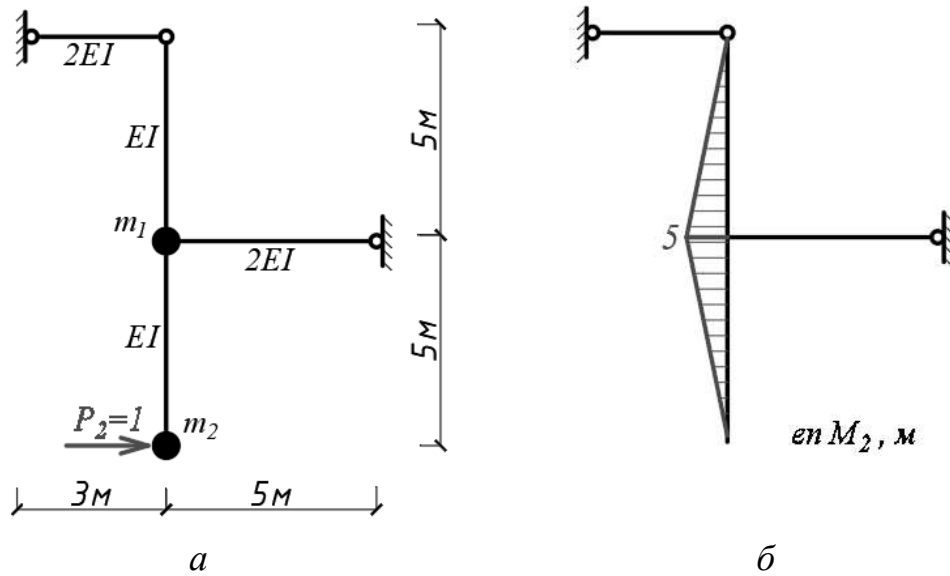


Рис. 2.4

Обчислимо переміщення:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{62,5}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_2}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{-41,667}{EI},$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 \cdot M_2}{EI} dx = \left(\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) \cdot 2 = \frac{83,333}{EI}.$$

Матриця податливості має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{62,5}{EI} & \frac{-41,667}{EI} \\ \frac{-41,667}{EI} & \frac{83,333}{EI} \end{bmatrix}.$$

1.3. Визначення власних характеристик матриці рівнянь руху.

Підставимо значення переміщень у систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(5m \cdot \frac{62,5}{EI} - \lambda\right) \cdot a_1 - 3m \cdot \frac{41,667}{EI} \cdot a_2 = 0 \\ -5m \cdot \frac{41,667}{EI} \cdot a_1 + \left(3m \cdot \frac{83,333}{EI} - \lambda\right) \cdot a_2 = 0 \end{cases}$$

Введемо нове позначення: $\bar{\lambda} = \lambda \frac{EI}{m} = \frac{EI}{m\omega^2}$:

$$\begin{cases} (312,5 - \bar{\lambda}) \cdot a_1 - 125 \cdot a_2 = 0 \\ -208,333 \cdot a_1 + (250 - \bar{\lambda}) \cdot a_2 = 0 \end{cases}$$

Для отримання динамічних характеристик системи потрібно обчислити власні числа матриці \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 312,5 & -125 \\ -208,333 & 205 \end{bmatrix}$$

Умова наявності вільних коливань рами («вікове рівняння»):

$$\text{Det} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 312,5 - \bar{\lambda} & -125 \\ -208,333 & 205 - \bar{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник:

$$(312,5 - \bar{\lambda}) \cdot (250 - \bar{\lambda}) - 125 \cdot 208,333 = 0,$$

$$\bar{\lambda}^2 - 562,5 \cdot \bar{\lambda} + 52083,375 = 0.$$

Власні числа є коренями цього рівняння:

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \frac{562,5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-562,5)^2 - 4 \cdot 52083,375},$$

$$\bar{\lambda}_1 = 445,623, \quad \bar{\lambda}_2 = 116,876.$$

Перевірка власних чисел:

1) сума власних чисел має дорівнювати сумі головних коефіцієнтів (сліду) матриці \mathbf{A} :

$$\sum_{i=1}^2 \bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = 445,623 + 116,876 = 562,499,$$

$$Sp \mathbf{A} = 312,5 + 250 = 562,5.$$

2) добуток власних чисел має дорівнювати визначнику матриці \mathbf{A} :

$$\prod_{i=1}^2 \bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 = 445,623 \cdot 116,876 = 52082,6434,$$

$$Det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 312,5 & -125 \\ -208,333 & 250 \end{vmatrix} = 312,5 \cdot 250 - 208,333 \cdot 125 = 52083,375.$$

1.4. Одержання спектра власних частот.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \bar{\lambda}_1}} = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot 445,623}} = 0,047371 \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \bar{\lambda}_2}} = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot 116,876}} = 0,092499 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

1.5. Побудова форм вільних коливань.

З одержаної системи рівнянь знайдемо співвідношення амплітуд власних коливань. Оскільки визначник матриці дорівнює нулю, то рівняння є лінійно залежними і одне з них можна відкинути.

Відкинемо друге рівняння і підставимо перше власне число $\bar{\lambda}_1 = 445,623$ в перше рівняння:

$$(312,5 - 445,623) \cdot a_1 - 125 \cdot a_2 = 0,$$

$$(-133,123) \cdot a_1 - 125 \cdot a_2 = 0,$$

$$a_1 = -0,939 \cdot a_2.$$

Тобто, якщо амплітуда $a_2 = 1$, тоді амплітуда $a_1 = -0,939$. Власний вектор, що визначає першу форму коливань:

$$\{\vec{v}_1\} = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,939 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Підставимо друге власне число $\bar{\lambda}_2 = 116,876$ в перше рівняння:

$$(312,5 - 116,876) \cdot a_1 - 125 \cdot a_2 = 0,$$

$$(195,624) \cdot a_1 - 125 \cdot a_2 = 0,$$

$$a_1 = 0,639 \cdot a_2.$$

Тобто, якщо амплітуда $a_2 = 1$, тоді амплітуда $a_1 = 0,639$. Власний вектор, що визначає другу форму коливань:

$$\{\vec{v}_2\} = \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,639 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Тут перший індекс при амплітудах відповідає номеру переміщення, а другий – номеру форми коливань.

Перша і друга форми вільних коливань зображені на рисунку 2.5.

Форма 1:

Форма 2

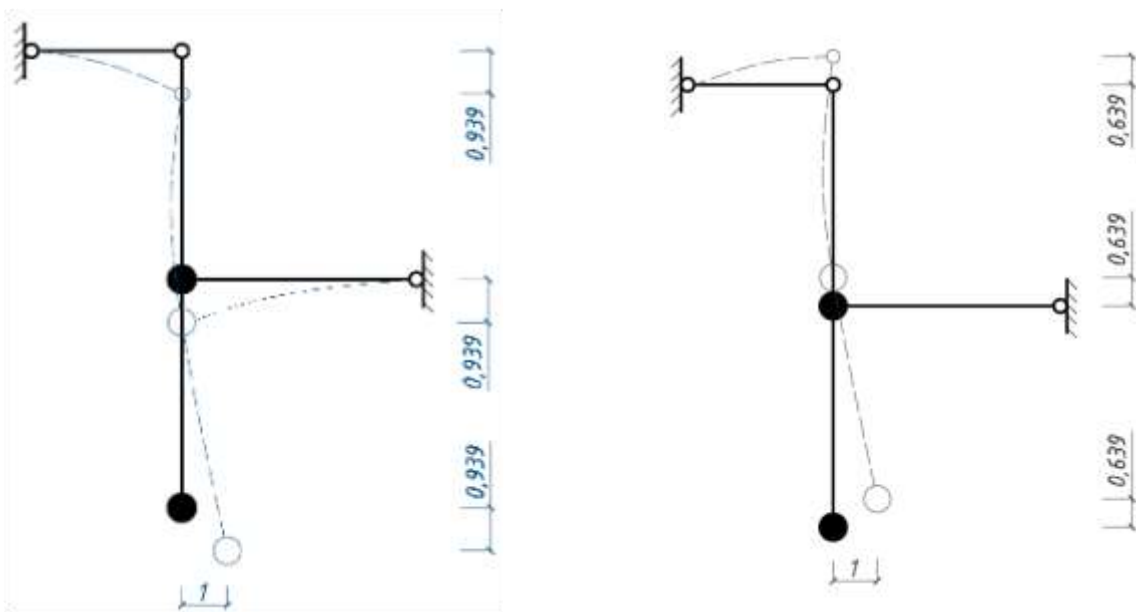


Рис. 2.5

Виконаємо перевірку ортогональності першої та другої форм коливань:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 m_i \cdot a_{i1} \cdot a_{i2} &= 5m \cdot (-0,939) \cdot 0,639 + 3m \cdot 1 \cdot 1 = -3,000105 + 3 = \\ &= -0,000105 \approx 0. \end{aligned}$$

2. Розрахунок на змушені коливання

2.1. Розв'язання рівнянь руху за вимушених коливань.

Визначимо сили інерції в напрямках можливих переміщень. У напрямі y_1 переміщуються дві маси, тому перша сила інерції є сумою двох сил:

$$B_1 = B_{11} + B_{12} = 3m \cdot A_1 \cdot \theta^2 + 2m \cdot A_1 \cdot \theta^2 = 5m \cdot A_1 \cdot \theta^2.$$

У напрямі y_2 переміщується одна маса, тому друга сила інерції:

$$B_2 = 3m \cdot A_1 \cdot \theta^2.$$

Схему зовнішніх сил та сил інерції зображено на рисунку 2.6:

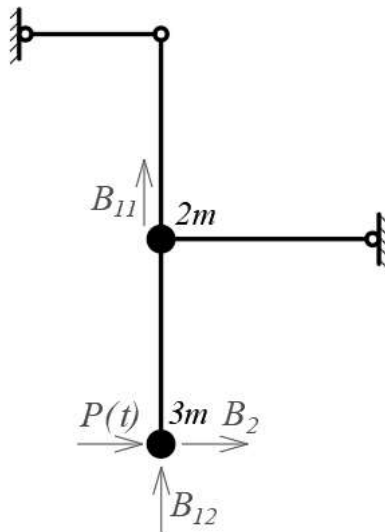


Рис. 2.6

Система рівнянь для змушених коливань заданої рами має вигляд:

$$\begin{cases} \left(\delta_{11} - \frac{1}{5m \cdot \theta^2} \right) \cdot B_1 + \delta_{12} \cdot B_2 + \delta_{1P} \cdot P_0 = 0 \\ \delta_{21} \cdot B_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{3m \cdot \theta^2} \right) \cdot B_2 + \delta_{2P} \cdot P_0 = 0 \end{cases}.$$

Для обчислення коефіцієнтів δ_{1P} , δ_{2P} потрібно побудувати епюру згинальних моментів M_P від дії одиничного навантаження, прикладеного в напрямі сили $P(t)$. Оскільки напрям і лінія дії сили $P(t)$ збігаються із силою F_2 , то одинична епюра M_P дорівнює епюрі M_1 . Відповідно вантажні коефіцієнти:

$$\delta_{1P} = \delta_{12} = \frac{-41,667}{EI},$$

$$\delta_{2P} = \delta_{22} = \frac{83,333}{EI}.$$

Циклічна частота змушених коливань:

$$\theta = 0,75 \cdot \omega_1 = 0,75 \cdot 0,047371 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0,03552825 \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\theta^2 = 0,00126226 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Також обчислимо величини:

$$\frac{1}{5m \cdot \theta^2} = \frac{1}{5m \cdot 0,00126226 \frac{EI}{m}} = \frac{158,446}{EI},$$

$$\frac{1}{3m \cdot \theta^2} = \frac{1}{3m \cdot 0,00126226 \frac{EI}{m}} = \frac{264,0766}{EI}.$$

Підставимо в систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\frac{62,5}{EI} - \frac{158,446}{EI} \right) \cdot B_1 - \frac{41,667}{EI} \cdot B_2 - \frac{41,667}{EI} \cdot 25 = 0 \\ -\frac{41,667}{EI} \cdot B_1 + \left(\frac{83,333}{EI} - \frac{264,0766}{EI} \right) \cdot B_2 + \frac{83,333}{EI} \cdot 25 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -95,946 \cdot B_1 - 41,667 \cdot B_2 - 1041,675 = 0 \\ -41,667 \cdot B_1 - 180,7436 \cdot B_2 + 2083,325 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язками системи є значення амплітудних сил інерції:

$$B_1 = -17,627 \text{ кН},$$

$$B_2 = 15,59 \text{ кН}.$$

Величину сили інерції B_1 розподілимо між відповідними масами пропорційно їх величинам:

$$B_{11} = \frac{2}{5} \cdot (-17,627) = -7,0508 \text{ кН}.$$

$$B_{12} = \frac{3}{5} \cdot (-17,627) = -10,5762 \text{ кН}.$$

2.2. Побудова динамічних епюр внутрішніх зусиль.

Динамічну епюру згинальних моментів M_d побудуємо шляхом додавання, використовуючи формулу:

$$M_d = M_1 \cdot B_1 + M_2 \cdot B_2 + M_p \cdot P_0.$$

Епюри амплітудних поперечних зусиль Q_d побудуємо, використовуючи відповідність між епюрами M_d і Q_d . Значення епюри поздовжніх зусиль N_d визначимо шляхом вирізання вузлів.

Динамічні епюри зусиль M_d , Q_d , N_d наведені на рисунку 2.7:

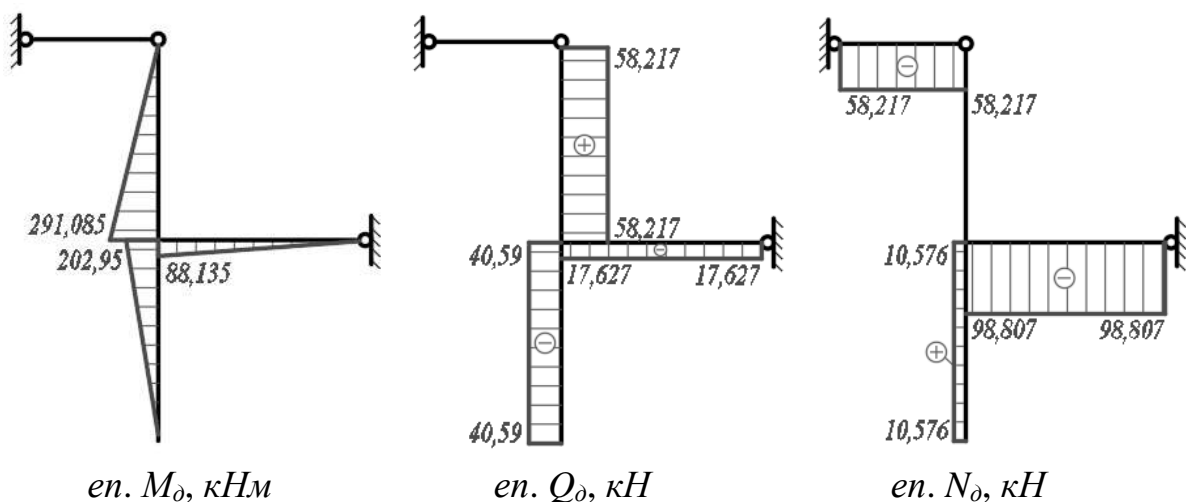


Рис. 2.7

2.3. Виконання кінематичної перевірки та перевірки динамічної рівноваги.

Обчислимо амплітуди переміщень мас:

$$A_1 = \frac{B_1}{5m \cdot \theta^2} = B_1 \cdot \frac{1}{5m \cdot \theta^2} = -17,627 \cdot \frac{158,446}{EI} = -\frac{2792,949}{EI},$$

$$A_2 = \frac{B_2}{3m \cdot \theta^2} = B_2 \cdot \frac{1}{3m \cdot \theta^2} = 15,59 \cdot \frac{264,0766}{EI} = \frac{4116,987}{EI}.$$

Відповідно рух мас системи за вимушених коливань відбувається за законами:

$$y_1 = -\frac{2792,949}{EI} \sin \theta t,$$

$$y_2 = \frac{4116,987}{EI} \sin \theta t.$$

Для виконання кінематичної перевірки порівняємо амплітудні переміщення мас із відповідними переміщеннями, визначеними за формулою Максвелла – Мора:

$$\Delta_{1o} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_o}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 291,085 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 -$$
$$-\frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 88,135 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = -\frac{2792,938}{EI},$$

$$\Delta_{2o} = \sum \int \frac{M_2 \cdot M_o}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 291,085 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 +$$
$$+\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 202,95 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{4117,042}{EI}.$$

Відносні похибки:

$$\varepsilon_1 = \frac{2792,949 - 2792,938}{2792,949} \cdot 100\% = 0,00037\% < 2\%,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{4117,042 - 4116,987}{4117,042} \cdot 100\% = 0,0013\% < 2\%.$$

Перевіримо динамічну рівновагу всієї системи. Прикладемо до рами амплітудне значення зовнішнього навантаження, амплітудні сили інерції та опорні реакції, взяті з динамічних епюр внутрішніх зусиль (рис. 2.8):

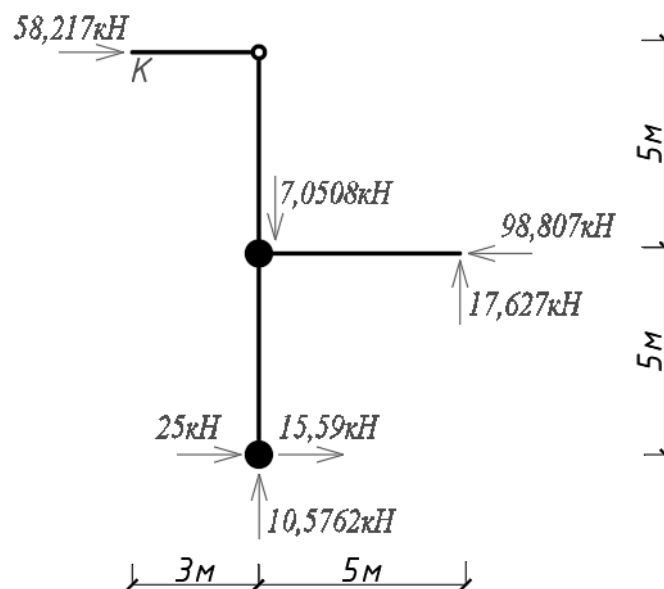


Рис. 2.8

$$\sum F_x = 58,217 + 15,59 - 98,807 + 25 = 98,807 - 98,807 = 0,$$

$$\sum F_y = 17,627 - 7,0508 - 10,5762 = 17,627 - 17,627 = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum M_c = 7,0508 \cdot 3 + 98,807 \cdot 5 - 17,627 \cdot 8 - 25 \cdot 10 - 15,59 \cdot 10 + \\ + 10,5762 \cdot 3 = 546,916 - 546,916 = 0 \end{aligned}$$

Усі перевірки виконуються, отже, розрахунок проведено правильно.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Підручники:

1. *Баженов В. А.* Динаміка споруд : підручник / В. А. Баженов, Є. С. Дехтярюк, Ю. В. Ворона. – Київ : ПАТ «ВІПОЛ», 2012. – 342 с.
2. *Баженов В. А.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання : підручник / [В. А. Баженов, А. В. Перельмутер, О. В. Шишов] за заг. ред. В.А. Баженова. – Київ : ПАТ «ВІПОЛ», 2013. – 896 с.

Навчальні посібники:

1. *Баженов В. А.* Будівельна механіка. Динаміка споруд : навчальний посібник / В. А. Баженов, Є. С. Дехтярюк. – Київ : ІЗМН, 1998. – 208 с.
2. *Баженов В. А.* Будівельна механіка: Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування : навчальний посібник / В. А. Баженов, Г. М. Іванченко, О. В. Шишов, С. О. Пискунов. – Київ : Каравела, 2013. – 439 с.

Методичні рекомендації:

1. Динамічний розрахунок рам : методичні вказівки та індивідуальні завдання до виконання розрахунково-графічних робіт / уклад. Ю. В. Ворона, І. Д. Кара. – Київ : КНУБА, 2018. – 36 с.
2. Розрахунок плоских рам на стійкість : методичні вказівки та індивідуальні завдання для розрахунково-графічної роботи / уклад. О. В. Шишов. – Київ : КНУБА, 2006. – 40 с.
3. Динамічний розрахунок рам : методичні вказівки та індивідуальні завдання до виконання розрахунково-графічних робіт / уклад. Ю. В. Ворона, О. Г. Свешніков, О. О. Шкриль. – Київ : КНУБА, 2008. – 44 с.

Інформаційні ресурси:

1. Навчальний програмний комплекс ASSISTANT. – Режим доступу: <https://www.knuba.edu.ua/pidruchniki-posibniki-ta-programne-zabezpechennya/>.

Навчально-методичне видання

РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ РАМИ НА СТІЙКІСТЬ. ДИНАМІЧНИЙ РОЗРАХУНОК РАМИ

Методичні вказівки
до виконання розрахунково-графічної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
освітньо-професійної програми «Промислове і цивільне будівництво»

**Укладачі: Кара Ірина Дмитрівна,
Козак Андрій Анатолійович,
Солодей Іван Іванович,
Лук'янченко Ольга Олексіївна**

Випусковий редактор *Т. В. Івченко*
Комп'ютерне верстання *Л. В. Лабунець*

Підписано до друку 20.12.2024. Формат 60 x 84_{1/16}
Ум. друк. арк. 1,63. Обл.-вид. арк. 1,75.
Електронний документ. Вид. № 179/III-24

Видавець і виготовлювач:
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002

