МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

МАТЕМАТИЧНЕ ОБРОБЛЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

ЧАСТИНА 2

ПАРАМЕТРИЧНИЙ СПОСІБ ВИРІВНЮВАННЯ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського)
рівня вищої освіти спеціальності
G18 « Геодезія та землеустрій»

Київ 2026

УДК 528.4
ББК 2612
В65

Укладачі: П.О. Чуланов, старш. викладач
О.Й. Кузьмич О.Й, канд. техн. наук, професор
О.П. Ісаєв, канд. техн. наук, асистент
С.А. Бондар, асистент

Рецензент О.В.Адаменко, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск Р.А.Дем'яненко, к.т.н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри інженерної геодезії, протокол № 4 від 17 березня 2026 р.

Видається в авторській редакції.

1-62 **Математичне** оброблення геодезичних вимірів. Інженерна геодезія: методичні вказівки до індивідуальної роботи част.2 / уклад.: П.О. Чуланов, С.А. Бондар, О.Й. Кузьмич, О.П. Ісаєв – К.: КНУБА, 2026 - 67 с.

Містить загальні положення двох тем курсу та послідовність виконання контрольних завдань, список літератури та додатки.

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «Геодезія та землеустрій»

При вивченні дисципліни «Математичне оброблення геодезичних вимірів» студенти виконують контрольні завдання, складають заліки та іспити.

У методичних вказівках до другої частини курсу наводяться розв’язання практичних прикладів і задач виконання контрольних завдань.

Контрольні завдання студенти виконують після вивчення теоретичного матеріалу, розбору наведених прикладів і відповідей на контрольні запитання.

Задачі розв’язують з застосуванням ЕОМ та інших засобів обчислювальної техніки.

До складу контрольної роботи для студентів заочного відділення входять завдання 6, 7.

Прийняті позначення

$T_1, T_2, \ldots, T_k$ – істинні значення необхідних невідомих параметрів;

$t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0$ – наближенні значення параметрів T_i;

$t_1, t_2, \ldots, t_k$, – вирівняні значення параметрів;

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ – поправки до наближених значень параметрів;

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ – істинні значення виміряних величин;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – результати вимірів;

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ – вирівняні значення виміряних величин;

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ – вільні члени рівнянь поправок;

$L_1, L_2, \ldots, L_n$ – перетворені вільні члени нормальних рівнянь;

a_{ij} – коефіцієнти рівнянь поправок;

N_{ij} – коефіцієнти нормальних рівнянь;

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ – поправки до виміряних значень x_i.

1. ПОРЯДОК ВИРІВНЮВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ

Задачу вирівнювання геодезичних вимірів планових і висотних мереж параметричним способом розв’язують в такій послідовності:

1. Складають схему мережі. Виписують вихідні дані та виміряні величини.
2. Виміряні величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виражають у таких одиницях фізичних величин, щоб значення середніх квадратичних похибок m_i величин x_i були по можливості близькими до одиниці.

Наприклад, лінійні виміри виражають у дециметрах, сантиметрах або в міліметрах, кутові – в секундах, рідше – у мінутах.

3. Вибирають необхідні невідомі параметри $T_1, T_2, \ldots, T_k$ так, щоб вони були незалежними між собою, а параметричні рівняння поправок мали найбільш простий вигляд. У висотних мережах параметрами найчастіше вибирають висоти *H*, у планових – координати *X* та *Y* точок, що визначаються. Рідше параметрами вибирають деякі з виміряних кутів і перевищень.
4. Визначають наближені значення параметрів $t_1^0, t_2^0, .., t_k^0$. Так, наближені значення позначок точок $t_1^0 = H_i^0$ і координат $t_i^0 = X_i^0$; $t_{i+1}^0 = Y_i^0$ обчислюють від найближчих вихідних пунктів через виміряні перевищення або дирекційні кути і лінії. Якщо за параметри вибрані виміряні величини, то за наближені значення t_i^0 беруть результати вимірів.

Примітка. Наближені значення параметрів t_i^0 вибирають таким, щоб вони були по можливості найбільш близькими до їх вірогідних значень t_i .

5. Складають параметричні рівняння зв’язку. Для цього всі виміряні величини виражають у вигляді функцій

$$x_i = f_i(T_1, T_2, ..., T_k),$$

або $$\bar{x}_i = x_i + v_i = f_i(t_1, t_2, ..., t_k), \qquad i = \overrightarrow{1, n}, \qquad (1)$$

де v_i – поправка із зрівнювання до виміряних величин;

$\bar{x}_i$ – зрівняне значення виміряної величини:

t_i – вирівняне значення параметрів.

6. Складають параметричні рівняння поправок у вигляді

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + ... + a_{ik}\tau_k + l_i, \qquad (2)$$

де $a_{ij} = (\partial x_i / \partial t_j)_o$ – часткові похідні, взяті з рівняння (1) за вирівняними значеннями параметрів, але вирахувані при їх наближених значеннях.

Вільний член

$$l_i = f_i(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0) - x_i. \qquad (3)$$

7. Складають вагову функцію для елемента (або для кількох елементів) мережі, точність якого за умовою задачі слід визначити. Оцінювану вагову функцію виражають у лінійному вигляді:

$$F = f_0 + f_1\tau_1 + f_2\tau_2 + ... + f_k\tau_k, \qquad (4)$$

де $f_i = (\partial F / \partial t_i)_0$ – часткові похідні від вихідного рівняння зв’язку (вагової функції).

8. Обчислюють ваги вимірів за однією з формул

$$P_i = \frac{c}{m_i^2}; \qquad P_i = \frac{c}{L_i}; \qquad P_i = \frac{c}{N_i}; \qquad P_i = \frac{n_i}{c}, \qquad (5)$$

де c – постійний коефіцієнт, довільно прийнятий так, щоб ваги були близькими до одиниці;

L_i – довжина;

n – число виміряних величин N або прийомів n.

9. Обчислюють коефіцієнти нормальних рівнянь. Для зручності обчислення у таблиці коефіцієнтів рівнянь поправок або на програмуючих калькуляторах.

Зрештою одержують систему k нормальних рівнянь при k невідомих для рівноточних або нерівноточних вимірів.

10. Розв’язують систему нормальних рівнянь будь-яким із відомих способів і одержують поправки τ_1, τ_2, …, τ_k до наближених значень параметрів. За умовою задачі водночас обчислюють вагові коефіцієнти Q_{ij} і зворотну вагову функцію $1/P_F$.
11. За формулою (2) обчислюють поправки v_i до виміряних величин.
12. Вирівняні значення виміряних величин $\bar{x}_i$ за невідомих параметрів t_i вираховують за формулами

$$\bar{x}_i = x_i + v_i; \tag{6}$$

$$t_i = t_i^0 + \tau_i. \tag{7}$$

13. За формулою (1) контролюють всі вирівнені значення вимірів.
14. Виконують оцінку точності. При цьому обчислюють:

а) m – середню квадратичну (с.к.) похибку безпосереднього виміру або μ – с.к. похибку одиниці ваги при нерівноточних вимірах і їх похибки m_m і m_μ за формулами

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}; \tag{8}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}; \tag{9}$$

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-k)}}; \qquad m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-k)}}; \tag{10}$$

б) m_{ti} – с.к. похибку вирівняних невідомих (параметрів):

при рівноточних вимірах

$$m_{ti} = m\sqrt{Q_{ii}} = m/\sqrt{P_{ti}}; \tag{11}$$

при нерівноточних вимірах

$$m_{ti} = \mu\sqrt{Q_{ii}} = \mu/\sqrt{P_{ti}}; \tag{12}$$

в) m_F – с.к. похибку функцій вирівняних елементів

при рівноточних вимірах

$$m_F = m / \sqrt{P_F}\ ; \tag{13}$$

при нерівноточних вимірах

$$m = \mu / \sqrt{P_F}\ ; \tag{14}$$

г) для висотних мереж с.к. похибок на одиницю величини (км, м)

$$m = \mu / \sqrt{C}\ , \tag{15}$$

де C – постійна, прийнята при обчислені ваги вимірів.

2. ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ПОПРАВОК. НОРМАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Задача 1. Для нівелірної мережі, зображеної на рис. Додаток1 необхідно:

1) визначити, чому дорівнює число необхідних і надлишкових вимірів;
2) встановити число невідомих параметрів і визначити їх наближені значення. Вихідні дані наведені в табл. 1:

*Таблиця*1

Вихідні дані

№№ пп	H_{RP}, м	*h*, мм	*l*,км
1	100,000	+1110	3,1
2	107,520	+2068	2,5
3	103,070	-0120	1,8
4		+0080	2,9
5		02170	2,6
6		-4266	4,8

3) скласти параметричні рівняння зв'язку;

4) скласти параметричні рівняння поправок;

5) обчислити ваги вимірів.

Розв'язання. 1**.** Кількість необхідних виміряних величин дорівнює кількості висот вузлових точок, що визначаються. Тому при трьох вузлових точках k = 3. Всього виконано 6 вимірів (n = 6), тоді кількість надлишкових вимірів $r = n - k =$ =6 – 3 = 3.

2. Виміряні перевищення в нівелірній мережі виразимо через висоти (позначки) точок. Тоді невідомими параметрами будуть позначки трьох вузлових точок t_1, t_2 і t_3 (або k = 3). Крім того, вони будуть незалежними одна від однієї. Відповідно до (7) $t_1 = t_1^0 + \tau_1$, $t_2 = t_2^0 + \tau_2$, $t_3 = t_3^0 + \tau_3$.

Наближені значення позначок вузлових точок обчислимо через виміряні перевищення від найближчих вихідних реперів. Тоді:

$$t_1^0 = H_{Rp1} + h_1 = 100{,}000 + 1{,}110 = 101{,}110 \text{ м};$$

$$t_2^0 = H_{Rp3} - h_3 = 103{,}070 - (-0{,}120) = 103{,}190 \text{ м};$$

$$t_3^0 = H_{Rp2} + h_6 = 107{,}5200 - 4{,}266 = 103{,}254 \text{ м}.$$

3. Виразимо вирівняні значення перевищень через вирівняні висоти реперів. Для перевищень h_1 і h_2 одержимо $\bar{h}_1 = t_1 - H_{Rp1}$; $\bar{h}_2 = t_2 - t_1$ і т.д. У загальному випадку кількість рівнянь зв'язку дорівнює кількості виміряних величин.

4. Параметричні рівняння поправок при трьох параметрах згідно з (2) можна записати таким чином:

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + l_i. \qquad (16)$$

Для першого і другого рівнянь зв'язку маємо такі часткові похідні:

$$a_{11} = \left(\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial t_1}\right)_0 = +1; \quad a_{12} = \left(\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial t_2}\right)_0 = 0; \quad a_{13} = \left(\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial t_3}\right)_0 = 0;$$

$$a_{21} = \left(\frac{\partial \bar{h}_2}{\partial t_1}\right)_0 = -1; \quad a_{22} = \left(\frac{\partial \bar{h}_2}{\partial t_2}\right)_0 = +1; \quad a_{23} = \left(\frac{\partial \bar{h}_2}{\partial t_3}\right)_0 = 0.$$

За формулою (3) обчислимо вільні члени параметричних рівнянь поправок:

$$l_1 = (t_1^0 - H_{Rp1}) - h_1 = 101{,}110 - 100{,}000 - 1{,}110 = 0 \text{ мм};$$

$$l_2 = (t_2^0 - t_1^0) - h_2 = 103{,}190 - 101{,}110 - 2{,}068 = +12 \text{ мм}.$$

Вільні члени виражають в міліметрах, щоб с.к. похибки виражали фактичну точність нівелювання і водночас були близькими до одиниці.

Тоді параметричні рівняння поправок для першого і другого виміряних перевищень при отриманих значеннях a_{ij} l_i набудуть вигляду

$$v_1 = \tau_1; \quad v_2 = -\tau_1 + \tau_2 + 12.$$

5. Оскільки відомі довжини ходів, ваги можна окислити за формулою $P_i = c/L_i$. При $1{,}8 \le L \le 4{,}8$ зручно прийняти c = 3. Тоді $P_1 = c/L_1 = 0{,}97$; $P_2 = 1{,}20$ і т.д.

Завдання до задачі 1: Розв'язати п.п. 3-5 задачі 1 для всіх елементів нівелірної мережі. До сіх виміряних перевищень h_i додати + N мм, а до довжин ходів додати + 0,1N км, де N – номер варіанта згідно з шифром залікової книжки студента.

[1, с. 74-195; 2, с.136-142; 3, с. 106-147; 7, с. 235 – 242]

***Задача* 2**. Скласти параметричні рівняння поправок для сторони S_{12}, дирекційного кута α_{12} кута β_4 і напрямків N_{12} та N_{A2} мережі тріангуляції (рис. Д. 2).

Розв'язання. Шуканими невідомими в мережі тріангуляції (рис.Д.2) є координати x та y трьох пунктів І-3. Тоді невідомих параметрів буде шість: $T_1 = x_1$; $T_2 = y_2$; $T_3 = x_3$; $T_4 = y_2$; $T_5 = x_3$; $T_6 = y_3$. Рівняння поправок складають за формулою (2). Поправки до наближених значень параметрів виражають через поправки до наближених значень координат шуканих пунктів: $\tau_1 = \delta x_1$; $\tau_2 = \delta y_1$; $\tau_3 = \delta x_2$; $\tau_4 = \delta y_2$; $\tau_5 = \delta x_3$; $\tau_6 = \delta y_3$.

Для обчислення вільних членів параметричних рівнянь поправок визначимо наближені значення параметрів. За різницею виміряних значень напрямків вирахуємо кути $\beta_1 = N_{BA} - N_{B3} = 35^\circ 32' 18''$; $\beta_6 = 31^\circ 21' 48''$; $\beta_9 = 102^\circ 11' 30''$; $\beta_{12} = 101^\circ 25' 20''$.

Від вихідної сторони S_{AB} обчислимо сторони:

$$S_{A3} = S_{AB} \frac{\sin 1}{\sin 9} = 500{,}000 \cdot \frac{\sin 35^\circ 12' 18''}{\sin 102^\circ 11' 30''} = 297{,}330 \text{ м};$$

$$S_{A2} = S_{A3} \frac{\sin 12}{\sin 6} = 297{,}330 \cdot \frac{\sin 101^\circ 25' 20''}{\sin 31^\circ 21' 48''} = 559{,}965 \text{ м}.$$

Дирекційні кути сторін

$$\alpha_{A2} = \alpha_{AB} + \beta_6 + \beta_7 = 0^\circ 00' 00'' + 89^\circ 29' 24'' = 89^\circ 29' 24'';$$

$$\alpha_{A3} = \alpha_{AB} + \beta_8 = 0^\circ 00' 00'' + 42^\circ 16' 24'' = 89^\circ 29' 24''.$$

Наближені координати пунктів тріангуляції 2 і 3 визначимо із розв'язання прямих геодезичних задач від пункту A через вирахувані довжини сторін і дирекційні кути:

$$X_2^0 = X_A + S_{A2} \cdot \cos \alpha_{A2} = 100{,}000 + 559{,}965 \cdot \cos 89^\circ 29' 24'' = 104{,}984;$$

$$Y_2^0 = Y_A + S_{A2} \cdot \sin \alpha_{A2} = 100{,}000 + 559{,}965 \cdot \sin 89^\circ 29' 24'' = 659{,}943;$$

$$X_3^0 = X_A + S_{A23} \cdot \cos \alpha_{A3} = 100{,}000 + 297{,}330 \cdot \cos 42^\circ 16' 24'' = 320{,}008$$

$$Y_3^0 = Y_A + S_{A3} \cdot \sin \alpha_{A3} = 100{,}000 + 297{,}330 \cdot \sin 42^\circ 16' 24'' = 300{,}004.$$

Наближені координати пункту I можна обчислити від одержаних наближених координат X_2^0, Y_2^0 через виміряну довжину $S_{12} = 515{,}390$ м і дирекційний кут

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + 180^\circ + \beta_6 + \beta_5 = 89^\circ 29' 24'' + 180^\circ + 92^\circ 44' 06'' = 2^\circ 14' 06''.$$

Значення α_{21} можна було взяти безпосередньо з польових вимірів

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} - 180^\circ = 182^\circ 13' 30'' - 180^\circ = 2^\circ 13' 30'';$$

$$X_1^0 = X_2^0 + S_{12} \cdot \cos \alpha_{21} = 104{,}981 + 515{,}390 \cdot \cos 2^\circ 14' 06'' = 619{,}984 \text{ м};$$

$$Y_1^0 = Y_2^0 + S_{12} \cdot \sin \alpha_{21} = 659{,}943 + 515{,}390 \cdot \sin 2^\circ 14' 06'' = 680{,}042 \text{ м}.$$

Примітка. Наближені координати пунктів I-3 можна обчислити за будь-якою іншою ходовою лінією, наприклад А -3-1-2, В-1-2 і В-3 і т.д.

Складемо параметричні рівняння поправок:

а) для сторони S_{12} рівняння зв'язку має вигляд

$$S_{12}=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2}\,. \qquad (17)$$

Коефіцієнти рівняння поправок знаходять як похідні за змінними X і Y: $\partial S/\partial X_1=-\cos\alpha_{12}$; $\partial S/\partial Y_1=-\sin\alpha_{12}$; $\partial S/\partial X_2=+\cos\alpha_{12}$; $\partial S/\partial Y_2=+\sin\alpha_{12}$.

Тоді

$$v_{S_{12}}=-\cos\alpha_{12}\delta x_1-\sin\alpha_{12}\delta y_1+\cos\alpha_{12}\delta x_2+\sin\alpha_{12}\delta y_2+l_{12}. \qquad (18)$$

Вільний член $l_{12}=\sqrt{(X_2^0-X_1^0)^2+(Y_2^0-Y_1^0)^2}-S_{12}=+2$ мм.

При $\alpha_{12}=182^\circ 14'06''$ одержимо

$v_{S_{12}}=0{,}999\delta x_1+0{,}039\delta y_1-0{,}999\delta x_2-0{,}039\delta y_2+2$;

б) для дирекційного кута α_{12} вихідне рівняння зв'язку

$$\alpha_{12}=arctg\,\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}=arctg\,\frac{\Delta Y_{12}}{\Delta X_{12}}\,. \qquad (19)$$

Часткові похідні від вихідної функції

$\partial\alpha/\partial X_1=\rho''\sin\alpha_{12}/S_{12}$; $\partial\alpha/\partial Y_1=-\rho''\cos\alpha_{12}/S_{12}$;

$\partial\alpha/\partial X_2=-\rho''\sin\alpha_{12}/S_{12}$; $\partial\alpha/\partial Y_2=\rho''\cos\alpha_{12}/S_{12}$.

Тоді

$$v_{\alpha_{12}}=\frac{\rho''}{S_{12}}(\sin\alpha_{12}\delta x_1-\cos\alpha_{12}\delta y_1-\sin\alpha_{12}\delta x_2+\cos\alpha_{12}\delta y_2+l_{12}). \qquad (20)$$

Вільний член $l_{12}^0=\alpha_{12}^0-\alpha_{12}=182^\circ 14'06''-182^\circ 13'30''=+36''$.

При $\rho''=206265''$; S_{12} = 515,390 м; $\alpha_{12}=182^\circ 14'06''$

$v_{S_{12}}=0{,}016\delta x_1-0{,}400\delta y_1-0{,}016\delta x_2+0{,}400\delta y_2+36''$.

Для кута β_4 вихідне рівняння зв'язку подано у вигляді різниці дирекційних кутів його напрямків (див. рис. д.2):

$$\beta_4=\alpha_{13}-\alpha_{12}=arctg\,\frac{Y_3-Y_1}{X_3-X_1}-arctg\,\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}\,. \qquad (21)$$

Для складання рівняння поправок кута за аналогією з пунктом «б» знайдемо рівняння поправок для дирекційних кутів сторін S_{13} та S_{12}:

$$v_{\alpha_{13}} = \frac{\rho''}{S_{13}}(\sin\alpha_{13}\delta x_1 - \cos\alpha_{13}\delta y_1 - \sin\alpha_{13}\delta x_3 + \cos\alpha_{13}\delta y_3 + l_{13});$$

(22)

$$v_{\alpha_{12}} = \frac{\rho''}{S_{12}}(\sin\alpha_{12}\delta x_1 - \cos\alpha_{12}\delta y_1 - \sin\alpha_{12}\delta x_2 + \cos\alpha_{12}\delta y_2 + l_{12}).$$

(23)

Позначимо

$$\frac{\rho''}{S}\sin\alpha = a; \qquad -\frac{\rho''}{S}\sin\alpha = b. \tag{24}$$

Тоді рівняння поправок для дирекцій них кутів набудуть вигляду

$$v_{\alpha_{13}} = a_{13}\delta x_1 + b_{13}\delta y_1 - a_{13}\delta x_3 - b_{13}\delta y_3 + l_{13}; \tag{25}$$

$$v_{\alpha_{12}} = -a_{12}\delta x_1 + b_{12}\delta y_1 - a_{12}\delta x_3 - b_{12}\delta y_3 + l_{12}. \tag{26}$$

Звідси рівняння поправок для кута

$$v_{\beta_4} = (a_{13} - a_{12})\delta x_1 + (b_{13} - b_{12})\delta y_1 + a_{12}\delta x_2 + b_{12}\delta y_2 -$$
$$- a_{13}\delta x_3 + b_{13}\delta y_3 + l_{\beta_4}, \tag{27}$$

де $l_{\beta_4} = l_{\alpha_{13}} - l_{\alpha_{12}} - \alpha_{13}^{\circ} - \alpha_{12}^{\circ} - \beta_4^{èçì}\ \cdot.$ (28)

Вирахуємо наближені значення дирекційного кута α_{13} і довжину сторони S_{13}:

$$\alpha_{13} = arctg\,\frac{Y_3^0 - Y_1^0}{X_3^0 - X_1^0} = 180^\circ + 51^\circ 42' 53'' = 231^\circ 42' 53'';$$

$$S_{13} = \sqrt{(X_3^0 - X_1^0)^2 + (Y_3^0 - Y_1^0)^2} = 484{,}163 \text{ м.}$$

При $a_{12} = \rho''\sin\alpha_{13}/S_{13} = –0{,}334$; b_{13} = 0,264;

$$l_{\beta_4} = \alpha_{13}^{\circ} - \alpha_{12}^{\circ} - \beta_4^{èçì}\ \cdot = 231^\circ 42' 53'' - 182^\circ 14' 06'' - 49^\circ 28' 50'' = +3''$$

Рівняння поправок для четвертого кута буде таким:

$$v_{\beta_4} = (-0{,}334 - 0{,}016)\delta x_1 + (0{,}264 + 0{,}400)\delta y_1 + 0{,}016\delta x_2 - 0{,}400\delta y_2 +$$
$$+\,0264\delta y_3 + 3'';$$
$$v_{\beta_4} = -0{,}350\delta x_1 + 0{,}664\delta y_1 + 0{,}016\delta x_2 - 0{,}400\delta y_2 + 0{,}334\delta x_3 +$$
$$+\,0264\delta y_3 + 3'';$$

в) для напрямку N_{12} виміряний напрямок N разом з орієнтирною поправкою z (рис. Д.3) утворює дирекційний кут

$$\alpha_{12} = z + N_{12}, \tag{29}$$

або

$$N_{12} = arctg\,\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} - z\,. \tag{30}$$

У результаті рівняння поправок для напрямку складаються з рівняння поправок для дирекційного кута $v_{\alpha_{12}}$ і поправок δz, тобто

$$v_{N_{12}} = v_{\alpha_{12}} - \delta z = -\delta z + a_{12}\delta x_1 + b_{12}\delta y_1 - a_{12}\delta x_2 - b_{12}\delta y_2 + l, \tag{31}$$

де $l = \alpha_{12}^{\circ} - z_1^{\circ} - N_{12}^{èçì}$.

Методика обчислення наближеного значення z°докладно подається в курсі «Вища геодезія». Тому рівняння поправок для напрямку залишимо в буквеному вигляді.

Оскільки поправки в координатах вихідних точок A і B дорівнюють нулю, рівняння поправок для напрямку N_{12} набуде вигляду

$$v_{N_{A2}} - a_{A2}\delta x_2 - b_{A2}\delta y_2 + l, \tag{32}$$

де $l = \alpha_{A2}^{\circ} - z_A^{\circ} - N_{A2}^{èçì}$

Завдання до задачі 2: Згідно із схемою тріангуляції (див. рис.Д.2) скласти параметричні рівняння поправко для сторони S_{12}, дирекційного кута α_{12}, кутів β_3 і β_4, напрямків M_{AS} і M_{31}.

Вихідні дані: $X_A = 100{,}000$ м; $Y_A = 100{,}000$ м;

$X_B = 500{,}000 \cdot \cos N^{\circ}; Y_B = 500{,}000 \cdot \sin N^{\circ};$

$\alpha_{AB} = 182^{\circ}13'30'' + N^{\circ}$;$S_{12}$ = 515,390 + N мм,

де N - номер варіанта.

[1, с.182-197; 2, с.136-143; 7, с. 235 - 242]

Задача 3. Написати система нормальних рівнянь при трьох невідомих: а) в загальному вигляді; б) для рівноточних вимірів; в) для нерівноточних вимірів; г) привести в загальному
вигляді систему еквівалентних та елімінаційних рівнянь; д) розкрити алгоритми Гаусса $N_{33}^{(2)}, N_{23}^{(4)}, L_3^{(2)}$/

Розв'язання. При трьох невідомих параметрах T_1, T_2 , T_3 одержимо систему трьох нормальних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned} N_{11}\tau_1 + \quad N_{12}\tau_2 + \quad N_{13}\tau_3 + \quad L_1 = \quad 0;\\ N_{21}\tau_1 + \quad N_{22}\tau_2 + \quad N_{23}\tau_3 + \quad L_2 = \quad 0;\\ N_{31}\tau_1 + \quad N_{32}\tau_2 + \quad N_{33}\tau_3 + \quad L_3 = \quad 0. \end{aligned} \tag{33}$$

При рівноточних вимірах коефіцієнти нормальних рівнянь N_{ij} і вільних членів L_i можна обчислити за схемою

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix};$$

$$L = A^T l = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix},$$

де $N_{11} = a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + \dots + a_{n1}a_{n1} = [a_1 a_1];$

$L_1 = a_{11}l_1 + a_{21}l_2 + \dots + a_{n1}l_n$ і т.д.

Отже, в загальному вигляді при рівноточних вимірах одержимо

$$\begin{aligned} [a_1a_1]\tau_1 + [a_1a_2]\tau_2 + [a_1a_3]\tau_3 + [a_1 l] = 0;\\ [a_2a_1]\tau_1 + [a_2a_2]\tau_2 + [a_2a_3]\tau_3 + [a_2 l] = 0;\\ [a_3a_1]\tau_1 + [a_3a_2]\tau_2 + [a_3a_3]\tau_3 + [a_3 l] = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

При нерівноточних вимірах коефіцієнти нормальних рівнянь N_{ij} і вільні члени L_i обчислимо за схемою

$$L = A^T PA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_n \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix}; \qquad (37)$$

$$L = A^T Pl = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}, \qquad (38)$$

де $N_{11} = a_{11}P_1a_{11} + a_{21}P_2a_{21} + \dots + a_{n1}P_na_{n1} = [Pa_1a_1];$

$L_1 = a_{11}P_1l_1 + a_{21}P_2l_2 + \dots + a_{n1}P_nl_n = [Pa_1l]$ і т.д.

При нерівноточних вимірах система нормальних рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} &[Pa_1a_1]\tau_1 + [Pa_1a_2]\tau_2 + [Pa_1a_3]\tau_3 + [Pa_1l] = 0; \\ &[Pa_2a_1]\tau_1 + [Pa_2a_2]\tau_2 + [Pa_2a_3]\tau_3 + [Pa_2l] = 0; \\ &[Pa_3a_1]\tau_1 + [Pa_3a_2]\tau_2 + [Pa_3a_3]\tau_3 + [Pa_3l] = 0. \end{aligned} \qquad (39)$$

Для одержання еквівалентної системи нормальних рівнянь виконують послідовні виключення невідомих τ_1, τ_2, підставляючи їх значення в наступні рівняння. Тоді еквівалентна система нормальних рівнянь при трьох невідомих параметрах набуде вигляду

$$\begin{aligned} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + N_{13}\tau_3 + L = 0; \\ N_{12}^{(1)}\tau_2 + N_{23}^{(1)}\tau_3 + L_2^{(1)} = 0; \\ N_{33}^{(2)}\tau_3 + L_3^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

де $N_{ij}^{(i-1)}, L_i^{(i-1)}$ - відповідні перетворення коефіцієнта ш вільні члени нормальних рівнянь з перетворенням (i-1).

Якщо з еквівалентної системи нормальних рівнянь визначити невідомі τ_i в зворотному порядку від τ_3 до τ_1, то отримаємо систему елімінаційних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\tau_3 = -L_3^{(2)} \big/ N_{33}^{(2)} = E_{3L};\\
&\tau_2 = -(N_{23}^{(1)} \big/ N_{22}^{(1)})\tau_3 - L_2^{(1)} \big/ N_{22}^{(1)} = E_{23}\tau_3 + E_{2L}; \qquad (41)\\
&\tau_1 = -(N_{12}/N_{11})\tau_2 - (N_{13}/N_{11})\tau_3 - L_1/N_{11} = E_{12}\tau_2 + E_{13}\tau_3 + E_{1L}.
\end{aligned}$$

Коефіцієнти і вільні члени (алгоритми Гаусса) перетворених рівнянь розкриваються за правилом: коефіцієнт (вільний член) перетвореної системи дорівнює коефіцієнту (вільному члену) попередньої перетвореної системи з тими ж індексами мінус дріб, у знаменнику якого стоїть квадратний коефіцієнт попередньої системи, а в чисельнику – добуток двох коефіцієнтів, у яких перші індекси такі самі, як в знаменнику, а другі повторюють індекси зменшуваного.

Так, $N_{33}^{(2)} = N_{33}^{(1)} - \dfrac{N_{23}^{(1)}N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$; $\quad N_{33}^{(1)} = N_{33} - \dfrac{N_{13}N_{13}}{N_{11}}$;

$$N_{23}^{(1)} = N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}}; \qquad L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}};$$

$$L_3^{(2)} = L_3 - \frac{N_{13}L_1}{N_{11}}; \quad L_2^{(1)} = L_2 - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}}; \quad N_{22}^{(1)} = N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}.$$

Завдання до задачі 3: Привести систему нормальних рівнянь у загальному вигляді, еквівалентну систему і елімінаційні рівняння при чотирьох невідомих параметрах. Розкрити алгоритми $N_{44}^{(3)}$, $L_4^{(3)}$, $N_{44}^{(2)}$, $L_4^{(2)}$, $N_{44}^{(1)}$, $L_4^{(1)}$.

[1, с.212-225; 2, с.142-149; 7, с. 242-246]

Задача 4. Виконати вирівнювання виміряних кутів (рис. Д. 4), якщо $x_1 = 38^\circ 10' 12''$, $x_2 = 55^\circ 46' 04''$ та $x_3 = 93^\circ 56' 22''$:

Розв'язання. Як невідомі параметри виберемо шукані кути $\bar{x}_1 = t_1$ та $\bar{x}_2 = t_2$. Тоді рівняння зв'язку набудуть вигляду $\bar{x}_1 = t_1$; $\bar{x}_2 = t_2$; $\bar{x}_1 = t_1 + t_2$. За наближені значення параметрів приймемо вимірні значення $l_1^\circ = x_1$, $l_2^\circ = x_2$. Отже, a_{11} = 1; a_{12} = 0; a_{21} = 0; a_{22} = 1; a_{31} = 1; a_{32} = 1; $l_1 = t_1^\circ - x_1 = 0$; $l_2 = t_2^\circ - x_2 = 0$; $l_3 = t_1^\circ + t_2^\circ - x_3 = 38^\circ 10' 12'' + 55^\circ 46' 04'' - 93^\circ 56' 22'' = -6''$;

$$v_1 = \tau_1; \qquad v_2 = \tau_2; \qquad v_3 = \tau_1 + \tau_2 - l_3; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

За формулами (34), (36) обчислимо коефіцієнти і перетворені вільні члени нормальних рівнянь:

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$L = A^T l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо нормальні рівняння

$$2\tau_1 + 1\tau_2 - 6 = 0;$$

$$1\tau_1 + 2\tau_2 - 6 = 0.$$

Невідомі τ_1 і τ_2 обчислимо за правилом Крамера:

$$\tau_1 = \frac{|N_1|}{|N|}; \qquad \tau_2 = \frac{|N_2|}{|N|},$$

де $|N_i|$ - визначник матриці, в котрій стовпець *i* замінемо на стовпець перетворених членів

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{-6}{3} = +2; \quad \tau_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = +2.$$

Отже, $t_1 = t_1^\circ + \tau_1 = 38^\circ 10'12'' + 2'' = 38^\circ 10'14''$;

$t_2 = t_2^\circ + \tau_2 = 55^\circ 46'06''$; $v_3 = \tau_1 + \tau_2 + l_3 = 2'' + 2'' - 6'' = -2''$.

Згідно з рівнянням поправок $v_1 = \tau_1 = +2''$; $v_2 = \tau_2 = +2''$;

$v_3 = \tau_1 + \tau_2 + l_3 = 2'' + 2'' - 6'' = -2''$.

Зрівняні кути набувають значень

$\bar{x}_1 = x_1 + v_1 = 38^\circ 10'14''$; $\bar{x}_2 = x_2 + v_2 = 55^\circ 46'06''$;

$\bar{x}_3 = x_3 + v_3 = 93^\circ 56'22''$

Контроль $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3 = 0$. Умова виконується.

Завдання до задачі 4:. Виконати вирівнювання виміряних кутів за схемою рис. Д.4, прийнявши $x_3 = 93^\circ 56'22'' + N''$.

***Задача* 5**. Виконати вирівнювання нівелірної мережі (рис. Д.5) з однією вузловою точкою. Вихідні дані наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Номер репера	*H*, м	Номер ходу	*L*, км	*h,* мм
A	100,000	1	2	-0,812
B	105,841	2	4	-6650
C	97,635	3	2,5	-1543

Розв'язання. Невідомою є висота вузлової точки 1. Отже, виміряні перевищення можна характеризувати одним параметром і виразити їх через висоти вихідних реперів і вузлової точки. Якщо $\overline{H}_1 = t_1$, рівняння зв'язку набудуть вигляду $\bar{h}_1 = t_1 - H_A$; $\bar{h}_2 = t_1 - H_B$; $\bar{h}_3 = H_C - t_1$. Наближено висоту вузлової точки можна обчислити від будь-якого з вихідних реперів.

Наприклад, $t_1^\circ = H_A + h_1 = 100{,}000 - 0{,}812 = 99{,}188$ м.

Похідні від рівнянь зв'язку приводить до значень коефіцієнтів a_{11} = 1, a_{21} = 1, a_{31} = -1 і вільних членів:

$$l_1 = t_1^\circ - H_A - h_1 = 99{,}188 - 100{,}000 - (-0{,}812) = 0;$$

$$l_2 = t_1^\circ - H_B - h_2 = 99{,}188 - 105{,}841 - (-6{,}650) = -3 \text{ мм};$$

$$l_2 = H_C - t_1^\circ - h_3 = 97{,}635 - 99{,}188 - (-1{,}543) = -5 \text{ мм}.$$

Маємо параметричні рівняння поправок

$$\begin{aligned} v_1 &= \tau_1 + l_1; \\ v_2 &= \tau_1 + l_2; \\ v_3 &= \tau_1 + l_3;.. \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad l = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{aligned} v_1 &= \tau_1; \\ v_2 &= \tau_1 - 3; \\ v_3 &= \tau_1 - 5. \end{aligned}$$

За формулами (6), (37), (38) обчислимо ваги, коефіцієнти і вільні члени нормальних рівнянь, прийнявши c = 2, тоді

$$P_1 = c / L_1 = 1; \quad P_2 = 0{,}5; \quad P_2 = 0{,}8;$$

$$N = A^T PA = (1 1 -1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 0{,}5 - 0{,}8)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = +2{,}3;$$

$$L = A^T Pl = (1 1 -1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = (1 \cdot 0{,}5 - 0{,}8)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = +2{,}5.$$

Отже, одержимо нормальне рівняння $2{,}3\tau_1 + 2{,}5 = 0$,
Звідки

τ_1 = -2,5 /2,3 = - 1,1 мм.

Тоді вирівняне значення вузлової точки буде

$$\overline{H}_1 = t_1^\circ + \tau_1 = 99{,}188 + (-1{,}1) = 99{,}1869 \text{ м}.$$

Контроль: 2,3(-1,1) + 2,5 = 0,03 ≈ 0.

Завдання до задачі 5:. Виконати вирівнювання нівелірної мережі (рис. Д.6). Дано: H_A = 100,000; H_B = 96,140 м; h_1 = + 1111 + N мм; h_2 = - 4972 мм; h_3 = + 4965 мм.

[1, с.254-261; 2, 200-205; 7, с.285-292].

3. ВИРІВНЮВАННЯ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ

Задача 6. Виконати вирівнювання й оцінку точності вимірювання кутів у всіх комбінаціях (рис. Д. 7) параметричним способом. Вихідні дані наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Номер кута	Виміряні значення	Номер кута	Виміряні значення
X_1	$45^\circ 22' 02'',0$	X_4	$86^\circ 51' 20'',0$
X_2	$41^\circ 29' 20'',0$	X_5	$74^\circ 07' 44'',0$
X_3	$32^\circ 38' 20'',0$	X_6	$119^\circ 29' 52'',0$

Розв'язання.

3.1. ***Вибір шуканих невідомих (параметрів)***

Для розв'язання задачі досить мати три з шести виміряних кутів. Оскільки шуканих параметрів три (t_1, t_2, t_3) і вони повинні бути незалежними, за параметри приймемо перші три виміряні кути, тобто

$t_1 = \bar{x}_1;\ \ t_2 = \bar{x}_2;\ \ t_3 = \bar{x}_3.$

Зрівняні значення параметрів визначаються за формулою (7):

$t_1 = t_1^\circ + \tau_1;\quad t_2 = t_2^\circ + \tau_2;\quad t_3 = t_3^\circ + \tau_3.$

3.2. ***Визначення наближених значень параметрів***

За наближені значення параметрів приймемо результати вимірів, тобто $t_1^\circ = 45^\circ 22' 02'',0$; $t_2^\circ = 41^\circ 29' 20'',0$; $t_3^\circ = 32^\circ 38' 20'',0$.

3.3. ***Складання параметричних рівнянь зв'язку***

Виразимо за формулою (1) вирівняні значення виміряних кутів через параметри:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \bar{x}_1 = x_1 + v_1 = t_1; && 4)\ \bar{x}_4 = x_4 + v_4 = t_1 + t_2;\\
&2)\ \bar{x}_2 = x_2 + v_2 = t_2; && 5)\ \bar{x}_5 = x_5 + v_5 = t_2 + t_3; \qquad (43)\\
&3)\ \bar{x}_3 = x_3 + v_3 = t_3; && 6)\ \bar{x}_6 = x_6 + v_6 = t_1 + t_2 + t_3.
\end{aligned}
$$

3.4. *Складання параметричних рівнянь поправок*

Відповідно до формули (2) в загальному вигляді параметричні рівняння поправок мають вид:

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + l_i . \qquad (44)$$

Обчислимо коефіцієнти a_{ij} і вільні члени l_i параметричних рівнянь поправок

$a_{11} = (\partial\bar{x}_1/\partial t_1)_0 = +1; \quad a_{12} = (\partial\bar{x}_1/\partial t_2)_0 = 0; \quad a_{13} = (\partial\bar{x}_1/\partial t_3)_0 = 0;...;$

$a_{61} = +1; \quad a_{62} = +1; \quad a_{63} = +1;$

$l_1 = t_1^\circ - x_1 = 45^\circ 22' 02'' - 45^\circ 22' 02'' = 0;...;$

$l_6 = t_1^\circ + t_2^\circ + t_3^\circ - x_6 = 45^\circ 22' 02'' + 41^\circ 29' 20'' + 32^\circ 38' 20'' -$

$-119^\circ 29' 52'' = -10''.$ (45)

За формулою (44) і одержаними значеннями a_{ij} і l_i знайдемо рівняння поправок:

$$\begin{aligned}
&1)\ v_1 = \tau_1 ;\\
&2)\ v_2 = \tau_2 ;\\
&3)\ v_3 = \tau_3 ;\\
&4)\ v_4 = \tau_1 + \tau_2 + 2'' ;\\
&5)\ v_5 = \tau_2 + \tau_3 - 4'' ;\\
&6)\ v_6 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - 10'' .
\end{aligned} \qquad (46)$$

За рівняннями (46) складаємо таблицю 4 коефіцієнтів рівнянь поправок. Нижня частина таблиці використовується для визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь N_{ij}, L_i.

На першому етапі складення таблиці 4 відповідно до формули (46) заповнюють рядки 1-6 і графи 2-6. У графі 7 знаходять суми коефіцієнтів рівнянь поправок a_{ij} і вільного члени l_i по рядку, а в рядку 7 – відповідні суми по графах. Контролем служить рівність сум по рядку 7 сумі по графі 7 (3 + 4 + 3 - 12 = 1 + 1 +1 + 4 – 2 – 7 = –2).

Таблиця 4

Таблиця коефіцієнтів рівнянь поправок і нормальних рівнянь

Номер рядка	Номер рівняння	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	l_i	S_i	v
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	+1				+1	+1,0
2	2		+1			+1	+0,5
3	3			+1		+1	+4,0
4	4	+1	+1		+2,0	+4,0	+3,5
5	5		+1	+1	-4,0	-2,0	+0,5
6	6	+1	+1	+1	-10,0	-7,0	-4,5
7	[S	3	4	3	-12	-2,0	[v^2]=50,0
8	$\tau_1\tau_2\tau_3$	+1,000	+0,500	+4,000			
9	сума	a_{i1}]	a_{i2}]	a_{i3}]	l_i]	S_i]	
10	[a_{1j}	+3	+2	+1	-8,0	-2,0	
11	[a_{2j}		+4	+2	-12,0	-4,0	
12	[a_{3j}			+3	-14,0	-8,0	
13	[l				+120,0	+86,0	

[SS] = 72,0

3.5. *Складання нормальних рівнянь*

Оскільки кількість невідомих параметрів дорівнює трьом, то в буквених позначеннях систему трьох нормальних рівнянь при рівно точних вимірах можна виразити формулами (33) і (36).

Значення коефіцієнтів і вільні члени системи нормальних рівнянь обчислюють за формулами (34) і (35) або з застосуванням програмних мікрокалькуторів. Проте в процесі обчислень виконують додатковий контроль. Тому з метою кращого сприйняття знайдемо коефіцієнти і вільні члени нормальних рівнянь у табл.4.

Якщо коефіцієнти рівнянь поправок послідовно по графах помножити самі на себе і додати, то одержимо квадратичні коефіцієнти N_{ii}. При множенні коефіцієнтів i-ї графи на j-у графу одержимо неквадратичні коефіцієнти N_{ij}. Аналогічно вільні члени L_i

одержують при множенні коефіцієнтів i-ї графи на l_y графу і додаванні одержаних результатів. Для контролю вираховують суми:

$$1)\ [a_1a_1]+[a_1a_2]+[a_1a_3]+[a_1l]=[a_1S];$$

$$2)\ [a_1a_2]+[a_2a_2]+[a_2a_3]+[a_2l]=[a_2S];$$

$$3)\ [a_1a_3]+[a_2a_3]+[a_3a_3]+[a_3l]=[a_3S]; \qquad (47)$$

$$4)\ [a_1l]+[a_2l]+[a_3l]+[ll]=[lS];$$

$$5)\ [a_1S]+[a_2S]+[a_3S]+[lS]=[SS],$$

або

+3 + 2 + 1 – 8 = –2;

+2 + 4 + 2 – 12 = – 4;

+1 + 2 + 3 – 14 = – 8;

–8 – 12 – 14 + 120 = 86;

–2 – 4 – 8 + 86 = 72.

У рядках 10-12 табл.4 записані лише коефіцієнти нормальних рівнянь, які розташовані вище від головної діагоналі, оскільки вони симетричні і рівні між собою. Наприклад, $[a_1a_2]$ = $[a_2a_1]$; тому коефіцієнт N_{12} = +2, розташований на рядку 10 у графі 3, можна записати в рядок 11 у графі 2. Аналогічно симетрично можна перенести інші коефіцієнти.

Остаточно нормальні рівняння набудуть вигляду

$$3\tau_1 + 2\tau_2 + 1\tau_3 - 8 = 0;$$

$$2\tau_1 + 4\tau_2 + 2\tau_3 - 12 = 0; \qquad (48)$$

$$1\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 - 14 = 0.$$

3.6. *Розв'язання нормальних рівнянь*

Нормальні рівняння розв'яжемо способом послідовного виключення невідомих, запропонованих Гауссом.

У процесі розв'язання системи нормальних рівнянь одержують еквівалентну систему (40). Шукані поправки до параметрів одержують із розв'язання рівнянь за формулою (41).

Розв'язання системи рівнянь (40) наводиться в таблиці 5.

Порядок розв'язання. У таблиці 5 запишемо значення $N_{1\gamma}, L_1, S_1$. Поділимо їх на перший квадратичний коефіцієнт N_{11} = +3,000 і змінимо знаки на зворотні. Результати запишемо в перший елімінаційний рядок E_1, який можна одержати шляхом множення коефіцієнта $N_{1\gamma}$ на величину, зворотну першому квадратичному коефіцієнту із зворотним знаком $-1/N_{11} = (-0,3333)$. Обчислення контролюють по елімінаційному рядку. Суму коефіцієнтів $E_{11} + E_{12} + E_{13} + E_{14} = -1 - 0,6667 - 0,3333 + 2,6667 = +0,6667$ записують у графу 6 рядка E_1. Вона повинна дорівнювати E_{1S}. У даному випадку +0,6667 = +0,6667. Різниця між ними припускається в межах точності обчислень. Якщо різниця неприпустима, перевіряють правильність коефіцієнтів першого рядка і обчислені значення елімінаційного рядка.

У рядку $N_{2\gamma}$ запишемо коефіцієнти нормального рівняння, починаючи з квадратичного коефіцієнта $N_{22} = +4,000$. При цьому в графі 5 випишемо суму S_2 з урахуванням коефіцієнта N_{12}. Так, $N_{2S} = N_{12} + N_{22} + N_{23} + L_2 = 2,0 + 4,0 + 2,0 - 12,0 = -4,0$. Помножимо елемент E_{12} = - 0,6667 на елементи рядка N_1 (тобто $E_{12} \cdot N_{12}$; $E_{12} \cdot N_{13}$; $E_{12} \cdot L_1$ і $E_{12} \cdot S_1$) і запишемо в рядку $E_{12} \cdot N$. Складемо елементи рядків $N_{2i} + E_{12}N$ і запишемо в рядок $N_{2i}^{(1)}$.

У результаті одержимо друге нормальне рівняння після першого перетворення, тобто $N_{22}^{(1)}\tau_2 + N_{23}^{(1)}\tau_3 + L_2^{(1)} = 0$ або $2,667\tau_2 + 1,333\tau_3 - 6,667 = 0$. Сума коефіцієнтів цього рівняння повинна дорівнювати перетвореній сумі $S_{21}^{(1)}$, або (2,667 + 1,333 -6,667 – 4,000; $S_2^{(1)} = -4,000$).

Поділимо елементи рядка $N_{24}^{(1)}$ на квадратний коефіцієнт -- $N_{22}^{(1)} = 2,667$ або помножимо їх на зворотну величину $-1\big/N_{22}^{(1)} = -0,3750$. Результати запишемо в рядок E_2. Аналогічно попередньому виконується контроль обчислення $E_{22} + E_{23} + E_{2L} = E_{2S} = -1 - 0,500 + 2,500 = 1,0$; $E_{2S} = 1,00$.

Далі запишемо третє нормальне рівняння, починаючи з квадратичного коефіцієнта N_{33}, далі L_3 та S_3. Контроль: $N_{13} + N_{23} + N_{33} + L_3 = S_3 = 1,0 + 2,0 + 3,0 - 14,0 = -8,0$; $S_3 = -8,0$. Помножимо елементи E_{13} = - 0,3333 на елементи рядка N_{i1}. Починаючи з графи 3, тобто $E_{13}\,N_{13}$, $E_{13}\,L_1$ і $E_{13}\,S_1$.

Таблиця 5

Розв'язання нормальних рівнянь способом Гаусса

Дії	τ_1	τ_2	τ_3	L	S	Контроль
0	1	2	3	4	5	6
N_{1i}	+3,000	+2,000	+1,000	-8,000	-2,000	
E_1	-1	-0,6667	-0,3333	+2,6667	+0,6667	+0,6667
N_{2i} $E_{12}N$	(-0,3333)	+4,000 -1,333	+2,000 -0,667	-12,000 +5,333	-4,000 +1,333	
$N_{2i}^{(1)}$		+2,667	+1,333	-6,667	-2,667	-2,6667
E_2		-1	-0,5000	+2,5000	+1,0000	+1,0000
N_{3i} $E_{13}N$ $E_{23}N^{(1)}$		(-0,3750)	+3,000 -0,333 -0,667	-14,000 +2,666 +3,334	-8,000 +0,667 +1,333	
$N_{3i}^{(2)}$			+2,000	-8,000	-6,000	-6,000
E_3			-1	+4,0000	+3,0000	+3,0000
0	1	2	3	4	5	6
N_{4i} $E_{14}N$ $E_{24}N^{(1)}$ $E_{34}N^{(2)}$			(-0,5000)	+120,000 -21,334 -16,668 -32,000	+86,000 -5,333 -6,668 -24,000	
$N_{4i}^{(3)}$				49,998	49,999	$=[v^2]$
τ_3			+4,000			
τ_2		+0,500	-2,0000	+2,5000		
τ_1	+1,000	-0,3333	-1,3332	+2,6667		

Примітка. Коефіцієнти еквівалентних та елімінаційних рівнянь обчислюють з одним-двома додатковими знаками порівняно з коефіцієнтами вихідної системи.

Результати запишемо в рядок $E_{13}\,N$. Аналогічно знайдемо добутки $E_{23}N_{23}^{(1)}$, $E_{23}L_2^{(1)}$, $E_{23}S_2^{(1)}$ і запишемо в рядок $E_{23}N^{(1)}$.

Складемо по графах елементи рядків $N_{3i} + E_{13}N_1 + E_{23}N^{(1)}$.

Одержимо коефіцієнти третього нормального рівняння після другого перетворення $N_{33}^{(2)}, L_3^{(2)}$ для контролю $S_3^{(2)}$. При цьому $N_{33}^{(2)} + L_3^{(2)} = S_3^{(2)}$. Таким чином одержимо третє еквівалентне рівняння. Система еквівалентних рівнянь у даному прикладі буде

$$\begin{aligned} 3{,}000\tau_1 + 2{,}000\tau_2 + 1{,}000\tau_3 - 8{,}000 &= 0; \\ 2{,}667\tau_2 + 1{,}333\tau_3 - 6{,}667 &= 0; \\ 2{,}000\tau_3 - 8{,}000 &= 0. \end{aligned} \qquad (49)$$

Для оцінки точності вимірів необхідно знайти суму квадратів поправок у виміряні величини, тобто $[v^2]$.

Позначимо $[ll] = 120{,}0 = N_{44}$ та $[lS] = 86{,}0 = S_4$ (див.табл.1). У графах 4 і 5 табл.5 продовжимо обчислення.

Знайдемо елімінаційний рядок E_3. Значення елементів N_{44} і S_4 занесемо у рядок N_{4i}. Знайдемо добуток $E_{1L}L_1$; $E_{1L}S_1$; $E_{2L}L_2^{(1)}$; $E_{2L}S_2^{(1)}$; $E_{3L}L_3^{(2)}$; $E_{3L}L_3^{(2)}$.

Результати запишемо у відповідні рядки табл.5.

Визначимо суми $N_{44} + E_{1L}L_1 + E_{2L}L_2^{(1)} + E_{3L}L_3^{(2)} = N_{44}^{(3)}$ і $S_4 + E_{1L}S_1 + E_{2L}S_2^{(1)} + E_{3L}S_3^{(2)} = S_4^{(3)}$. При цьому знайдемо суму квадратів поправок і проконтролюємо обчислення, оскільки

$$N_{44}^{(3)} = S_4^{(3)} = [v^2] = N_{(k+1)(k+1)}^{k}. \qquad (50)$$

У даному прикладі $N_{44}^{(3)} = S_4^{(3)} = [v^2] = 49{,}998.$

При виконанні контролю розходження можуть досягати однієї – двох одиниць передостанньої значущої цифри.

Для обчислення поправок τ_1, τ_2, τ_3 до шуканих параметрів виконують зворотній хід системи розв'язання за формулами (41), використовуючи елімінаційні рядки E_1, E_2 і E_3.

Останнє невідоме $\tau_3 = E_{3L} = +\ 4{,}000$. Перенесемо його на перетин рядка τ_3 і графи τ_3. У рядках τ_2 і τ_1 навпроти графи L перенесемо величини $E_{2L} = +2{,}5000$ і $E_{1L} = +\ 2{,}6667$. Потім знайдемо добутки $E_{23}\tau_3 = -2{,}0000$ і $E_{13}\tau_3 = -1{,}3332$. В рядку τ_2 визначимо його значення $\tau_2 = E_{23}\tau_3 + E_{2L} = -2{,}000 + 2{,}500 = +0{,}500$. Аналогічно знайдемо $E_{12}\tau_2 = -0{,}3333$, а потім поправку до параметра:

$\tau_1 = E_{12}\tau_2 + E_{13}\tau_1 + E_{1L} = -0{,}3333 + 2{,}6667 = +1{,}000$.

Розв'язання системи нормальних рівнянь контролюють підстановкою одержаних значень τ_1, τ_2, τ_3 у вихідну систему (48). Наприклад:

$3(+1{,}000) + 2(+0{,}500) + 1(+4{,}000) – 8{,}000 = 0;$

$2(+1{,}000) + 4(+0{,}500) + 2(+4{,}000) – 12{,}000 = 0;$

$1(+1{,}000) + 2(+0{,}500) + 3(+4{,}000) – 14{,}000 = 0.$

За більшого числа нормальних рівнянь їх розв'язання контролюють за сумарним рівнянням

$$\sum{}_1\tau_1 + \sum{}_2\tau_2 + \sum{}_3\tau_3 + \sum{}_i = 0, \qquad (51)$$

де

$$\sum{}_1 = N_{11} + N_{12} + N_{13} = S_1 - L_1;$$

$$\sum{}_2 = N_{21} + N_{22} + N_{23} = S_2 - L_2;$$

$$\sum{}_3 = N_{31} + N_{32} + N_{33} = S_3 - L_3;$$

(52)

$$\sum{}_L = L_1 + L_2 + L_3 = S_4 - [ll].$$

У прикладі, що розглядається $\sum{}_1 = S_1 - L_1 = -2(-8) = +6;$ $\sum{}_2 = -4(-12) = +8;$ $\sum{}_3 = -8(-14) = +6;$ $\sum{}_L = 86 - 120 = 34.$ Тоді за формулою (51) знаходимо 6 (+1,000) + 8(+0,500) + 6(+4,000) – 34,000 = 0.

Отже, всі обчислення виконані правильно.

3.7. *Обчислення поправок до результатів вимірів*

Поправки до виміряних величин знаходять за формулою (44) або (46), користуючись табл..4. Значення поправок τ_1 виписують у рядок 8. Тоді поправки до виміряних величин у даному прикладі.

$v_1 = \tau_1 = + 1{,}000,$

$v_2 = \tau_2 = + 0{,}500,$

$v_3 = \tau_3 = + 4{,}000,$

$v_4 = \tau_1 + \tau_2 + 2 = + 1{,}000 + 0{,}500 + 2 = +3{,}500,$

$v_5 = \tau_2 + \tau_3 + (-4) = + 0{,}500 + 4{,}000 - 4 = +0{,}500,$

$v_6 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ -10 = + 1,000 + 0,500 + 4,000-10 = -4,500.

Запишемо значення поправок v_i у табл.4 і обчислимо суму їх квадратів, тобто $[v^2]$ = 50,000. Зрівнюємо цей результат з раніше одержаним у схемі розв'язання нормальних рівнянь (див. табл.5) $[v^2]$ = 49,999. Отже, поправки v_i обчислені правильно.

3.8. *Обчислення вирівняних значень параметрів*

Вирівняні значення параметрів знаходять за формулою (7). Оскільки в задачі за параметри вибрані виміряні кути, обчислення їх вирівняних значень сумісно з обчисленням вирівняних значень кутів у табл.6.

У табл.6 вираховують вирівняні значення виміряних кутів за формулою (6).

Таблиця 6

Вирівняні значення виміряних величин і контроль обчислень

Номер кута	Виміряне значення	v_i	Зрівняний кут	Рівняння зв'язку	Контроль
1	2	3	4	5	6
X_1	$45^\circ 22' 02''$	+1,0	$45^\circ 22' 03'',0$	$\bar{x}_1 = t_1 = t_{1_\circ} + \tau_1$	$45^\circ 22' 03'',0$
X_2	$41^\circ 29' 20''$	+0,5	$41^\circ 29' 20'',5$	$\bar{x}_2 = t_2 = t_{2_\circ} + \tau_2$	$41^\circ 29' 20'',5$
X_3	$32^\circ 38' 20''$	+4,0	$32^\circ 38' 24'',0$	$\bar{x}_3 = t_3 = t_{3_\circ} + \tau_3$	$32^\circ 38' 24'',0$
X_4	$86^\circ 51' 20''$	+3,5	$86^\circ 51' 23'',5$	$\bar{x}_4 = t_4 = t_{4_\circ} + \tau_4$	$86^\circ 51' 23'',5$
X_5	$74^\circ 07' 44''$	+0,5	$74^\circ 07' 44'',5$	$\bar{x}_5 = t_5 = t_{5_\circ} + \tau_5$	$74^\circ 07' 44'',5$
X_6	$119^\circ 29' 52''$	-4,5	$119^\circ 29' 47'',5$	$\bar{x}_1 = t_1 = t_{1_\circ} + \tau_1$	$119^\circ 29' 47'',5$

Остаточний контроль виконаємо, порівнюючи значення графи 6 з графою 4.

3.9. *Оцінка точності*

За рівноточних вимірів середню квадратичну похибку виміряного кута визначають за формулою (8):

$$m=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}=\sqrt{\frac{50{,}0}{6-3}}=4'',08.$$

Середню квадратичну «похибку похибки» розраховуємо за формулою (10):

$$m_m=m/\sqrt{2(n-k)}=4'',08/\sqrt{6}=1'',67.$$

Для оцінки точності вирівняних значень параметрів t_i визначимо їх ваги. За формулами Енке вага останнього невідомого $P_{t_3}=N_{33}^{(2)}$. У таблиці 5 знайдемо $P_{t_3}=2{,}00$.

Вагу останнього невідомого визначають за формулою

$$P_{t_2}=\frac{N_{22}^{(1)}}{N_{33}^{(1)}}P_{t_3}. \tag{53}$$

Коефіцієнт $N_{22}^{(1)}=+2{,}667$ вказано в табл. 5. Величину $N_{33}^{(1)}$ визначимо за правилом розкриття алгоритмів Гаусса:

$$N_{33}^{(1)}=N_{33}-\frac{N_{13}N_{13}}{N_{11}}=3{,}0-\frac{1\cdot 1}{3{,}0}=-2{,}667.$$

Тоді за формулою (53) $P_{t_2}=\dfrac{2{,}667}{2{,}667}\cdot 2{,}000=2{,}000.$

Виміри рівноточні, про що свідчить і рівність вагів:
$P_{t_2}=P_{t_3}$. Отже, $P_{t_1}=2{,}00.$

Тоді середня квадратична похибка вирівняних параметрів t_1, t_2, t_3, а отже, *і* виміряних кутів буде

$$m_t=\frac{m}{\sqrt{P_t}}=\frac{4'',08}{\sqrt{2}}=2'',68,$$

а $$m_{m_t}=\frac{m_t}{\sqrt{2(n-k)}}=\frac{2'',68}{\sqrt{6}}=1'',18.$$

Одержані середні квадратичні похибки m_t будуть однаковими для всіх виміряних кутів, оскільки виміри рівноточні.

Довірчий інтервал для стандарту окремого результату виміру будується за формулою

$$\gamma_1 m\le\sigma\le\gamma_2 m, \tag{54}$$

де γ_1,γ_2 визначається за формулами

$$\gamma_1 = \sqrt{r/\chi_2^2}; \quad \gamma_2 = \sqrt{r/\chi_1^2}. \tag{55}$$

Значення χ_1 і χ_2 вибирають з таблиць розподілу χ^2 залежно від імовірностей $P_1 = l - P_2$ і $P_2 = 0{,}5q$, де q – заданий рівень значності довірчої імовірності [1, доп. 6, 7, дод. 4].

При p = 0,90; q = 0,10; p_1 = 0,95 p_2 = 0,05; $r = n - k$ = 6 – 3 =3 за таблицями знаходимо $\chi_1^2 = 0{,}352;$ $\chi_2^2 = 7{,}82$. Тоді $\gamma_1 = 0{,}62, \gamma_2 = 2{,}92,$ а довірчий інтервал

$$p\{0{,}62 \cdot 4{,}08 \le \sigma(X) \le 2{,}92 \cdot 4{,}08\} = 0{,}90$$

або $$p\{2'',22 \le \sigma(X) \le 11'',91\} = 0{,}90.$$

Завдання до задачі 6:. Виконати вирівнювання і оцінку точності виміряних кутів у всіх комбінаціях за умовами задачі 6. Одна із вказаних в табл. 3 значень виміряного кута змінюється відповідно до табл. 7.

Таблиця 7

Таблиця зміни значень виміряного кута за варіантом завдання

Кут	Інтервали варіантів			
	$1 < N < 10$	$11 < N < 20$	$21 < N < 40$	$41 < N < 90$
X_3	$+0'',5N$			
X_4		$+0'',3N$		
X_5			$-0'',2N$	
X_6				$-(0'',1N \pm 1'')$

Знак «+» береться за непарного значення та «-» за непарного значення варіанта N. Наприклад, N = 15. Тоді необхідно змінити величину X_4 на X_4 = $86^\circ 51' 20'' + 0'',3 \cdot 15 = 86^\circ 51' 24'',5$. За N= 62 необхідно змінити значення

$$X_6 = 119^\circ 29' 52'',0 - (0'',1 \cdot 62 - 1') = 119^\circ 29' 46'',8.$$

[1, с.174-196, 205 – 234, 249, 253; 2, с.136-195; 7, с.233-296]

4. ВИРІВНЮВАННЯ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ

***Задача** 7*. Виконати вирівнювання нівелірної мережі (рис. Д.8) параметричним способом. Визначити вирівняні значення вузлових реперів 1, 2, 3 і зрівняні значення виміряних за ходами перевищень. Виконати оцінку точності нівелювання 1 км ходу,висот вузлових реперів і вирівняного перевищення h_5. Виміряні перевищення і довжини ходів наведені в табл. 8.

Таблиця 8

Вихідні дані

Номер ходу	L, км	h, м	Номер ходу	L, км	h, мм
1	10,6	+ 2356	4	7,1	- 4802
2	12,5	+ 3181	5	9,0	+ 5604
3	8,3	- 0806	6	10?0	+ 2430

Розв'язання

4.1 Вибір необхідних невідомих (параметрів)

У нівелірній мережі слід визначити вирівняні значення висот вузлових реперів і перевищень. Для знаходження висот (позначок) трьох реперів достатньо виміряти будь-які три перевищення. Тоді число шуканих параметрів К=3. Виміряні перевищення можна виразити через позначки марок і реперів. Тому для даної сітки нівелювання параметрами краще вибрати не самі перевищення, а вирівняні висоти вузлових реперів, тобто $t_1 = H_1;\ \ t_2 = H_2;\ \ t_3 = H_3.$

4.2. Обчислення наближених значень параметрів

Вирівняні значення параметрів вираховують за формулами

$$t_1 = t_1^\circ + \tau_1;\quad t_2 = t_2^\circ + \tau_2;\quad t_3 = t_3^\circ + \tau_3. \tag{56}$$

Щоб поправки були по можливості мінімальними, приймемо за наближене значення параметрів t_i°, позначки реперів обчислені по одному ходу від найближчої марки, тобто

$$t_1^\circ = H_A + h_1 = 42{,}137 + 2{,}356 = 44{,}493,$$

$$t_2^\circ = H_B - h_3 = 46{,}860 - (-0{,}806) = 47{,}666,$$

$$t_3^\circ = H_B + h_4 = 46{,}860 + (-4{,}802) = 42{,}058.$$

4.3. Складання параметричних рівнянь зв'язку

Виразимо вирівняні значення виміряних перевищень через вирівняні висоти (позначки) вузлових реперів (через параметри) і висоти вихідних марок за формулою (1). Тоді

1) $\bar{h}_1 = t_1 - H_A;$ 4) $\bar{h}_4 = t_3 - H_B;$

2) $\bar{h}_2 = t_2 - t_1;$ 5) $\bar{h}_5 = t_2 - t_3;$

3) $\bar{h}_3 = H_B - t_2;$ 6) $\bar{h}_6 = t_1 - t_3.$

4.4. Складання параметричних рівнянь поправок

Параметричні рівняння поправок знаходять за формулою (2), де

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1} = \left(\dfrac{\partial \bar{h}_i}{\partial t_1}\right)_0; a_{i2} = \left(\dfrac{\partial \bar{h}_i}{\partial t_2}\right)_0; a_{i3} = \left(\dfrac{\partial \bar{h}_i}{\partial t_3}\right)_0; \\ l_i = f_i(t_1^\circ, t_2^\circ, t_3^\circ) - h_i. \end{array}\right\}. \qquad (58)$$

Відповідно до (58) за рівнянням зв'язку (57) знаходимо:
для першого рівняння зв'язку $a_{11} = +1;$ $a_{12} = 0;$ $a_{13} = 0;$

$$l_1 = (t_1^\circ - H_A) - h_1 = 44{,}493 - 42{,}137 - 2{,}356 = 0 \text{ і т.д}$$

для шостого рівняння зв'язку $a_{61} = +1;$ $a_{62} = 0;$ $a_{63} = -1;$

$$l_6 = (t_1^\circ - t_3^\circ) - h_6 = 44{,}493 - 42{,}058 - (+2{,}440) = +5 \text{ мм.}$$

Вільні члени можна обчислити в міліметрах, що відповідає точності вимірювання перевищень.

У принципі вільні члени можна виразити в сантиметрах. Параметричні рівняння поправок набудуть вигляду:

1) $v_1 = +\tau_1;$

2) $v_2 = -\tau_1 + \tau_2 \qquad - 8;$

3) $v_3 = \qquad -\tau_2;$

4) $v_4 = \qquad\qquad +\tau_3;$ (59)

5) $v_5 \;=\; \qquad +\tau_2 \;-\tau_3 \;+4$;

6) $v_6 \;=+\tau_1 \qquad \;-\tau_3 \;+5$.

За одержаними рівняннями (59) складемо таблицю коефіцієнтів рівнянь поправок (табл.9).

Оскільки для виміряних перевищень у таблиці 8 вказано довжини ходів L, то ваги P_i в табл..8 обчислюють за формулою

$$P_i = \frac{C}{L_i} = \frac{10}{L_i}. \tag{60}$$

Виконаємо контроль правильності заповнення таблиці коефіцієнтів рівнянь. Так, сума [S] = +2 по рядку 7 повинна дорівнювати сумі [S] = +2 по графі 7.

Таблиця 9

Таблиця коефіцієнтів рівнянь поправок і нормальних рівнянь

Номер рядка	Номер рів-няння	Вага P_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	l_i	S	v	plv
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0,94	+1				+1	-3,35	0
2	2	0,80	-1	+1		-8	-8	-4,22	27,018
3	3	1,20		-1			-1	-0,43	0
4	4	1,41			+1		+1	+1,87	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	5	1,11		+1	-1	+4	+4	+2,56	11,366
6	6	1,00	+1		-1	+5	+5	-0,32	-1,10
7		S	+1	+1	-1	+1	+2	[plv]	37,274
8 τ_1, τ_2, τ_3			-3,35	`+0,43	+1,87			[pv^2]	37,272
9	Сума		a_{i1}]	a_{i2}]	a_{i3}]	l_i]	S_i]		
10			+2,74	-0,80	-1,00	+11,40	+12,34		
11	[pa_{ij}			+3,11	-1,11	-1,96	-0,76		
12	[pa_{1j}				+3,52	-9,44	-8,03		
13	[pa_{2ij}					+93,96	+93,96		
	[pl_j					[pss]=	+97,51		

4.5. Складання нормальних рівнянь

Коефіцієнти N_{ij} і вільні члени L_i нормальних рівнянь обчислюють за формулами (37) і (38) або з застосуванням програмованих калькуляторів. Порядок обчислення коефіцієнтів і вільних членів нормальних рівнянь у табл.9 аналогічний порядку обчислення в п.4.5 (при рівноточних вимірах), але кожного разу добуток коефіцієнтів a_i і a_j помножується на P_i, тобто $N_{ij} = [pa_i a_j]$. Наприклад,

$N_{11} = 0{,}94 \cdot 1 \cdot 1 + 0{,}80 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1{,}20 \cdot 0 \cdot 0 + 1{,}41 \cdot 0 \cdot 0 + 1{,}11 \cdot 0 \cdot 0 +$
$+ 1{,}00 \cdot 1 \cdot 1 = +2{,}74, ...;$ $L_1 = 0{,}94 \cdot 1 \cdot 0 + 0{,}80 \cdot (-1) \cdot (-8) + 1{,}20 \cdot 0 \cdot 0 +$
$+ 1{,}41 \cdot 0 \cdot 0 + 1{,}11 \cdot 0 \cdot (+4) + 1{,}00 \cdot 1 \cdot (+5) = +11{,}40$ і т.д.

Обчислення контролюють за формулою:

$N_{i1} + N_{i2} + ... + N_{in} + l_i = S_i$. Так для першого рівняння:

+2,74 – 0,80 – – 1,00 + 11,40 = 12,34 і $S_1 = +12{,}34$.

Коефіцієнти N_{ij} і вільні члени L_i нормальних рівнянь з контролем наведені в рядках 10-13 табл.9.

Згідно з формулами (39) одержимо систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} 2{,}74\tau_1 - 0{,}80\tau_2 - 1{,}00\tau_3 + 11{,}40 = 0; \\ -0{,}80\tau_1 + 3{,}11\tau_2 - 1{,}11\tau_3 - 1{,}96 = 0; \\ -1{,}00\tau_1 - 1{,}11\tau_2 + 3{,}52\tau_3 - 9{,}44 = 0. \end{cases} \tag{61}$$

Остаточний контроль виконується за формулами

$L_1 + L_2 + L_3 + [pll] = [plS];$ (+11б40 – 1,96 – 9,44 + 93,96 = 93,96);

$[Pa_1S] + [Pa_2S] + [Pa_3S] + [PlS] = [PSS];$ (97,51 = 97,51).

4.6. Складання вагової функції

За умовою задачі необхідно виконати оцінку точності вирівняного перевищення по п’ятому ходу. Виразимо перевищення h_5 через прийняті вирівняні параметри. Тоді

$$F = \bar{h}_5 = t_2 - t_3.$$

Для визначення оберненої ваги функції $1/P_F$ обчислимо коефіцієнти

$$f_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_0 = 0; \quad f_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial t_2}\right)_0 = +1; \quad f_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial t_3}\right)_0 = -1.$$

При обчислені обернені ваги функції $1/P_F$ значення коефіцієнтів f_i проставляються із зворотними знаками в графі 12 табл.10 напроти відповідних нормальних рівнянь $1 - f_1 = 0$ навпроти першого рівняння; $-f_2 = -1$ навпроти другого рівняння; $-f_3 = +1$ навпроти третього рівняння.

4.7. Розв'язання нормальних рівнянь

Розв'язання нормальних рівнянь для визначення поправок τ_1 до наближених значень параметрів t_1° виконано в табл.10 способом Гаусса в тому ж порядку описаному у задачі 6.

Для оцінки точності вирівняних значень параметрів t_1, t_2, t_3 і вихідної вагової функції $F = \bar{h}_5$ (див. п. 5.6) в табл.10 додатково введено графи Q_1, Q_2, Q_3 і F, що дозволяють безпосередньо в схемі розв'язання нормальних рівнянь визначити вагові коефіцієнти Q_{ij} і обернену вагу функції $1/P_F$.

Вагові коефіцієнти Q_{ij} визначають із розв'язання нормальних рівнянь

$$NQ - E = 0, \tag{63}$$

де N – матриця коефіцієнтів вихідної системи рівнянь (61);

$Q = N^{-1}$ – матриця вагових коефіцієнтів; E – одинична матриця . При цьому

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

У додаткових графах Q_1, Q_2, Q_3 табл.10 навпроти 1, 2 і 3-го рівнянь проставляються матриці E (63, 64) за зворотними знаками

(-1, 0, 0), (0, -1, 0) і (0, 0, -1) відповідно. Для контролю обчислень вводиться додаткова графа S' суми всіх коефіцієнтів по рядку. Так,

$$S'_i = S_i + N_{Q_1} + N_{Q_2} + \ldots + N_{Q_k}. \quad (65)$$

У даному прикладі

$S'_1 = +12{,}340 - 1 + 0 + = 11{,}340;$

$S'_2 = -0{,}760 + 0 - 1 + 0 = -1{,}769;$

$S'_3 = -8{,}030 + 0 + 0 - 1 = -9{,}030.$

Для контролю обчислень оберненої ваги в додатковій графі 13 вводиться значення сум S''_i навпроти відповідних нормальних рівнянь. При цьому

$$S''_i = S_i - L_i + f_i, \text{ або } S''_i = S_i - (L_i + F_i), \quad (66)$$

де $F_i = -f_i$.

У прикладі, що розглядається,

$S''_1 = +12{,}340 - (11{,}400 + 0) = +0{,}940;$

$S''_2 = -0{,}760 - (-1{,}960 - 1) = +2{,}200;$

$S''_3 = -8{,}030 - (-9{,}440 + 1) = +0{,}410.$

На першому етапі обчислень в таблиці 10 знаходять поправки до параметрів $\tau_1 =$ 3,353; τ_2 = +0,434 і τ_3 = +1,866 за методикою викладеною в п.4.6.

Обчислення невідомих проконтролюємо за сумарним рівнянням (51). Згідно з (52) $\sum_1$ = +0,94; $\sum_2$ = +1,20; $\sum_3$ = +1,41 і $\sum_L$ = 0. Тоді із (51) знаходимо, що 0,94 (-3,353) + +1,2 (+0,434) + 1,41 (+1,866) + 0 = 0. Отже, шукані поправки вирахувані правильно.

Таблиця 10

Розв’язання нормальних рівнянь

Номер рядка	Дія	τ_1	τ_2	τ_3	L	S	Контроль	Q_1	Q_2	Q_3	$S' = S + NQ$	Контроль	F	$S'' = S - L - F$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	N_1	+2,740	-0,800	-1,000	+11,400	+12,340		-1	0	0	+11,340		0	+0,940
2	E_1	-1	+0,2920	+0,3650	-4,1606	-4,5036	-4,5036	+0,3650	0	0	-4,1387	-4,1387	0	+0,3431
3	N_2		+3,110	-1,110	-1,960	-0,760		0	-1	0	-1,760		-1	+2,200
4	$E_{12}N$		-0,234	-0,292	+3,329	+3,603		-0,292	0	0	+3,311		0	+0,275
5	$N_2^{(1)}$		+2,876	-1,402	+1,369	+2,843	+2,843	-0,292	-1	0	+1,551	+1,551	-1	+2,475
6	E_2		-1	+0,4875	-0,4760	-0,9885	-0,9885	+0,1015	+0,3477	0	-0,5392	-0,5393	+0,3477	-0,8608
7	N_3			+3,520	-9,440	-8,030		0	0	-1	-9,030		+1	+0,410
8	$E_{13}N$			-0,365	+4,161	+4,504		-0,365	0	0	+4,139		0	+0,343
9	$E_{23}N^{(1)}$			-0,683	+0,667	+1,386		-0,142	-0,488	0	+0,756		-0,4875	+1,207
10	$N_3^{(2)}$			+2,472	-4,612	-2,140	-2,140	-0,507	-0,488	-1	-4,135	-4,135	+0,5125	+1,960
11	E_3			-1	+1,8657	+0,8657	+0,8657	+,2051	+0,1974	+0,4046	+1,6727	+1,6727	-0,2073	-0,7929
12	$N_4 = [pll]$				+93,960	+93,960	Q_{i3}	+0,205	+0,197	+0,405				
13	$E_{1L}N$				-47,431	-51,342	E_2Q_j	+0,101	+0,345	0			0	0
14	$E_{2L}N^{(1)}$				-0,652	-1,353	$E_{23} \cdot Q_{i3}$	+0,100	+0,096	+0,197			-0,348	-0,861
15	$E_{3L}N^{(2)}$				-8,605	3,993	Q_{i2}	+0,201	+0,441	+0,197			-0,106	+0,406
16	$[pv^2]$				+37,272	+37,272	E_{1Qj}	+0,365	0	0			-0,454	-0,455
17	τ_3			+1,868	$[pv^2]$	$[pv^2]$	$E_{13}\,Q_{i3}$	+0,074	+0,072	+0,147			$-\frac{1}{P_F}$	$-\frac{1}{P_F}$
18	τ_2		+0,434	+0,910	-0,476		$E_{12}\,Q_{i2}$	+0,059	+0,129	+0,058				
19	τ_1	-3,353	+0,127	+0,681	-4,161		Q_{i1}	+0,498	+0,201	+0,205				

4.8. Обчислення вагових коефіцієнтів

У додаткових графах 7-9 обчислені коефіцієнти Q_{ij} з контролем по графі 10. Для обчислення коефіцієнтів Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} у графі 7 (Q_1) виписані коефіцієнти із зворотним знаком першого стовпця одиничної матриці (64). Обчислення в цій графі проводиться за схемою Гаусса так само, як і в графі 4 (L). Після останнього перетворення одержимо коефіцієнт $N_{3Q_1}^{(2)} = -0{,}507$. Поділивши його на $N_{33}^{(2)} = +2{,}472$, одержимо ваговий коефіцієнт $Q_{13} = +0{,}205$ (рядок 12, графа 7). Коефіцієнти Q_{12} і Q_{11} обчислені за тими ж правилами, за якими визначають невідомі τ_2, τ_1, якщо замість графи 4 прийняти графу 7. Тоді $Q_{12} = E_{23}Q_{13} + E_{2Q_1} + E_{2Q_1} = +0{,}4875(+0{,}205) + 0{,}101 = +0{,}201$ (рядок 15, графа7). Аналогічно

$Q_{11} = E_{12}Q_{12} + E_{13}Q_{13} + E_{1Q_1} = +0{,}292 \cdot (+0{,}201) + 0{,}365 \cdot (+0{,}205) +$
$+ 0{,}365 \cdot (+0{,}205) + 0{,}365 = +0{,}498$ (рядок 19, графа 7).

Якщо коефіцієнти стовпця 2 одиничної матриці (64) поставити навпроти відповідних нормальних рівнянь із зворотним знаком у графі 8, а стовпця 3- в графі 9, то, розв'язавши кожний з них так само, як і графу 7, відповідно одержимо $Q_{23} = +0{,}197$; $Q_{22} = +0{,}441$; $Q_{21} = +0{,}201$; $Q_{33} = 0{,}405$; $Q_{32} = +0{,}197$; $Q_{31} = +0{,}205$.

Їх можна виразити у вигляді матриці:

$$N^{-1} = Q = \begin{pmatrix} +0{,}498 + 0{,}201 + 0{,}205 \\ +0{,}201 + 0{,}441 + 0{,}197 \\ +0{,}205 + 0{,}197 + 0{,}405 \end{pmatrix}. \qquad (67)$$

Проміжні обчислення вагових коефіцієнтів виконані в рядках 13, 14, 16-18.

Значення вагових коефіцієнтів Q_{ij} подані в рядках 12, 15, 19 і графах 7-9.

Поетапний контроль розрахунків виконано за коефіцієнтами елімінаційних рядків і перетвореними коефіцієнтами S' в графах 10 і 11 за схемою Гаусса.

Контроль обчислення вагових коефіцієнтів виконують:

1) за властивістю симетричності вагових коефіцієнтів $Q_{ij} = Q_{ji}$ див. систему)67). Наприклад, $Q_{12} = Q_{21}(0{,}201 = +0{,}201)$ і т.д.

2) за контрольною сумою

$$(Q_{11} + Q_{12} + Q_{13})\sum{}_1 + (Q_{21} + Q_{22} + Q_{23})\sum{}_2 +$$
$$+ (Q_{31} + Q_{32} + Q_{33})\sum{}_3 = K,$$

де $\sum_i$ вираховується за (52).

У даному прикладі (0,498 + 0,201 + 0,205) · 0,94 + (0,201 + 0,441 + 0,197) ·1,20 + (0,205 + 0,197 + 0,405) · 1,44 = 2,995 ≈ 3

(при цьому K = 3).

Отже, вагові коефіцієнти вирахувано правильно.

4.8.1. Обчислення вагових коефіцієнтів за способом діагоналей

З елементів N_{iQ} і E_{iQ} табл. 10 можна утворити три кутник матриці:

$$T_2 = \begin{pmatrix} E_{1Q_1} & E_{2Q_1} & E_{3Q_1} \\ & E_{2Q_2} & E_{3Q_2} \\ & & E_{3Q_3} \end{pmatrix}; \quad T_1 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ N_{2Q_1}^{(1)} & -1 & \\ N_{3Q_1}^{(2)} & N_{3Q_2}^{(2)} & -1 \end{pmatrix}. \qquad (68)$$

Тоді вагові коефіцієнти визначають із добутку матриць

$$Q = -(T_2 T_1) \qquad (69)$$

або

$$Q_{11} = -(E_{1Q_1} N_{1Q_1} + E_{2Q_1} N_{2Q_1}^{(1)} + E_{3Q_1} N_{3Q_1}^{(2)});$$

$$Q_{12} = -(E_{1Q_1} N_{1Q_2} + E_{2Q_1} N_{2Q_2}^{(1)} + E_{3Q_1} N_{3Q_2}^{(2)})$$ і т.д.

Значення елементів E_{iQ} і N_{iQ} виберемо з таблиці 10, а наступні обчислення вагових коефіцієнтів виконаємо в табл.11.

Таблиця 11

Обчислення вагових коефіцієнтів за способом діагоналей

	Q_1	Q_2	Q_3
N_1 E_1	-1 +0,365	-	-
$N_2^{(1)}$ E_2	-0,292 +0,101	-1 +0,348	-
$N_3^{(2)}$ E_2	-0,507 +0,205	-0,488 +0,197	-1 +0,405
Q_{1i}	+0,498	+0,201	+0,205
Q_{2i}	+0,201	+0,441	+0,197
Q_{3i}	+0,205	+0,197	+0,405

Так, Q_{11} = -[0,365 ·(-1) + 0,101· (-0,292) + 0,205·(-0,507)] = 0,498;
Q_{22} = -[0·0+0,348 ·(-1) + 0,197· (-0,488)] = +0,441 і т.д.

Обчислені вагові коефіцієнти (67) дорівнюють ваговим коефіцієнтам, що обчислені за способом діагоналей (табл.11).

4.8.2. Обчислення вагових коефіцієнтів за способом Ганзена

Вагові коефіцієнти можна отримати без додаткових граф Q_i, використовуючи елементи N і E табл.10.

Спочатку обчислимо ваговий квадратичний коефіцієнт $Q_{33} = 1/N_{33}^{(2)} = 1/2{,}472 = 0{,}405.$ Потім знайдемо $Q_{32} = E_{23}Q_{33} = 0{,}4875 \cdot 0{,}405 = +0{,}197$ і $E_{31} = E_{12}Q_{32} + E_{13}Q_{33} =$ = 0,292 ·0,197 + 0,365· 0,405 = + 0,205.

Проконтролюємо обчислення за формулою $N_{31}Q_{31} +$ $+ N_{32}Q_{32} + N_{33}Q_{33} = 1;$ (-1,0) · 0,205 + (-1,11) · 0,197 + (3,520)× × 0,405 = +1,002. Оскільки Q_{32} = Q_{23}, то $Q_{22} = E_{23}Q_{23} + 1/N_{22}^{(1)} =$ = (+0,4875) ·0,197 + 1/2,876 = 0,443 (раніше одержимо Q_{23} = 0,441);
$Q_{21} = E_{12}Q_{22} + E_{13}Q_{23} = 0{,}292 \cdot$ 0,443 + 0,365· 0,197 = 0,201.

Контроль: $N_{21}Q_{21} + N_{22}Q_{22} + N_{23}Q_{23} = 1$; (-0,8) · 0,201 + + 3,11· 0,443 + (-1,11) · 0,197 = 0,999. Оскільки $Q_{21} = Q_{12}$ і $Q_{31} = Q_{13}$, то $Q_{11} = E_{12}Q_{12} + E_{13}Q_{13} + 1/N_{11} = 0{,}292 \cdot 0{,}201 +$ $+ \ 0{,}365 \cdot 0{,}205 + 1/2{,}74 = 0{,}498.$

Контроль: $N_{11}Q_{11} + N_{12}Q_{12} + N_{13}Q_{13} = 1$ або

2,74 · 0,498 + (-0,8) · 0,201 + (-1,0) · 0,205 = 1.

Здобуті значення вагових коефіцієнтів за способом Ганзена дорівнюють значенням, одержаним раніше, що свідчить про правильність обчислень.

Матриця вагових коефіцієнтів використовується для оцінки точності параметрів і аналізу одержаних результатів. За значеннями квадратичних вагових коефіцієнтів Q_{ii} вираховують середні квадратичні похибки параметрів t_i. Інші коефіцієнти Q_{ij} вказують на залежність вирівняних невідомих t_i і t_J, яка виражається коефіцієнтом кореляції.

Важливою особливістю способа Ганзена є те, що останній перетворений коефіцієнт $N_{kk}^{(k-1)}$ дорівнює вазі k-го невідомого P_k, тобто

$$P_{tk} = N_{kk}^{(k-1)}.$$

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}. \qquad (70)$$

Наприклад:

$$r_{12} = \frac{0{,}201}{\sqrt{0{,}498 \cdot 0{,}441}} = 0{,}43; \quad r_{13} = 0{,}46; \quad r_{13} = 0{,}47.$$

4.8.3. Ваги двох останніх невідомих в способі Енке

Вага останнього невідомого дорівнює коефіцієнту при цьому невідомому в останньому перетвореному рівнянні:

$$P_{t_3} = N_{33}^{(2)}. \qquad (71)$$

По рядку 10 в графі 3 знаходимо $P_{t_3} = 2{,}472.$

В способі Енке вага передостаннього невідомого визначається за формулою

$$P_{t_2} = \frac{N_{22}^{(1)}}{N_{33}^{(1)}} P_{t_3}. \tag{72}$$

При цьому $N_{33}^{(1)} = N_{33} - \dfrac{N_{13}N_{13}}{N_{11}}$. Величини коефіцієнтів знаходимо в табл.10. Якщо $N_{22}^{(1)} = 2{,}88$ і $N_{33} = +3{,}52;$ $N_{13} = -1{,}00$ і $N_{11} = 2{,}74,$ то $N_{33}^{(1)} = 3{,}52 - \dfrac{(-1)\cdot(-1)}{2{,}74} = 3{,}16$, а

$$P_{t_2} = \frac{2{,}88}{3{,}16} 2{,}47 = 2{,}25.$$

Одержані результати співпадають із значеннями ваги, обчисленими раніше. Так, $P_{t_3} = 1/Q_{33} = 1/0{,}405 = 2{,}47;$ $P_{t_2} = 1/Q_{22} = 1/0{,}441 = 2{,}26.$

4.9. Обчислення оберненої ваги функції

Обернена вага вирівняного перевищення h_5 обчислена безпосередньо в схемі розв'язання нормальних рівнянь у додатковій графі F (див. табл. 10, графа 12) за допомогою коефіцієнтів вагової функції f_i , взятих із зворотним знаком. Обчислення до 11 виконані за класичною схемою Гаусса. Обернена вага обчислена за формулою

$$-\frac{1}{P_F} = E_{1F} N_{1F} + E_{2F} N_{2F}^{(1)} + E_{3F} N_{3F}^{(2)}, \tag{73}$$

або - $-\dfrac{1}{P_F} = 0 \cdot 0 + 0{,}347 \cdot (-1) + (-0{,}2073) \cdot 0{,}5125 = -0{,}454$.

Обчислення оберненої ваги функції проконтрольовано в графі 13. При цьому

$$-\frac{1}{P_F} = E_{1F} N_{1S''} + E_{2F} N_{2S''}^{(1)} + E_{3F} N_{3S''}^{(2)} = \tag{74}$$

$$= 0\cdot(+0{,}940) + 0{,}3477\cdot 2{,}475 + (-0{,}2073) \cdot 1{,}960 = -0{,}455.$$

Обернена вага функції обчислюється і за допомогою вагових коефіцієнтів за формулою

$$\frac{1}{P_F} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + f_3^2 Q_{33} + 2(f_1 f_2 Q_{12} + f_1 f_3 Q_{13} + f_2 f_3 Q_{23}). \qquad (75)$$

Оскільки $f_1 = 0$; $f_2 = +1$; $f_3 = -1$, формула (75) набуває вигляду

$$\frac{1}{P_F} = Q_{22} + Q_{23} - 2 f_2 f_3 Q_{23} = 0{,}441 + 0{,}405 - 2 \cdot 0{,}197 - 0{,}452.$$

При відомих коефіцієнтах матриці Q обернену вагу функції обчислюють за формулою

$$\frac{1}{P_F = fQf^T}. \qquad (76)$$

Тоді

$$\frac{1}{P_F} = (0\ \ 1\ \ \text{-}1)\begin{pmatrix} +0{,}498+ & 0{,}201+ & 0{,}205 \\ +0{,}201+ & 0{,}441+ & 0{,}197 \\ +0{,}205+ & 0{,}197+ & 0{,}405 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0{,}452.$$

4.10. Обчислення поправок до результатів вимірів

За одержаними в табл.9 значеннями $\tau_1 = -3{,}353$; $\tau_2 = +0{,}434$ і $\tau_3 = +1{,}866$ [формула (59)] обчислюють поправки v_i і записують у графу 8. Для контролю обчислюють [plv] у графі 9. При цьому [plv]= [pv^2]; 0 + 27,018 + 0 + 0 + +11,366 – 1,10 = 37,274.

Цю суму порівнюють з [pv^2] = 37,272, одержаною в табл..10, що свідчить про правильність обчислення поправок v_i.

4.11. Обчислення вирівняних значень параметрів (висот вузлових точок)

$t_1 = H_1 = t_1^\circ + v_1 =$ 44,493 м – 3,4 мм = 44,4896 м;

$t_2 = H_2 = t_2^\circ + v_2 =$ 47,666 м + 0,4 мм = 47,6664 м;

$t_3 = H_3 = t_3^\circ + v_3 =$ 42,058 м + 1,9 мм = 42,0599 м.

4.12. Обчислення вирівняних значень виміряних величин (перевищень)

Вирівняні перевищення і остаточний контроль вирівнювання виконані в табл.12.

Таблиця 12

Вирівняні перевищення

Номер ходу	Виміряна h, м	v_i, мм	Виміряна h, м	Виміряні зв'язки	Контроль h
1	+2,356	-3,4	+2,3526	t_1 - H_A	+2,3526
2	+3,181	-4,2	+3,1768	t_2 - t_1	+3,1768
3	-0,806	-0,4	-0,8064	H_B - t_2	-0,8064
4	-4,802	+1,9	-4,8001	$t_3 - H_B$	-4,8001
5	+5,604	+2,6	+5,6066	$t_2 - t_3$	+5,6066
6	+2,430	-0,2	+2,4298	$t_1 - t_3$	+2,4298

4.13. Оцінка точності

1. Середня квадратична похибка одиниці ваги (перевищення по ходу 10 км)

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{37,27}{3}} = 3,5\text{км.}$$

Похибка самої похибки одиниці ваги

$$m_\mu = \mu \big/ \sqrt{2(n-k)} = 25 \big/ \sqrt{6} = 1,4 \text{ мм.}$$

2. Середня квадратична похибка на 1 км ходу

$$m_{1\text{км}} = \mu \big/ \sqrt{C} = 3,5 \big/ \sqrt{10} = 1,1 \text{ мм.}$$

3. Середні квадратичні похибки вирівняних значень висот (позначок) вузлових реперів (параметрів) і їх точність

$$m_{t_1} = \mu\sqrt{Q_{11}} = 3,5\sqrt{0,498} = 2,5 \text{ мм;} \qquad m_{m_{t_1}} = m_\mu\sqrt{Q_{11}} = 1,0 \text{ мм;}$$

$$m_{t_2} = \mu\sqrt{Q_{22}} = 3,5\sqrt{0,441} = 2,3 \text{ мм;} \qquad m_{m_{t_2}} = m_\mu\sqrt{Q_{22}} = 0,9 \text{ мм;}$$

$$m_{t_3} = \mu\sqrt{Q_{33}} = 3,5\sqrt{0,405} = 2,2 \text{ мм;} \qquad m_{m_{t_3}} = m_\mu\sqrt{Q_{33}} = 0,9 \text{ мм.}$$

4. Середня квадратична похибка функції вирівняного перевищення h_5

$$m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}} = 3{,}5\sqrt{0{,}454} = 2{,}4 \text{ мм};$$

$$m_{m_F} = m_\mu\sqrt{\frac{1}{P_F}} = 0{,}9 \text{ мм}.$$

Завдання до задачі 7. Виконати вирівнювання нівелірної мережі (див.рис.8) за умовою задачі . Одні з указаних значень L і h по ходу змінюються згідно з даними табл.13

Таблиця 13

Варіанти завдань

Номер ходу	Інтервал варіантів				
	L, км h, мм	$1 \le N \le 10$	$10 \le N \le 20$	$21 \le N \le 40$	$41 \le N \le 90$
1	2	3	4	5	6
1	L h	+ N + N			
2	L h		+0,5 N -0,5 N		+0,1 N -0,1 N
3	L h			+0,2 N +0,2 N	
4	L h				+0,1 N +0,1 N
5	L h			+0,2 N -0,2 N	
6	L h	+ N + N	+0,5 N +0,5 N		

Наприклад, при N = 35 змінюються довжина і перевищення третього й п’ятого ходів:

L_3 = 8,3 + 0,2·35 = 15,3 км; h_3 = -0,806 + 0,2·35 = 0,799 мм;

L_5 = 9,0 + 0,2 N = 16 км; h_5 = +5604 – 0,2 N = +5597 мм.

5. РОЗВЯЗАННЯ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБАМИ КВАДРАТИЧНОГО КОРЕНЯ І ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ

Задача 8. Розв'язати нормальні рівняння із задачі 7 за способом квадратичних коренів з одночасним визначенням вагових коефіцієнтів і оберненбої ваги функції.

Розв'язання. Уявимо нормальне рівняння і вагову функцію у вигляді табл.14. В ній обчислимо загальні суми по рядках. Обчислення виконують з застосуванням мікрокалькуляторів.

Таблиця 14

Таблиця коефіцієнтів нормальних рівнянь

Рівнян-ня	τ_1	τ_2	τ_3	L	Q_1	Q_2	Q_3	F	$\sum$
N_{1j}	+2,74	-0,80	-1,00	+11,40	-1				+11,34
N_{2j}	-	+3,11	-1,11	-1,96		-1		-1	-2,76
N_{3j}	-	-	+3,52	-9,44			-1	+1	-8,03
N_{4j}	-	-	-	+93,96					+93,96

Розв'язання нормальних рівнянь наведено в табл.15. Для зручності обчислень знаки всіх елементів N_{ij}, крім квадратичних N_{ii}, замінимо на зворотні.

Символами K_{ij} краков'янові рядки. Їх обчислюють за формулами

$K_{11} = \sqrt{N_{11}} = \sqrt{2{,}74} = 1{,}655;$

$K_{12} = -N_{12}/K_{11} = +0{,}80/1{,}655 = +0{,}483;$

$K_{13} = -N_{13}/K_{11} = +1{,}00/1{,}655 = +0{,}604;$ $K_{14} = K_{1L} = -L_1/K_{11} = -6{,}888;$

$K_{15} = +0{,}604$ і т.д.; $K_{18} = 0;$

$K_{1S} = -S_1/K_{11} = -6{,}852.$

Контроль: $-K_{11} + K_{12} + \ldots + K_{18} = -S_1 / K_{11} \cdot (-6{,}852) = -6{,}852.$

Слід пам'ятати, що при контролі квадратичний коефіцієнт K_{ii} у цьому і наступних краков'яних рядках береться із знаком «-».

Елементи другого краков'яного рядка визначають за формулами

$K_{22} = \sqrt{N_{22}^{(1)}};$

$N_{22}^{(1)} = N_{22} - N_{22} - K_{12}^{(2)} = 3{,}110 \cdot (0{,}483)^2 = 2{,}877$; $K_{22} = 1{,}696$;

$K_{23} = (-N_{23} + K_{12}K_{13}) / K_{22} = [+1{,}11 + (0{,}483) \cdot 0{,}604] / 1{,}696 =$
$= 0{,}826$;

$K_{24} = K_{2L} = (-L_2 + K_{12}K_{14}) / K_{22} = [+1{,}96 + 0{,}483 \cdot (-6{,}888] / 1{,}696 ==$ -
0,806;

$K_{25} = (0 + K_{12}K_{15}) / K_{22} = (0 + 0{,}483 \cdot 0{,}604) / 1{,}696 = +0{,}172$;

$K_{26} = (1 + K_{12}K_{16}) / K_{22} = (1 + 0{,}483 \cdot 0) / 1{,}696 = +0{,}590$;

$K_{27} = (0 + K_{12}K_{17}) / K_{22} = 0$;

$K_{28} = (0 + K_{12}K_{18}) / K_{22} = 0{,}590$;

$K_{29} = (-S_2 + K_{12}K_{19}) / K_{22} = [2{,}76 + 0{,}483 \cdot (-6{,}852)] / 1{,}696 = -0{,}324$.

Контроль: $-K_{22} + K_{23} + \ldots + K_{28} = K_{29}$;

-1,696 + 0,826 – 0,806 + 0,172 + 0,590 + 0,590 = -324; K_{29} = -0,324

Елементи третього краков'яного рядка розраховують за формулами

$K_{33} = \sqrt{N_{33}^{(2)}} = \sqrt{N_{33} - K_{13}^{(2)} - K_{23}^{(2)}} = \sqrt{3{,}52 - 0{,}604^2 - 0{,}826^2} = 1{,}572$;

$K_{34} = -L_3^{(2)} / K_{33} = (-L_3 + K_{13}K_{14} + K_{23}K_{24})K_{33} = [9{,}44 + 0{,}604(-6{,}888) +$
$+ 0{,}826(-0{,}806) / 1{,}572 = +2{,}936$;

$K_{35} = (0 + K_{13}K_{15} + K_{23}K_{25})K_{33} = +0{,}322$;

$K_{36} = (0 + K_{13}K_{16} + K_{23}K_{26})K_{33} = +0{,}310$;

$K_{37} = (1 + K_{13}K_{17} + K_{23}K_{27})K_{33} = +0{,}636$;

$K_{38} = (-F_3 + K_{13}K_{18} + K_{23}K_{28})K_{33} = -0{,}326$;

$K_{39} = (-S_3^{(2)}) / K_{33} = (-S_3 + K_{13}K_{19} + K_{23}K_{29})K_{33} = +2{,}305$.

Таблиця 15

Розв'язання нормальних рівнянь способом квадратного кореня

Дія	τ_1	τ_2	τ_3	L	Q_1	Q_2	Q_3	F	S	Контроль
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N_{1i}	N_{11} +2,740	$-N_{12}$ +0,800	$-N_{13}$ +1,000	$-L_1$ -11,400	+1	0	0	$-f_1$ 0	$-S_1$ -11,340	
N_{2i}		N_{22} +3,110	$-N_{23}$ +1,110	$-L_2$ +1,960	0	+1	0	$-f_2$ +1	$-S_2$ +2,760	
N_{3i}			N_{33} +3,520	$-L_3$ +9,440	0	0	+1	$-f_3$ -1	$-S_3$ +8,030	
N_{4i}				$[pll]$ +93,960	0	0	0	0	$-S_4$ -93,960	
K_{1i}	$K_{11}=\sqrt{N_{11}}$ +1,655	$-N_{12}/K_{11}$ +0,483	$-N_{13}/K_{14}$ +0,604	L_1/K_{11} -6,888	K_{15} +0,604	K_{16} 0	K_{17} 0	$-f_1/K_{11}$ 0	$-S_1/K_{11}$ -6,852	$-K_{11}+\ldots+K_{18}$ -6,852
K_{2i}		$K_{22}=\sqrt{N_{22}^{(1)}}$ +1,696	$-N_{22}^{(1)}/K_{22}$ +0,826	$-L_2/K_{22}$ -0,806	K_{25} +0,172	K_{26} +0.590	K_{27} 0	$-f_2^{(1)}/K_{22}$ +0.590	$-S_2^{(1)}/K_{22}$ -0,324	$-K_{22}+\ldots+K_{28}$ -0,324
K_{3i}			$K_{33}=\sqrt{N_{33}^{(2)}}$ +1,572	$-L_3^{(2)}/K_{33}$ +2,936	K_{35} +0,322	K_{36} +0,310	K_{37} +0,636	$-f_3^{(2)}/K_{33}$ -0,326	$-S_3^{(2)}/K_{33}$ +2,305	$-K_{33}+\ldots+K_{38}$ +2,306

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_{4i}^{(3)}$				$N_{44}^{(3)}$ +37,246	$N_{45}^{(3)}$ -3,354	$N_{46}^{(3)}$ +0,434	$N_{47}^{(3)}$ +1,867	$N_{48}^{(3)}$ -1,433	$N_{49}^{(3)}$ -39,735	$N_{44}^{(3)}$ +… + $N_{48}^{(3)}$ -39,732
невідомі	τ_1 -3,354	τ_2 +0,434	τ_3 +1,867	0,499 +0,201 +0,205	+0,201 0,444 +0,197	+0,205 +0,197 0,404	0,454 $1/P_F$			

Контроль: $-K_{33} + K_{34} + \ldots + K_{38} = K_{39}$;

-1,572 + 2,936 + 0,322 + 0,310 + 0,636 – 0,325 = -2,305; K_{39} = -2,306.

В рядку $N_{4j}^{(3)}$ знаходимо суму $[pv^2] = N_{44}^{(3)}$; $N_{44}^{(3)} = [pll] -$

$$-K_{14}^{(2)} - K_{24}^{(2)} - K_{34}^{(2)} = 93{,}96 - 6{,}888^2 - 0{,}806^2 - 2{,}936^2 = 37{,}246.$$

Із задачі 7 у схемі розв’язання нормальних рівнянь $[pv^2]$ = 37,272. Одержана різниця знаходиться в межах точності обчислення поправок і приймається допустимою.

Для контролю суми $[pv^2]$ знаходимо інші елементи цього рядка:

$$N_{45}^{(3)} = 0 + K_{14}K_{15} + K_{24}K_{25} + K_{34}K_{35} = -3{,}354;$$

$$N_{46}^{(3)} = 0 + K_{14}K_{16} + K_{24}K_{26} + K_{34}K_{36} = +0{,}434;$$

$$N_{47}^{(3)} = 0 + K_{14}K_{17} + K_{24}K_{27} + K_{34}K_{37} = +1{,}867;$$

$$N_{48}^{(3)} = 0 + K_{14}K_{18} + K_{24}K_{28} + K_{34}K_{38} = -1{,}433;$$

$$N_{49}^{(3)} = -\sum{}_4 + K_{14}K_{19} + K_{24}K_{29} + K_{34}K_{39} = -39{,}735.$$

Контроль:

$$-N_{44}^{(3)} + N_{45}^{(3)} + N_{46}^{(3)} + N_{47}^{(3)} + N_{48}^{(3)} = -39{,}732 \approx N_{49}^{(3)};$$

$$N_{49}^{(3)} = -39{,}735.$$

Шукані невідомі обчислюють за формулами

$$\tau_3 = -L_3^{(2)} \Big/ N_{33}^{(2)} = K_{34} \Big/ K_{33} = \frac{+2{,}936}{+1{,}572} = +1{,}867;$$

$$\tau_2 = \frac{K_{23}\tau_3 + K_{24}}{K_{22}} = \frac{0{,}826 \cdot 1{,}867 + (-0{,}806)}{1{,}696} = +0{,}434;$$

$$\tau_1 = \frac{K_{12}\tau_2 + K_{13}\tau_3 + K_{14}}{K_{11}} = -3{,}354.$$

Розв’язання нормальних рівнянь контролюють за сумарним рівнянням $\sum_1 \tau_1 + \sum_2 \tau_2 + \sum_3 \tau_3 + \sum_L = 0$, або

0,94 (-3,354) + 1,20·0,434 + 1,41·1,867 + 0 = 0.

Вагові коефіцієнти обчислюють способом діагоналей за формулами:

$$Q_{11} = \sum_{1}^{3} K_{i5}^2 = 0{,}604^2 + 0{,}172^2 + 0{,}322^2 = 0{,}499;$$

$$Q_{22} = \sum_{1}^{3} K_{i6}^2 = 0^2 + 0{,}590^2 + 0{,}310^2 = 0{,}444;$$

$$Q_{33} = \sum_{1}^{3} K_{i7}^2 = 0^2 + 0^2 + 0{,}636^2 = 0{,}404;$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{1}^{3} K_{i5} K_{i6} = 0{,}604 \cdot 0 + 0{,}172 \cdot 0{,}590 + 0{,}322 \cdot 0{,}310 = 0{,}201;$$

$$Q_{13} = Q_{31} = \sum_{1}^{3} K_{i5} K_{i7} = 0{,}604 \cdot 0 + 0{,}172 \cdot 0 + 0{,}322 \cdot 0{,}636 = 0{,}205;$$

$$Q_{23} = Q_{32} = \sum_{1}^{3} K_{i6} K_{i7} = 0 \cdot 0 + 0{,}590 \cdot 0 + 0{,}310 \cdot 0{,}636 = 0{,}197.$$

Для контролю обчислюємо допоміжні величини:

$$Q_{t_1} = Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} = 0{,}905;$$

$$Q_{t_2} = Q_{21} + Q_{22} + Q_{23} = 0{,}842;$$

$$Q_{t_3} = Q_{31} + Q_{32} + Q_{33} = 0{,}806.$$

Тоді $\sum_1 Q_{t_1} + \sum_2 Q_{t_2} + \sum_3 Q_{t_3} = K,$ або

$$0{,}94 \cdot 0{,}905 + 1{,}20 \cdot 0{,}842 + 1{,}41 \cdot 0{,}806 = 2{,}997 \approx 3.$$

Обернену вагу функції $1/P_F$ визначаємо формулою

$$1/P_F = \sum_{1}^{3} K_{iF}^2 = 0^2 + 0{,}500^2 + (-0326)^2 = 0{,}454.$$

Як видно з одержаних результатів, шукані величини τ_i, Q_i і $1/P_F$ практично однакові в межах точності обчислень з отриманими раніше при розв’язанні нормальних рівнянь способом Гаусса.

Завдання до задачі 8. Розв’язати систему рівнянь із задачі 7 способом квадратичних коренів з одночасним визначенням вагових коефіцієнтів і оберненої ваги функції.

[1, с.235-239; 2, с.215-220; 6, с. 7, с.263-288].

Задача 9. Розв'язати нормальні рівняння, одержані з задачі 7, способом простої ітерації (наближень).

Розв'язання. Напишемо вихідну систему нормальних рівнянь

$$\begin{pmatrix} +2{,}74 & -0{,}80 & -1{,}00 \\ -0{,}80 & +3{,}11 & -1{,}11 \\ -1{,}00 & -1{,}11 & +3{,}52 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +11{,}40 \\ -1{,}96 \\ -9{,}44 \end{pmatrix} = 0.$$

У способі простої ітерації значення невідомих визначаються в процесі декількох наближень за ітераційним рівнянням:

$$\tau_1 = -N_{12}/N_{11}\,\tau_2 - N_{13}/N_{11}\tau_3 - L_1/N_{11};$$

$$\tau_2 = -N_{12}/N_{22}\,\tau_1 - N_{23}/N_{22}\tau_3 - L_2/N_{22};$$

$$\tau_3 = -N_{13}/N_{33}\,\tau_1 - N_{32}/N_{33}\,\tau_2 - L_3/N_{33}.$$

У даному прикладі

$$\tau_1 = +0{,}292\tau_2 + 0{,}365\tau_3 - 4{,}161;$$

$$\tau_2 = +0{,}257\tau_1 + 0{,}357\tau_3 + 0{,}630;$$

$$\tau_1 = +0{,}284\tau_1 + 0{,}315\tau_2 + 2{,}682.$$

Випишемо коефіцієнти і вільні члени правої частини ітераційних рівнянь у табл.16.

Таблиця 16

Розв'язання нормальних рівнянь способом прямої ітерації

E	E_{i1}^0	E_{i2}^0	E_{i3}^0	τ_1	Н а б л и ж е н н я						
					1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E_{i1}^0	-	+0,257	+0,284	τ_1	-4,16	-3,53	-3,46	-3,40	-3,37	-3,36	-3,35
E_{i2}^0	+0,292	-	+0,315	τ_2	-0,44	+0,21	+0,36	+0,41	+0,42	+0,43	+0,43
E_{i3}^0	+0,365	+0,357	-	τ_3	+1,36	+1,75	+1,81	+1,84	+1,86	+1,87	+1,87
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E_{Li}	-4,161	+0,630	+2,682								
$\sum E_i$	-3,504	+1,244	+3,281								
- $\sum/N_{ii}$	-4,504	+0,244	+2,281								

Підсумуємо їх по стовпцях:

$\sum E_1$ = +0,292 + 0,365 – 4,161 = – 3,504;

$\sum E_2$ = +0,257 + 0,357 + 0,630 = +1,244;

$\sum E_3$ = +0,284 + 0,315 + 2,682 = +3,281.

Контроль виконаємо за формулою $\sum E_i - 1 = \Sigma_i / N_{ii}$.

Як видно з табл.16, контроль виконується.

У першому наближенні приймаємо значення $\tau_2 = 0$; $\tau_3 = 0$. Тоді:

$$\tau_1^{(1)} = +2{,}292 \cdot 0 + 0{,}365 \cdot 0 - 4{,}16 = -4{,}16.$$

Випишемо це значення навпроти $\tau_1^{(1)}$ у графі 5. Прийнявши його за наближене з використанням графи 2, обчислимо невідоме:

$$\tau_2^{(1)} = +0{,}257(-4{,}16) + 0{,}357 \cdot 0 + 0{,}630 = -0{,}44.$$

По графі 3 за допомогою наближених значеннях $\tau_1^{(1)}$ і $\tau_1^{(2)}$

$$\tau_3^{(1)} = +0{,}284(-4{,}16) + 0{,}315(-0{,}44) + 2{,}68 = +1{,}36.$$

Значення $\tau_2^{(1)}$ і $\tau_3^{(1)}$ випишемо в графу 5. У другому наближенні для обчислення $\tau_1^{(2)}$ приймемо наближені значення $\tau_2^{(1)}$ і $\tau_3^{(1)}$ і за ітераційним рівнянням (графа 1) знайдемо

$\tau_2^{(1)}$ = +0,292 (-0,44) + 0,366(+1,36) – 4,16 = -3,53.

Аналогічно прийнявши $\tau_1^{(2)}$= -3,53 і $\tau_3^{(1)}$= +1,36, обчислимо

$\tau_2^{(2)}$ = +0,257 (-3,53) + 0,357(+1,36) + 0,63 = +0,21; тоді

$\tau_3^{(2)}$ = +0,284 (-3,53) + 0,315 (+0,21) + 2,68 = +1,75.

У третьому наближенні одержимо

$\tau_1^{(3)}$ = +0,292(+0,21) +0,365 (+1,75) – 4?161 = -3,46;

$\tau_2^{(3)}$ = +0,257(-3,46) + 0,357(+1,75) + 0,63 = +0,36;

$\tau_3^{(3)}$ = +0,284(-3,46) + 0,315(+0,36) + 2,68 = +1,81.

Наступні наближення виконуються аналогічно доти, поки значення невідомих в суміжних наближеннях будуть повторюватися в межах точності обчислень.

У табл.16 обчислення закінчуються по сьомому наближенні, оскільки значення τ_2 і τ_3 повторюються, а значення τ_1 знаходяться в межах точності обчислень.

Для контролю розв'язання нормальних рівнянь необхідно підставити значення τ_i у кожне з рівнянь. Проте не будемо цього робити, оскільки ці значення одержані двічі – в задачах 7 і 8.

Знаходимо суму $[pv^2]$ за формулою

$$[pv^2] = L_1\tau_1 + L_2\tau_2 + L_3\tau_3 + [pll], \qquad (78)$$

або

$$[pv^2] = +11{,}40(-3{,}35) - 1{,}96(+0{,}43) - 9m44(+1{,}87) + 93{,}96 = 37{,}38.$$

У задачі 7 $[pv^2]$ = 37,27. Одержана різниця знаходиться в межах точності обчислень і не вплине на оцінку точності.

Звичайно, при розв'язанні нормальних рівнянь за способом ітерацій контроль $[pv^2]$ здійснюють після обчислення поправок за формулою $[pv^2]$ = $p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + ... + p_nv_n^2$. Поправки обчислюють за формулою (2).

Завдання до задачі 9. Розв'язати нормальні рівняння із завдання 6 способом простої ітерації.

[1, с.239-241; 2, с.220-224; 3, с.229-234; 7, с. 266-270]

6. ВИРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ СПОСОБОМ ВУЗЛІВ ПОПОВА

Спосіб вузлів застосовується при вирівнюванні мереж нівелювання і роздільному вирівнюванні кутів і приростків координат у полігонометричних мережах параметричним способом.

Сутність способу полягає в обчисленні коефіцієнтів нормальних рівнянь за кресленням мережі.

Задача 10. Виконати вирівнювання нівелірної мережі (рис. Д. 9) способом вузлів Попова з оцінкою точності вирівняних значень висот вузлових точок і перевищень по ходах. Вихідні дані наведені в табл.17.

Таблиця 17

Вихідні дані

Номер марки	H, м	Номер ходу	К-сть штативів	h, м	Номер ходу	К-сть штативів	h, м
A	106,840	1	20	+3,144	5	20	-2,048
B	112,16	2	25	-0,951	6	25	-1,332
C	108,030	3	66	+4,317	7	50	-2,279
-	-	4	40	-0,177			

Розв'язання. За невідомі параметри приймемо висоти (позначки) вузлових реперів $Rp.1,\ Rp.2,\ Rp.3;\ t_1 = H_1;\ \ t_2 = H_2;\ t_3 = H_3$.

Наближення значення (висоти) параметрів обчислимо через перевищення ходів $h_1,\ h_3$ і h_7 від вихідних марок.

$$t_1^0 = H_A + h_1 = 105{,}840 + 3{,}144 = 108{,}984 \text{ м};$$

$$t_2^0 = H_C - h_7 = 108{,}030 - (-2{,}279) = 110{,}309 \text{ м};$$

$$t_3^0 = H_C + h_3 = 108{,}030 + 4{,}317 = 112{,}347 \text{ м}.$$

Складемо параметричні рівняння зв'язку:

1. $\bar{h}_1 = t_1 - H_A;$ 2. $\bar{h}_2 = H_C - t_1;$

3. $\bar{h}_3 = t_3 - H_C;$ 4. $\bar{h}_4 = H_B - t_3;$

5. $\bar{h}_5 = t_2 - t_3;$ 6. $\bar{h}_6 = t_1 - t_2;$

7. $\bar{h}_7 = H_C - t_2$.

Обчислимо вільні члени параметричних рівнянь поправок. Для цього достатньо в рівняннях зв'язку вирівняні значення $\bar{h}_i$ замінити на виміряні h_i, а параметри t_i – на їх наближені значення.

Тоді

$$l_1 = t_1^0 - H_A - h_1 = 108{,}984 - 105{,}840 - 3{,}144 = 0 \text{ мм},$$

$$l_2 = H_C - t_1^0 - h_2 = 108{,}030 - 108{,}984 - (-0{,}961) = -3 \text{мм},$$

$$l_3 = t_3^0 - H_C - h_3 = 112{,}347 - 108{,}030 - 4{,}317 = 0 \text{мм},$$

$$l_4 = H_B - t_3^0 - h_4 = -5 \text{ мм},$$

$$l_5 = t_2^0 - t_3^0 - h_5 = +10 \text{мм},$$

$$l_6 = t_1^0 - t_2^0 - h_6 = +7 \text{мм},$$

$$l_7 = H_C - t_2^0 - h_7 = 0 \text{мм}.$$

Випишемо значення l_i на схемі ходів (див.рис.Д.9). За частковими похідними від вихідних рівнянь зв'язку вирахуємо коефіцієнти рівнянь поправок $a_{ij} = \left(\dfrac{\partial \bar{h}_i}{\partial t_j}\right)_0$.

Рівняння поправок набудуть вигляду:

1. $v_1 = \tau_1$
2. $v_2 = -\tau_1 \qquad\qquad\qquad -3$
3. $v_3 = \qquad\qquad \tau_3$
4. $\tau_4 = \qquad\qquad -\tau_3 \quad -5$
5. $\tau_5 = \qquad \tau_2 \quad -\tau_3 \quad +10$
6. $v_6 = \tau_1 \quad -\tau_2 \qquad\qquad +7$
7. $\tau_7 = \quad -\tau_2$

Визначимо вагу виміряних перевищень за формулою $P_i = \dfrac{c}{n_i} = \dfrac{20}{n_i}$. Тоді $P_1 = 1{,}0$; $P_2 = 0{,}8$; $P_3 = 0{,}3$; $P_4 = 0{,}5$; $P_5 = 1{,}0$; $P_6 = 0{,}8$ і $P_7 = 0{,}4$. Випишемо їх на схему нівелірних ходів (див. рис. Д.9).

Нормальних рівнянь буде три, оскільки $K = 3$. У способі вузлів Попова коефіцієнти нормальних рівнянь обчислюють безпосередньо за кресленням мережі.

1. Квадратичні коефіцієнти нормальних рівнянь у рядку дорівнюють сумі вагів ходів, що збігаються в вузлі з тим самим номером.

У прикладі, що розглядається, для першого вузла $(Rp.1)$ $N_{11} = P_1 + P_2 + P_6 = 1{,}0 + 0{,}8 + 0{,}8 = 2{,}6$. Тоді $N_{22} = P_5 + P_6 + P_7 = 1{,}0 + 0{,}8 + 0{,}4 = 2{,}2$; $N_{33} = P_3 + P_4 + P_5 = 0{,}3 + 0{,}5 + 1{,}0 = 1{,}8$.

2. Неквадратичні коефіцієнти N_{ij} дорівнюють від'ємній вазі значення ходу, що з'єднує вузол i з вузлом j. Якщо між вузлами i та j немає спільного ходу, коефіцієнт N_{ij} дорівнює нулю. У даному прикладі (див.рис.Д.9) одержимо $N_{12} = N_{21} = \quad = -0{,}8$; $N_{13} = N_{31} = 0$; $N_{23} = N_{32} = -1{,}0$.

3. Вільні члени нормальних рівнянь L_i дорівнюють сумі добутків $\pm[pll]$ ходів, які сходяться до вузла з номером j. Знак «+» ставиться, коли хід спрямований до вузлової точки, і «-», якщо напрямок ходу від вузлової точки. Тоді

$$L_1 = \sum P_i l_i = P_1 l_1 - P_2 l_2 + P_6 l_6 = 1 \cdot 0 - 0{,}8(-3) + 0{,}8 \cdot 7 = +8{,}0 \text{ мм},$$

$$L_2 = P_5 l_5 - P_6 l_6 - P_7 l_7 = 1 \cdot 10 - 0{,}8 \cdot 7 - 0{,}4 \cdot 0 = +4{,}4 \text{ мм},$$

$$L_3 = P_3 l_3 - P_4 l_4 - P_5 l_5 = 0{,}3 \cdot 0 - 0{,}5 \cdot (-5) - 1 \cdot 10 = -7{,}5 \text{ мм}.$$

Система нормальних рівнянь в матричному вигляді буде:

$$\begin{pmatrix} +2{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ -0{,}8 & +2{,}2 & -1{,}0 \\ 0 & -1{,}0 & +1{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +8{,}0 \\ +4{,}4 \\ -7{,}5 \end{pmatrix} = 0.$$

За формулами Кремера обчислимо поправки до невідомих параметрів:

$$\tau_1 = -\frac{|N_1|}{|N|} = -\frac{\begin{vmatrix} +8{,}0 & -8{,}0 & 0 \\ +4{,}4 & +2{,}2 & -1{,}0 \\ -7{,}5 & -1{,}0 & +1{,}8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} +2{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ -0{,}8 & +2{,}2 & -1{,}0 \\ 0 & -1{,}0 & +1{,}8 \end{vmatrix}} = \frac{24{,}02}{6{,}55} = -3{,}67 \text{ мм.}$$

Примітка. Для прикладу наведемо обчислення визначника вихідної матриці. За правилами матричного обчислення одержимо

$$|N| = +2{,}6(+1)\begin{vmatrix} +2{,}2 & -1{,}0 \\ -1{,}0 & +1{,}8 \end{vmatrix} - 0{,}8\cdot(-1)\begin{vmatrix} -0{,}8 & -1{,}0 \\ 0 & +1{,}8 \end{vmatrix} + 0(+1)\begin{vmatrix} -0{,}8 & +2{,}2 \\ 0 & -1{,}0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2{,}6\cdot(+3{,}96-1{,}0) + 0{,}8(-1{,}44+0) + 0(+0{,}8-0) = +6{,}55;$$

$$\tau_2 = -\frac{|N_2|}{|N|} = -\frac{\begin{vmatrix} +2{,}5 & +8{,}0 & 0 \\ -0{,}8 & +4{,}4 & -1{,}0 \\ 0 & -7{,}5 & +1{,}8 \end{vmatrix}}{6{,}55} = -\frac{12{,}61}{6{,}55} = -1{,}93 \text{ мм;}$$

$$\tau_3 = -\frac{|N_3|}{|N|} = -\frac{\begin{vmatrix} +2{,}6 & -0{,}8 & +8{,}0 \\ -0{,}8 & +2{,}2 & +4{,}4 \\ 0 & -1{,}0 & -7{,}7 \end{vmatrix}}{6{,}55} = -\frac{-20{,}26}{6{,}55} = +3{,}09 \text{ мм.}$$

Обчислені невідомі проконтролюємо підстановкою їх у нормальні рівняння:

$$+2{,}6\cdot(-3{,}67) - 0{,}8\cdot(-1{,}93) + 0\cdot(+3.09) + 0{,}8 = 0;$$

$$-0{,}8\cdot(-3{,}67) + 2{,}2\cdot(-1{,}93) - 1{,}0\cdot(+3.09) + 4{,}4 = 0;$$

$$0\cdot(-3{,}67) - 1{,}0\cdot(-1{,}93) + 1{,}8\cdot(+3.09) - 7{,}5 = 0.$$

Із рівнянь поправок (80) за одержаними значеннями τ_i отримаємо шукані поправки:

1. $v_1 = -3{,}7$ 2. $v_2 = -6{,}7$ 7. $v_7 = +1{,}9$

3. $v_1 = +3{,}1$ 4. $v_4 = -8{,}1$

5. $v_5 = +5{,}0$ 6. $v_6 = +5{,}2$

Обчислимо вирівняні значення параметрів (висот реперів $Rp.1$, $Rp.2$, $Rp.3$) і виміряних перевищень h_i, виконавши остаточний контроль за рівняннями зв'язку:

$H_1 = t_1^0 + \tau_1 = 108{,}984$ м – 3,7 мм = 108,9803 м,

$H_2 = t_2^0 + \tau_2 = 110{,}309$ м – 1, 9 мм = 110,3071 м,

$H_3 = t_3^0 + \tau_3 = 112{,}347$ м + 3,1 мм = 112,3501 м.

Отстаточний контроль вирівнювання виконано в табл..18

Таблиця 18

Вирівняні значення виміряних величин (перевищень)

Номер ходу	Виміряні h, м	Поправка v, мм	Вирівняні h, м	Рівняння	Контроль h, м
1	2	3	4	5	6
1	+3,144	-3,7	+3,1403	t_1 - H_A	+3,1403
2	-0,951	+0,7	-0,9503	H_C - t_1	-0,9503
3	+4,317	+3,1	+4,3201	$t_3 - H_C$	+4,3201
4	-0,177	-8,1	-0,1851	$H_B - t_3$	-0,1851
5	-2,048	+5,0	-2,0430	$t_2 - t_3$	-2,0430
6	-1,332	+5,2	-1,3268	$t_1 - t_2$	-1,3268
7	-2,279	+1,9	-2,2771	$H_C - t_2$	-2,2771

Обчислимо значення суми $[pv^2] = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \ldots + p_7v_7^2 = 97{,}83$.

Для контролю знаходимо

$$[pv^2] = p_1l_1v_1 + p_2l_2v_2 + \ldots + p_7l_7v_7 = 97{,}69.$$

Для оцінки точності вирівняних невідомих (параметрів) і функцій $F_1 = h_5$, $F_2 = h_6$ приймемо обернення вихідної матриці N, визначимо вагові коефіцієнти (матрицю $N^{-1} = Q$).

За допомогою вихідної матриці N складемо нову матрицю

$$N^* = [N_{ij}^*].$$

де $N_{ij}^* = (-1)^{i+j} \times N_{ij}$ - алгебраїчні доповнення; N_{ij} – мнор, або визначник матриці, що виникає при викреслені i рядка та j стовпця вихідної матриці N.

Якщо

$$N = \begin{pmatrix} +2,6 & -0,8 & 0 \\ -0,8 & +2,2 & -1,0 \\ 0 & -1,0 & +1,8 \end{pmatrix}, \text{ то } N_{11}^* = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} +2,2 & -1,0 \\ -1,0 & +1,8 \end{vmatrix} = +2,96;$$

$$N_{12}^* = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -0,8 & -1,0 \\ 0 & +1,8 \end{vmatrix} = +1,44; \quad N_{13}^* = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -0,8 & +2,2 \\ 0 & -1,0 \end{vmatrix} = +0,8;$$

$$N_{21}^* = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -0,8 & 0 \\ -1,0 & +1,8 \end{vmatrix} = +1,44; \quad N_{22}^* = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} +2,6 & 0 \\ 0 & +1,8 \end{vmatrix} = +4,68;$$

$$N_{23}^* = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} +2,6 & -0,8 \\ 0 & -1,0 \end{vmatrix} = +2,6; \quad N_{31}^* = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -0,8 & 0 \\ +2,2 & -1,0 \end{vmatrix} = +0,8;$$

$$N_{32}^* = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} +2,6 & 0 \\ -0,8 & -1,0 \end{vmatrix} = +2,6; \quad N_{33}^* = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} +2,6 & -0,8 \\ -0,8 & +2,2 \end{vmatrix} = +5,08.$$

Тоді

$$N^* = \begin{pmatrix} +2,96 & +1,44 & +0,80 \\ +1,44 & +4,68 & +2,60 \\ +0,80 & +2,60 & +5,08 \end{pmatrix}.$$

Обернена вагова матриця визначається за формулою

$$Q = N^{-1} = \frac{1}{|N|} N^*.$$

Раніше був одержаний визначник вихідної матриці:

$$|N| = 6,55, \text{ а } \frac{1}{|N|} = 0,15.$$

Отже,

$$Q = 0,15 N^* \begin{pmatrix} 0,44 & 0,22 & 0,12 \\ 0,22 & 0,70 & 0,39 \\ 0,12 & 0,39 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Середня квадратична похибка одиниці ваги (на 20 штативів)

$$\mu_{20} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{97,8}{7-3}} = 4,9 \text{ мм}.$$

Тоді середня квадратична похибка виміру окремого перевищення на один штатив

$$\mu_1 = \mu_{20} \big/ \sqrt{C} = 4{,}9/20 = 1{,}1 \text{ мм.}$$

Середні квадратичні похибки висот вузлових реперів

$$m_{Rp1} = \mu\sqrt{Q_{11}} = 4{,}9\sqrt{0{,}44} = 3{,}2 \text{ мм;}$$

$$m_{Rp2} = \mu\sqrt{Q_{22}} = 4{,}9\sqrt{0{,}70} = 4{,}1 \text{ мм;}$$

$$m_{Rp3} = \mu\sqrt{Q_{33}} = 4{,}9\sqrt{0{,}76} = 4{,}3 \text{ мм.}$$

Для оцінки точності вирівняних перевищень h_5 та h_6 складемо вагові функції $F_1 = h_5$ і $F_2 = h_6$. Визначимо їх через параметри: $F_1 = t_2 - t_3$ і $F_2 = t_1 - t_2$. Візьмемо похідні від цих функцій: $f_{ij} = (\partial F_i / \partial t_j)$; $f_{11} = 0$; $f_{12} = +1$; $f_{13} = -1$; $f_{21} = +1$; $f_{22} = -1$; $f_{23} = 0$.

Для сукупності двох функцій отримаємо матрицю обернених ваг:

$$Q_F = fQf^T = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \\ f_{13} & f_{23} \end{pmatrix}; \qquad (81)$$

$$Q_F = \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}22 & 0{,}12 \\ 0{,}22 & 0{,}70 & 0{,}39 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}76 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}68 & -0{,}21 \\ -0{,}21 & 0{,}70 \end{pmatrix}.$$

Тоді середні квадратичні похибки вирівняних перевищень

$$m_{h_6} = \mu\sqrt{Q_{F_1}} = 4{,}9\sqrt{0{,}68} = 4{,}0 \text{ мм;} \quad m_{h_6} = \mu\sqrt{Q_{F_2}} = 4{,}9\sqrt{0{,}68} = 4{,}1 \text{ мм.}$$

Коефіцієнти кореляції між вузловими реперами

$$r_{12} = \frac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}}\sqrt{Q_{22}}} = \frac{0{,}22}{\sqrt{0{,}44}\sqrt{0{,}70}} = 0{,}40; \quad r_{13} = \frac{0{,}12}{\sqrt{0{,}44}\sqrt{0{,}76}} = 0{,}21;$$

$$r_{23} = 0{,}39/\sqrt{0{,}70}\sqrt{0{,}76} = 0{,}53; \quad r_{h_5h_6} = -0{,}21/\sqrt{0{,}68}\sqrt{0{,}70} = -0{,}30.$$

Завдання до задачі 10. Розвязати задачу вирівнювання нівелірних ходів (див. рис. Д.9), збільшивши кількість штативів на N (номер варіанта) у всіх ходах. Вагу обчислюють з точністю до 0,01. Обчислені коефіцієнти N і вільні члени L нормальних рівнянь можна округляти до 0,1.

[2, с.206, 145, 146, 164-167; 7, с.360-364].

Контрольні запитання і завдання

1. Які виміряні величини називають необхідними?
2. Що називається вирівнюванням? Мета вирівнювання
3. На якому принципі базується метод найменших квадратів?
4. Назвіть способи вирівнювання
5. Які вимоги ставляться довибору необхідних невідомих (параметрів)?
6. Напишіть параметричні рівняння зв'язку для виміряних величин через вибрані параметри у загальному вигляді
7. Для чого визначають наближені значення параметрів?
8. Як перейти від параметричних рівнянь зв'язку до рівнянь поправок?
9. Як обчислити вільні члени параметричних поправок?

10. Напишіть параметричні рівняння поправок у загашеному і матричному вигляді

11. Напишіть параметричні рівняння поправок для виміряних перевищень, віддалі, дирекційного кута, кута і напрямку

12. Виведіть нормальні рівняння. Напишіть їх у матричному вигляді

13. Як отримати систему нормальних рівнянь при рівноточних і нерівноточних вимірів?

14. Поясніть особливості побудови системи нормальних рівянь і їх ознаки

15. Як і для чого складається таблиця коефіцієнтів рівнянь поправок?

16. Як обчислити коефіцієнти і вільні члени нормальних рівнянь? Контроль обчислень

17. Яким способом розв'язують системи нормальних рівнянь?

18. Сутність алгоритму Гаусса

19. Запишіть у буквених позначеннях перетворену в еквівалентну систему нормальних рівнянь

20. Напишіть елімінаційні рівняння

21. Наведіть приклади розкриття алгоритмів Гаусса

22. Як обчислити невідомі за способом Гаусса?

23. Які контролі використовуються при розв'язанні нормальних рівнянь за способом Гаусса

24. Наведіть способи обчислення суми [pv^2] в параметричному способі вирівнювання
25. Наведіть повну схему розв'язання нормальних рівнянь за способом Гаусса
26. Наведіть скорочену схему розв'язання нормальних рівнянь за способом Гаусса
27. Як виконується контроль обчислення невідомих у способі Гаусса?
28. Як розв'язати нормальні рівняння способом ітерацій (наближень)?
29. Як обчислюються вагові коефіцієнти за способом додаткових граф? Сутність способу
30. Як обчислити вагові коефіцієнти за способом діагоналей Ідельсона –Романовського?
31. Наведіть контролі обчислення вагових коефіцієнтів
32. Як обчислити ваги двох останніх невідомих за способом Енке?
33. Як виконати оцінку точності вирівняних невідомих за допомогою вагових коефіцієнтів?
34. Порядок оцінки точності функцій вирівняних невідомих за способом додаткового стовпця
35. Як обчислити поправки вирівняних значень параметрів і виміряних величин?
36. Напишіть формулу середньої квадратичної похибки одиниці ваги
37. Як обчислити середні квадратичні похибки вирівняних невідомих (параметрів) і заданих функцій?
38. Як виконується остаточний контроль вирівнювання параметричним способом?
39. Порядок вирівнювання параметричним способом
40. Які геодезичні мережі можна вирівнювати способом вузлів Попова?
41. Як скласти нормальні рівняння за кресленням мережі в способі вузлів?
42. Як виконати оцінку точності у способі вузлів?
43. Як обчислити коефіцієнти кореляції між невідомими параметрами і завданими функціями?

44. Напишіть формули для обчислення невідомих при розв’язанні нормальних рівнянь способом Крамера

Додаток

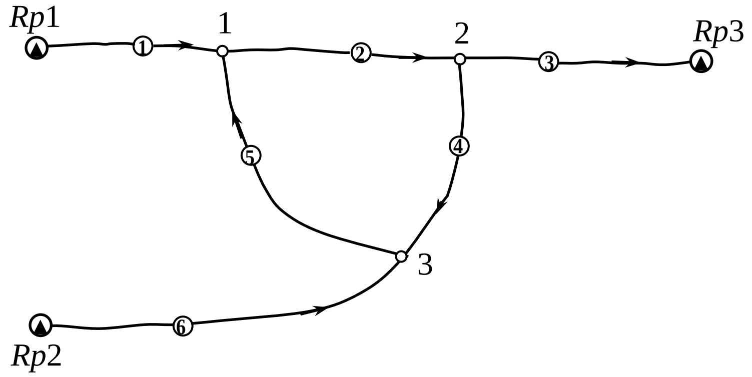
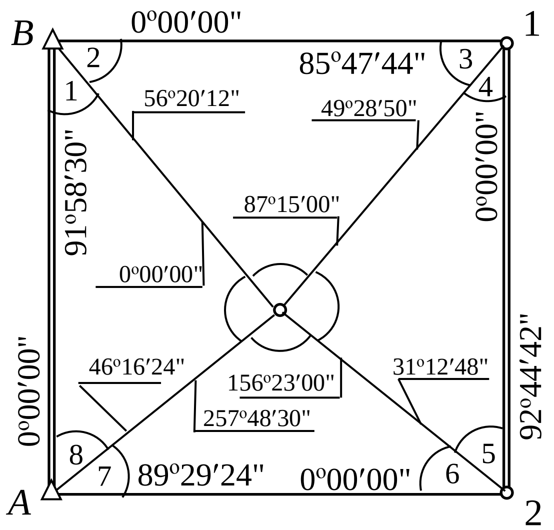


Рис. Д.1



X_A = 100,000

Y_A = 100,000

X_B = 600,000

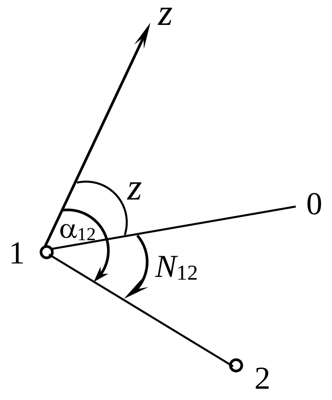
Y_B = 100,000

α_{AB} = 0°00′00"

α_{12} = 182°13′30"

S_{12} = 515,390

Рис.Д.2



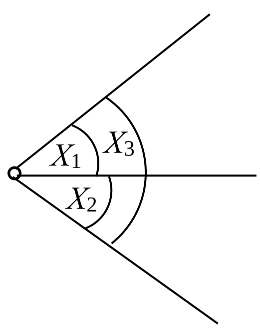


Рис. Д.3

Рис.Д.4

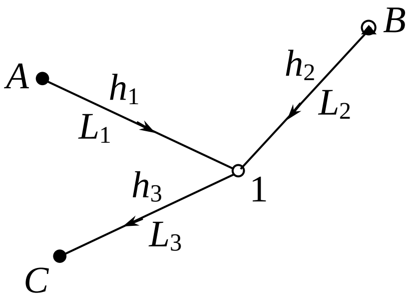


Рис. Д.5

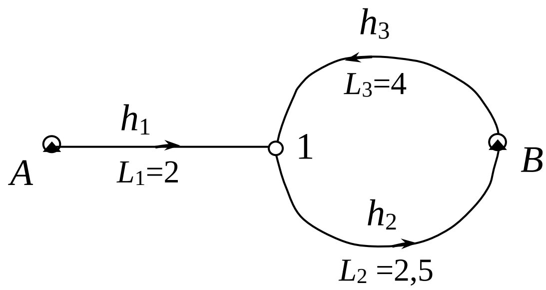


Рис. Д.6

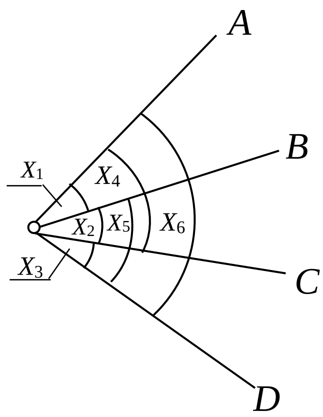


Рис. Д.7

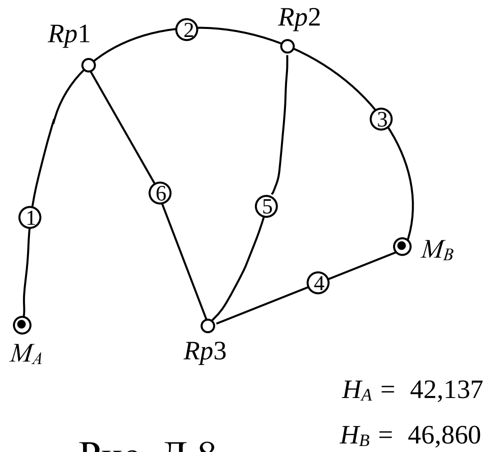


Рис. Д.8

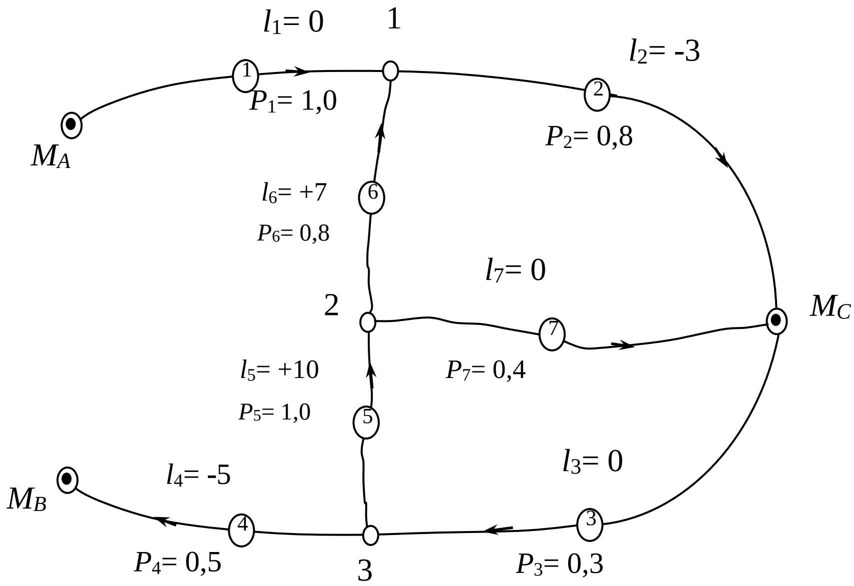


Рис. Д.9

Список літератури

1. *Видуев Н.Г., Григоренко А.Г.* Математическая обработка геодезических измерений. – Киев: Вища шк.., 1978. – 376с.
2. *Войтенко С.П.* Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів. – К.: КНУБА, 2005. – 235с.
3. *Войтенко С.П., Шульц Р.В., Кузьмич О.Й., Кравченко Ю.В.* Математичне оброблення геодезичних вимірів. – К.: Знання, 2015. – 654с.

З М І С Т