УДК 539.3

А.А. Гром, канд. техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук

ПРЕЦЕСІЙНІ КОЛИВАННЯ ТОНКИХ КРУГОВИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Виконано дослідження напружено-деформованого стану і прецесійних коливань тонких кругових пластин змінної товщини при складному обертанні. Проаналізовано вплив величин швидкості власного обертання і повороту осі обертання пластини на розподіл радіальних і окружних напружень.

При проектуванні турбінних дисків авіаційних двигунів, гнучких з'єднань валів, дискових пружин виникає потреба в досліджені динаміки тонких кругових дисків змінної товщини при складному русі. Полотна дисків, як правило, мають профільовану в меридіанному перерізі конічну та гіперболічну форми [1,2]. В багатьох випадках з конструктивних міркувань в роторах дискобарабанного типу диски виконуються з центральним отвором, розміри якого визначаються загальною компоновкою компресора, турбіни або всього двигуна, а на зовнішньому контурі вони прикріплюються до силової оболонки. Наявність отвору в диску призводить до концентрації напружень, для усунення яких на вільному контурі в області отвору робиться потовщення з гладким переходом вздовж меридіана. В роторах дискового типу диски на внутрішньому контурі прикріплюються до валу, а на зовнішньому контурі до дисків можуть прикріплюватись робочі лопатки або вони можуть бути вільними.

В даній роботі на основі рівнянь, наведених в [3,4], виконано дослідження прецесійних коливань дисків змінної товщини з урахуванням гіроскопічних сил складного обертання. В якості розрахункової схеми розглядається тонка пластина, яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі симетрії, перпендикулярної до її площини. Серединна поверхня пластини в недеформованому стані співпадає з координатною площиною xOy, яка може здійснювати поворот з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_0$ відносно інерційної системи координат $OXYZ$.

Положення будь-якої точки в системі координат $Oxyz$, яка жорстко зв'язана з пластиною, визначається полярними координатами r та θ. Товщина пластини h змінюється вздовж меридіана і є функцією радіуса

© Гром А.А., Лізунов П.П.

r. В якості узагальнених координат у деформованому стані приймаються лінійні переміщення $u, \mathrm{v}, \mathrm{w}$ (u, v вздовж координат r і θ відповідно, а w – із площини пластини).

При дослідженні динаміки пластини, яка здійснює складний рух, її загальний напружено-деформований стан визначається як результат додавання двох рухів навколо взаємно перпендикулярних осей. При цьому додатковий кососиметричний коливальний стан, обумовлений поворотом осі обертання пластини, обчислюється з урахуванням основного осесиметричного стану, обумовленого його власним обертанням. Диференціальне рівняння поперечних коливань пластини під дією коріолісових сил інерції, обумовлених поворотом осі обертання, відносно стану пружної рівноваги має такий вигляд:

$$D_{\text{м}} \nabla^2 \nabla^2 \mathrm{w} + \frac{dD_{\text{м}}}{dr}\left(2\frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial r^3} + \frac{2+\nu}{r}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\partial^2 D_{\text{м}}}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \theta^2}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(N_r r \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(N_\theta \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \theta}\right) +$$

$$+ \rho h \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2} = 2\rho\omega\omega_0 h r \cos(\theta + \omega t), \qquad (1)$$

де $N_r = \sigma_{22}^0 h, \quad N_\theta = \sigma_{11}^0 h -$ радіальне та окружне зусилля в пластині; $D_{\text{м}} = Eh^3/12(1-\nu^2)$ - циліндрична жорсткість; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ - оператор Лапласса.

Для визначення нормальних радіальних σ_{22}^0 і окружних σ_{11}^0 напружень при обертанні навколо осі симетрії $O_1 Z_1$ використовуються такі рівняння

$$\frac{d\sigma_{22}^0}{dr} - \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{r} + \sigma_{22}^0 \frac{1}{h}\frac{dh}{dr} = -\gamma\omega^2 r,$$

$$\frac{d\sigma_{11}^0}{dr} + \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{r} + \nu\sigma_{22}^0 \frac{1}{h}\frac{dh}{dr} = \nu\gamma\omega^2 r. \qquad (2)$$

При цьому вважається, що товщина пластини вздовж радіуса змінюється повільно, напруження по товщині пластини при простому обертанні розподілені рівномірно, а напруження, рівнобіжні осі пластини, відсутні.

Розглядаючи сталий процес і враховуючи вид періодичного навантаження від коріолісових сил інерції, рішення рівняння (1) приймемо у формі

$$\mathrm{w} = \mathrm{w}(r)\cos(\theta + \omega t). \tag{3}$$

З урахуванням рішення (3) рівняння поперечних коливань пластини (1) прийме вигляд:

$$D_{\text{м}}\frac{d^4\mathrm{w}}{dr^4} + 2\left(\frac{D_{\text{м}}}{r} + \frac{dD_{\text{м}}}{dr}\right)\frac{d^3\mathrm{w}}{dr^3} + \left(-\frac{D_{\text{м}}}{r^2} + \frac{2+\nu}{r}\frac{dD_{\text{м}}}{dr} + \frac{d^2D_{\text{м}}}{dr^2} - N_r\right)\frac{d^2\mathrm{w}}{dr^2} +$$

$$+\left(-\frac{D_{\text{м}}}{r^3} - \frac{3}{r^2}\frac{dD_{\text{м}}}{dr} + \frac{\nu}{r}\frac{d^2D_{\text{м}}}{dr^2} - \frac{dN_r}{dr} - \frac{N_r}{r}\right)\frac{d\,\mathrm{w}}{dr} + \left(\frac{3}{r^3}\frac{dD_{\text{м}}}{dr} - \frac{\nu}{r^2}\frac{d^2D_{\text{м}}}{dr^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{3D}{r^4} + \frac{N_\theta}{r^2} - \gamma h\omega^2\right)\mathrm{w} = 2\gamma\omega\omega_0 hr. \tag{4}$$

Рівняння (1) і (4), доповнені граничними умовами на краях пластини, дозволяють визначити деформований стан пластини при складному русі для різних значень кутової швидкості власного обертання ω і кутової швидкості повороту осі обертання ω_0.

Для заданого класу задач характерним закріпленням на контурах є:
- жорстке закріплення на внутрішньому контурі і вільний край на зовнішньому;
- жорстке закріплення на зовнішньому контурі і вільний край на внутрішньому.

Для розв'язання крайових задач використовується метод початкових параметрів з ортогоналізацією по С.К. Годунову.

При дослідженні коливань диску ротора дискобарабанного типу, коли силова оболонка проходить по зовнішньому контуру диска, в якості розрахункової схеми вибрана кругова пластина з вільним краєм на внутрішньому контурі і жорстко закріпленим на зовнішньому контурі. Розрахунки проводились при таких значеннях параметрів: модуль пружності матеріалу E =1,75 10^{11} Па, коефіцієнт Пуассона ν =0,3, щільність матеріалу γ =8000 кг/м^3, товщина пластини на внутрішньому

контурі h_0 =0,005 м, товщина пластини на зовнішньому контурі h_k = 0,0025 м, зовнішній радіус пластини R_k =0,2 м. Інші параметри варіювалися.

Виконано дослідження напружено-деформованого стану і коливань пластини конічного профілю при ω = 250 с$^{-1}$ і ω_0 = 0,5 с$^{-1}$. На рис. 1 наведені графіки розподілу напружень в пластині з R_0 = 0,04 м. Напруження при складному русі на поверхні пластини при $z = +h/2$ та $z = -h/2$ позначені відповідно символами "+" і "-". Досліджено вплив величини отвору на розподіл напружень вздовж меридіана пластини. Відмітимо, що для пластин конічного профілю із збільшенням R_0 відбувається збільшення повздовжніх напружень σ_{11} та зменшення прогину на вільному краї.

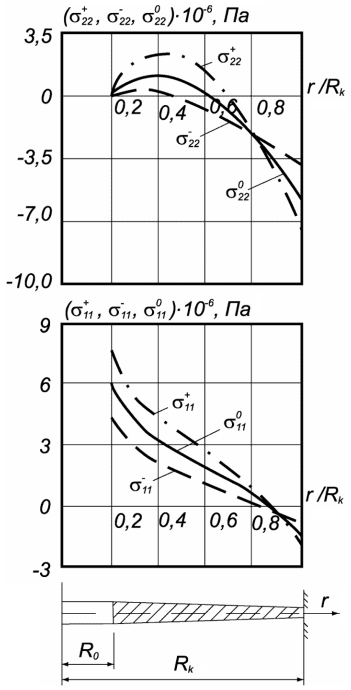


Рис.1. Графіки розподілу напружень в пластині конічного профілю (R_0 = 0,04 м)

На рис. 1 для ілюстрації впливу повороту осі обертання пластини на напружений стан наведені також графіки зміни радіальних σ_{22}^0 і окружних σ_{11}^0 напружень при простому обертанні. Зазначимо, що при обертанні кругових пластин з вільним краєм на внутрішньому контурі і жорстко закріпленим на зовнішньому контурі напружений стан на вільному краї $(x^2 = R_0)$ визначається окружними напруженнями, а на закріпленому $(x^2 = R_k)$ – радіальними.

Виконано дослідження коливань пластини гіперболічного профілю при складному русі. Розрахунки проводились при тих же значеннях фізичних і геометричних параметрів, а кутова швидкість повороту осі пластини дорівнювала $\omega_0 = 0{,}5$ с$^{-1}$. На рис. 2 наведені графіки розподілу напружень в пластині гіперболічного профілю при $\omega = 1000$ с$^{-1}$.

Збільшення ω призводить до суттєвого зменшення амплітуд прецесійних коливань і зменшення радіальних та окружних напружень. При кутовій швидкості обертання $\omega = 1000$ с$^{-1}$ в області отвору з'являється додаткова зона знакозмінних радіальних напружень (рис. 2).

На основі розробленої методики виконано дослідження впливу геометричних та інерційних параметрів пластини з вільним краєм на зовнішньому контурі та жорстко закріпленим на внутрішньому на її напружено-деформований стан. Розрахунки проводились при таких значеннях параметрів: $E = 1{,}75 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0{,}3$; $\gamma = 8000$ кг/м^3; товщина пластини на внутрішньому контурі $h_0 = 0{,}005$ м, товщина пластини на зовнішньому контурі $h_k = 0{,}0025$ м; зовнішній радіус $R_k = 0{,}2$ м; кутова швидкість повороту осі обертання пластини $\omega_0 = 0{,}5$ с$^{-1}$. Внутрішній радіус R_0 і кутова швидкість обертання пластини ω варіювались.

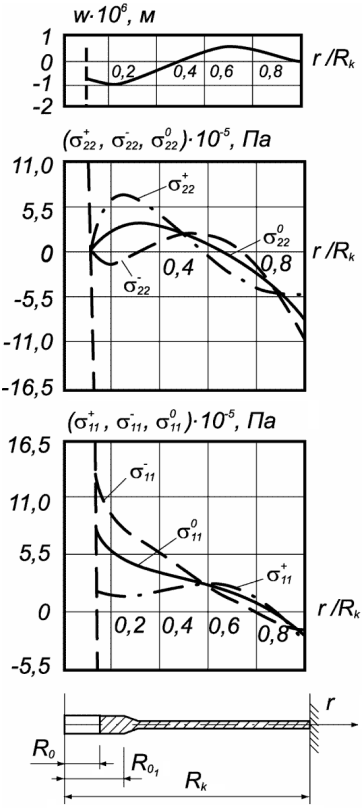


Рис.2. Графіки розподілу напружень в пластині гіперболічного профілю ($\omega = 1000$ с$^{-1}$)

Для пластини з вільним краєм на зовнішньому контурі та жорстко закріпленим на внутрішньому, яка обертається навколо осі симетрії, виконано дослідження впливу відношення внутрішнього та зовнішнього радіусів R_0 / R_k, а також швидкості власного обертання ω на розподіл радіальних і окружних напружень. Деякі із отриманих результатів (максимальні значення напружень в пластині) приведені в таблиці 1. Зазначимо, що збільшення величини швидкості обертання диску призводить до збільшення радіальних і окружних напружень в ньому, а збільшення відношення R_0 / R_k при постійній швидкості обертання ω веде до їх зменшення.

Таблиця 1

Максимальні значення напружень в пластині конічного профілю для різних значень ω і R_0 / R_k

ω, c^{-1}	R_0 / R_k =0,1		R_0 / R_k =0,2		R_0 / R_k =0,3	
	σ_{22}^0, Па	σ_{11}^0, Па	σ_{22}^0, Па	σ_{11}^0, Па	σ_{22}^0, Па	σ_{11}^0, Па
250	$9{,}112\cdot10^6$	$5{,}679\cdot10^6$	$8{,}723\cdot10^6$	$4{,}926\cdot10^6$	$8{,}123\cdot10^6$	$4{,}115\cdot10^6$
500	$3{,}645\cdot10^7$	$2{,}272\cdot10^7$	$3{,}489\cdot10^7$	$1{,}970\cdot10^7$	$3{,}249\cdot10^7$	$1{,}646\cdot10^7$
1000	$1{,}458\cdot10^8$	$9{,}087\cdot10^7$	$1{,}396\cdot10^8$	$7{,}881\cdot10^7$	$1{,}300\cdot10^8$	$6{,}584\cdot10^7$
1500	$3{,}280\cdot10^8$	$2{,}044\cdot10^8$	$3{,}140\cdot10^8$	$1{,}773\cdot10^8$	$2{,}924\cdot10^8$	$1{,}481\cdot10^8$

Досліджено напружений стан пластини гіперболічного профілю при складному обертанні. На рис. 3 для пластини з тими ж фізичними і геометричними параметрами при $\omega = 500$ c^{-1} і $\omega_0 = 1$ c^{-1} приведено розподіл вздовж радіуса радіальних і окружних напружень. Видно, що в пластині також виникають зони знакозмінних напружень, які суттєво впливають на її міцність.

Таким чином, за допомогою розробленої методики проаналізовано вплив величин швидкості власного обертання і повороту осі обертання тонких кругових пластин змінної товщини на розподіл радіальних і окружних напружень. Встановлені діапазони зміни геометричних і інерційних параметрів, при яких виникають знакозмінні напруження, які суттєво впливають на міцність і надійність пластинчастих елементів конструкцій. Отримані результати розрахунків, за допомогою яких можна обгрунтовано обирати конструктивні проектні параметри відповідальних елементів конструкцій, давати рекомендації для зниження матеріалоємності та підвищення надійності конструкцій.

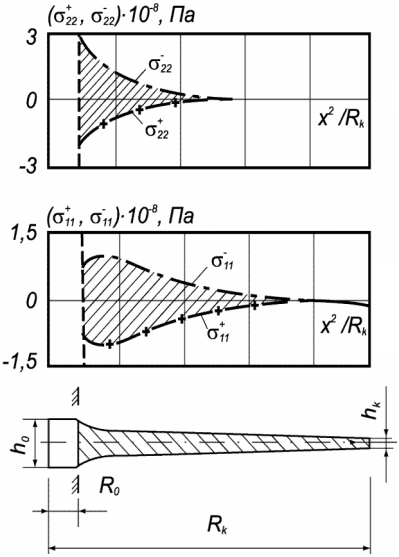


Рис. 3. Графіки розподілу напружень в пластині гіперболічного профілю (ω = 500 c^{-1})

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бюргер И.А., Шорр Б.Ф., Шнейдерович Р.М.* Расчет на прочность деталей машин.- М.: Машиностроение, 1966.- 616 с.
2. *Богомолов С.И., Журавлева А.М.* Взаимосвязанные колебания в турбомашинах и газотурбинных двигателях.- Харьков: Вища школа, 1973.- 179 с.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости.- М. - Л., 1935. - 614 с.
4. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки.- М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963.- 528 с.

Отримано 21.07.09

А.А. Гром, П.П. Лизунов

Прецессионные колебания тонких круговых пластин переменной толщины

Выполнено исследование напряженно-деформированного состояния и прецессионных колебаний тонких круговых пластин переменной толщины при сложном вращении. Проанализировано влияние величин скорости собственного вращения и поворота оси вращения пластины на распределение радиальных и окружных напряжений.

A.A. Grom, P.P. Lizunov

Process fluctuations of thin round sheet with changeable thickness

Research of the intense-deformed condition and fluctuations of thin circular plates of a variable thickness at difficult rotation is executed. Influence of sizes of speed of own rotation and turn of an axis of rotation of a plate on distribution of radial and district pressure is analysed.