УДК 539.3

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук
Погорелова О.С., канд. фіз.-мат. наук
Постнікова Т.Г., канд. техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІБРОУДАРНИХ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ ВИСОТНОЇ СПОРУДИ З МАЯТНИКОВИМ ГАСИТЕЛЕМ

Розглянуті динамічні процеси, які виникають під дією вітрового навантаження, у висотній споруді з ударним маятниковим гасителем. Запропоновані два закони моделювання сили контактної взаємодії. Запропонований критерій вибору параметрів моделюючої функції.

У даній статті приводяться результати досліджень усталених віброударних режимів коливань в пружних системах, що виникають у висотній споруді, обладнаній ударним маятниковим гасителем, під дією вітрового навантаження. Моделювання удару базується на застосуванні силових характеристик контактної взаємодії. Існує інший підхід, де моделювання удару здійснюється за допомогою відповідних граничних умов з використанням коефіцієнту відновлення. Але такий підхід вимагає чіткої фіксації моменту удару і відповідної корекції початкової фази періодичного навантаження. При наявності у пружній системі більш ніж одної контактуючої пари вказаний підхід приводить до використання багатоточечних краєвих задач, що в певній мірі ускладнює відповідні розрахунки. Роздільний опис міжударних рухів і процесу удару може також стати проблематичним при використанні більш загальних концепцій теорії співударів твердих тіл. Тому доцільно виконувати побудову та аналіз єдиної форми запису рівнянь руху елементів віброударних систем на всій часовій осі. Ці рівняння повинні описувати повну сукупність реалізованих рухів. Це досягається за допомогою введення нелінійних залежностей, що відображають процес силової взаємодії тіл, які співударяються, чи їх елементів. Зазначені залежності будуються на основі силових характеристик контактної взаємодії $F(x)$ чи $F(x,\dot{x})$, де x - відстань між тілами, що контактують.

Такий підхід суттєво спрощує побудови, що пов’язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем. Це твердження повною мірою відноситься і до аналізу стійкості усталених періодичних віброударних режимів коливань. При моделюванні удару за допомогою відповідних граничних умов з використанням коефіцієнту відновлення необхідно формулювати спеціальне означення стійкості. В той же час при застосуванні нелінійних силових характеристик контактної взаємодії аналіз стійкості віброударних рухів може проводитися в рамках класичної теорії Флоке.

Саме такий підхід використовується у даній роботі для розв‘язку задачі про усталені віброударні коливання пружної системи – висотної споруди з маятниковим гасителем.

У статті продовжувалися дослідження присвячені вивченню віброударних процесів, які були розпочаті раніше в [1-5].

1. Постановка задачі

Розглядається висотна споруда баштового типу з ударним маятниковим гасителем. Система складається з пружної башти висотою H, до якої кріпиться ударний маятниковий гаситель масою m_m на стержні довжиною l, що схематично зображено на рис. 1. Башта знаходиться під дією розподіленого вітрового навантаження $q(x,t)$. Демпфірування маятника приймається пропорційним першому ступеню його кутової швидкості.

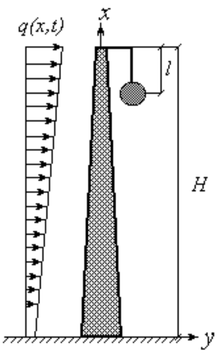


Рис. 1

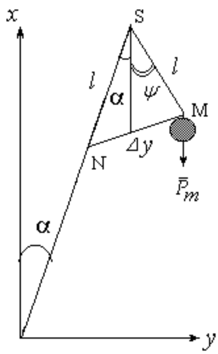


Рис. 2

Для побудови дискретної моделі задачі, що розглядається, застосовується метод узагальнених координат. Переміщення башти представляємо в вигляді зваженої суми базисних функцій, в якості яких вибираються форми власних коливань $\varphi_i(x)$. Дослідження показали, що основний внесок в коливальний процес дають перші дві форми - $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$. Приймемо рівняння вигнутої лінії башти, що змінюється по закону

$$y(x,t) = y_1(t)\varphi_1(x) + y_2(t)\varphi_2(x) \ . \tag{1}$$

Приєднуючи до башти маятниковий гаситель, отримуємо систему, що схематично зображена на рис. 1. Така система має три степені вільності. За узагальнені координати приймаємо:

$$y_1(t), y_2(t), \psi(t).$$

Ударна взаємодія між баштою та маятником моделюється за допомогою прикладання до контактуючих тіл відштовхуючої сили контактної взаємодії F, котра залежить від їх відносної відстані NM, яка далі позначена Δy (рис. 2).

При цьому $F(\Delta y) = Cf(\Delta y)$, де C – коефіцієнт відповідності, за допомогою якого моделююча функція $f(\Delta y)$, що має ту чи іншу розмірність в залежності від її вигляду, переводиться в силу з відповідною розмірністю. Функцію f краще за все брати як δ-функцію, але з такою функцією неможливо чисельно інтегрувати рівняння руху системи, тому запропоновані два варіанта функції f, які так чи інакше наближають її до δ-функції.

За першим варіантом функція f, змінюється за експоненціальним законом:

$$f(\Delta y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}, & \Delta y \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{(\Delta y)^2}{2\sigma^2}}, & \Delta y > 0 \end{cases}. \tag{2}$$

У другому варіанті пропонується функція f, що описується формулами:

$$f(\Delta y) = \begin{cases} 0 \quad , & d \le \Delta y, \\ R - \sqrt{R^2 - [d - \Delta y]^2}, & d - \delta \le \Delta y \le d, \\ k_3[d - \Delta y] - b, & 0 \le \Delta y \le d - \delta, \\ k_3 d - b \;, & \Delta y \le 0. \end{cases} \tag{3}$$

Тут d – зазор між тілами, при якому виникає відштовхуюча контактна сила взаємодії. При подальшому зменшенні відстані Δy відштовхуюча сила зростає спочатку повільно, по колу радіусу R, поки зазор Δy не стане менше $(d - \delta)$, а потім швидко по закону прямої до повного зближення тіл, коли сила вже зростати не може – тіла відштовхуються, відбувся удар. Параметри b та δ визначаються співвідношеннями:

$$b = R\left(\sqrt{1+k_3^2} - 1\right), \quad \delta = \frac{k_3 R}{\sqrt{1+k_3^2}} . \tag{4}$$

Виходячи з того, що у наших побудовах $d > \delta$, на d накладається таке обмеження:

$$d > \frac{k_3 R}{\sqrt{1+k_3^2}} . \tag{5}$$

Схематично графіки таких функції мають вигляд, представлений на рис. 3, 4.

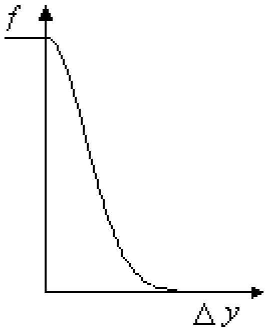


Рис. 3

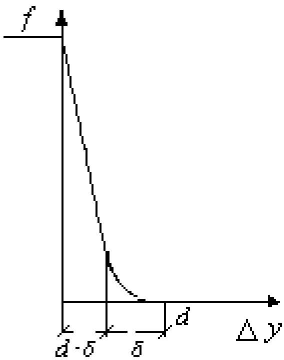


Рис. 4

Слід відмітити, що при вдалому моделюванні удару за допомогою (2) і (3) ситуація $\Delta y < 0$ неможлива, тому що при $\Delta y = 0$ здійснюється удар маятника о башту, маятник відштовхується і знов $\Delta y > 0$. Та частина графіку, що знаходиться у від'ємній частині осі абсцис, не реалізується. Параметри моделюючої сили слід підбирати таким чином, щоб удар моделювався щонайкраще. Відносна відстань контактуючих тіл – маятника та башти, визначається із трикутника NMS (рис. 2):

$$\Delta y(t) = 2l \sin\frac{\psi(t) + \alpha(t)}{2} . \tag{6}$$

Рівняння руху системи, отримані за допомогою рівнянь Лагранжа 2-го роду, запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{y}_1 + a_{12}\ddot{y}_2 + a_{13}\ddot{\psi} &= D_1, \\ a_{21}\ddot{y}_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + a_{23}\ddot{\psi} &= D_{2,} \\ a_{31}\ddot{y}_1 + a_{32}\ddot{y}_2 + a_{33}\ddot{\psi} &= D_3, \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$\begin{aligned} &a_{11} = m_1 + m_m\varphi_1^2(H),\ a_{12} = m_m\varphi_1(H)\varphi_2(H),\ a_{13} = lm_m\varphi_1(H)\cos(\psi), \\ &a_{21} = m_m\varphi_1(H)\varphi_2(H),\ a_{22} = m_2 + m_m\varphi_2^2(H),\ a_{23} = lm_m\varphi_2(H)\cos(\psi), \\ &a_{31} = lm_m\varphi_1(H)\cos(\psi),\ a_{32} = lm_m\varphi_2(H)\cos(\psi),\ a_{33} = l^2 m_m, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \dot{\psi}^2(t)lm_m\varphi_1(H)\sin\psi(T) - 2\xi_1 m_1\omega_1\dot{y}_1(t) - K_{11}y_1(t) + p_1(t) + \\ &+ f(\Delta y)[\varphi_1(H) - \varphi_1(H-l)]\cdot\cos\frac{\psi(t)-\alpha(t)}{2}, \\ D_2 &= \dot{\psi}^2(t)lm_m\varphi_2(H)\sin\psi(t) - 2\xi_2 m_2\omega_2\dot{y}_2(t) - K_{22}y_2(t) + p_2(t) + \\ &+ f(\Delta y)[\varphi_2(H) - \varphi_2(H-l)]\cos\frac{\psi(t)-\alpha(t)}{2}, \\ D_3 &= -\xi_m\dot{\psi}(t) - m_m gl\sin\psi(t) + f(\Delta y)l\sin\psi(t)\cdot\sin\frac{\psi(t)-\alpha(t)}{2} + \\ &+ f(\Delta y)l\cos\psi(t)\cdot\cos\frac{\psi(t)-\alpha(t)}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Тут введені позначення:

$$\begin{aligned} &m_1 = \int_0^L m(x)\varphi_1^2(x)dx, && m_2 = \int_0^L m(x)\varphi_2^2(x)dx, \\ &K_{11} = \int_0^L EJ(x)(\varphi_1''(x))^2 dx, && K_{22} = \int_0^L EJ(x)(\varphi_2''(x))^2 dx, \\ &p_1(t) = \int_0^L q(x,t)\varphi_1(x)dx, && p_2(t) = \int_0^L q(x,t)\varphi_2(x)dx, \end{aligned} \tag{10}$$

де, як звичайно, *E* –модуль пружності, *J(x)* – погонний момент інерції башти, *m(x)* – її погонна маса. Тут позначено також: ξ_1, ξ_2 - коефіцієнт демпфірування башти, ξ_m - коефіцієнт демпфірування маятника, ω_1, ω_2 - парціальні частоти башти. Кут $\alpha(t)$- це кут відхилення башти від вертикалі (рис.2), він є малим кутом. Тому

$$\alpha(t) = \frac{y(H)}{H}\ .$$

Згідно (1)

$$\alpha(t) = \frac{y_1(t)\varphi_1(H) + y_2(t)\varphi_2(H)}{H}\ . \tag{11}$$

Зовнішнє вітрове навантаження $p_1(t)$ та $p_2(t)$ є випадковим. Для башти без маятника випадкове вітрове навантаження може бути замінено гармонійним навантаженням з частотою, що дорівнює першій парціальній частоті башти ω_1 [6]. Для башти з маятником це твердження, мабуть, має інший вигляд, але поки що поширимо його на систему башта-маятник і подивимось на динамічні процеси в цій системі під дією гармонійного впливу з частотою, яка співпадає з першою парціальною частотою башти ω_1.

2. Використання методу продовження розв‘язку за параметром для побудови кривих навантаження системи башта-маятник

Для розв‘язку задачі, що поставлена у п. 1, використовується чисельний метод продовження розв‘язку за параметром [7]. Опишемо коротко застосування цього методу щодо віброударних коливань пружної системи з трьома степенями вільності (рис. 2). Запишемо систему рівнянь (7) у вигляді:

$$A\ddot{\bar{y}} = \overline{D}\ , \tag{12}$$

а розв‘язок цієї системи у вигляді:

$$\ddot{\bar{y}} = A^{-1}\overline{D}\ , \tag{13}$$

де вектор $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, вектор $\overline{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$, $y_3(t) = \psi(t)$, матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\ . \tag{14}$$

Як було відмічено в п. 1, в рамках даної задачі як модель вітрового навантаження приймемо гармонійний вплив з частотою, що дорівнює першій парціальній частоті башти ω_1. Таким чином, узагальнені навантаження $p_1(t)$ та $p_2(t)$ представляються у вигляді:

$$p_1(t) = \lambda P_{10} \sin \omega t, \quad p_2(t) = \lambda P_{20} \sin \omega t, \quad \omega = \omega_1. \tag{15}$$

де λ - параметр, що характеризує інтенсивність вітрового впливу.

Тоді будемо вважати, що в системі реалізується режим усталених віброударних Т-періодичних коливань. Цей усталений віброударний Т-періодичний режим представляє собою розв‘язок системи (12), що задовольняє умовам періодичності (граничним умовам):

$$\begin{aligned} &y_i(0) = y_i(T), \\ &\dot{y}_i(0) = \dot{y}_i(T), \quad (i = 1,2,3). \end{aligned} \tag{16}$$

Будуючи для різних λ розв‘язок системи (12), що задовольняє умовам періодичності (16), простежимо еволюцію усталеного віброударного процесу при зміні інтенсивності зовнішнього навантаження. Побудова кривих навантаження проводиться методом продовження розв‘язку за параметром λ.

Нехай при деякому значенні параметра навантаження $\lambda = \lambda_k$ на кроці k відомий розв‘язок $y_{ik}(t)$ (i=1,2,3) системи (12), який задовольняє граничним умовам (16). Цей розв‘язок визначається початковими умовами

$$y_{ik}(t) = y_i(t, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k), \ i=1,2,3. \tag{17}$$

При цьому виконуються умови періодичності:

$$\begin{aligned} &y_{ik}(0) = y_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k), \\ &\dot{y}_{ik}(0) = \dot{y}_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) \end{aligned}, \ i=1,2,3. \tag{18}$$

Візьмемо наступний (k+1)-ий крок, коли параметр навантаження λ отримав приріст $\Delta\lambda_k$, тоді початкові значення переміщень y_{ik} теж отримають прирости:

$$\begin{aligned} &\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda_k, \\ &y_{i,k+1}(0) = y_{ik}(0) + \Delta y_{ik}, \\ &\dot{y}_{i,k+1}(0) = \dot{y}_{ik}(0) + \Delta\dot{y}_{ik}, \quad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{19}$$

На (k+1)-ому кроці теж виконуються умови періодичності:

$$\begin{aligned} y_{ik+1}(0) &= y_i(T, y_{1k+1}(0), y_{2k+1}(0), y_{3k+1}(0), \dot{y}_{1k+1}(0), \dot{y}_{2k+1}(0), \dot{y}_{3k+1}(0), \lambda_{k+1}), \\ \dot{y}_{ik+1}(0) &= \dot{y}_i(T, y_{1k+1}(0), y_{2k+1}(0), y_{3k+1}(0), \dot{y}_{1k+1}(0), \dot{y}_{2k+1}(0), \dot{y}_{3k+1}(0), \lambda_{k+1}) \end{aligned}, \quad (20)$$

$$i=1,2,3.$$

Підставляючи (19) в ліві та праві частини (20) і розкладаючи функції $y_i, \dot{y}_i, (i=1,2,3)$ в правих частинах (20) в ряд Тейлора відносно приростів $\Delta y_{ik}, \Delta\dot{y}_{ik}, (i=1,2,3)$ та $\Delta\lambda_k$ і відкидаючи члени вище першого порядку відносно приростів, запишемо:

$$\begin{aligned} y_{ik}(0)+\Delta y_{ik} &= y_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) + \\ &\frac{\partial y_i}{\partial y_{1k}(0)}\Delta y_{1k} + \frac{\partial y_i}{\partial y_{2k}(0)}\Delta y_{2k} + \frac{\partial y_i}{\partial y_{3k}(0)}\Delta y_{3k} + \\ &\frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_{1k}(0)}\Delta \dot{y}_{1k} + \frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_{2k}(0)}\Delta \dot{y}_{2k} + \frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_{3k}(0)}\Delta \dot{y}_{3k} + \frac{\partial y_i}{\partial \lambda}\Delta\lambda_k, \\ \dot{y}_{ik}(0)+\Delta \dot{y}_{ik} &= \dot{y}_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) + \\ &\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_{1k}(0)}\Delta y_{1k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_{2k}(0)}\Delta y_{2k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_{3k}(0)}\Delta y_{3k} + \\ &\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{y}_{1k}(0)}\Delta \dot{y}_{1k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{y}_{2k}(0)}\Delta \dot{y}_{2k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{y}_{3k}(0)}\Delta \dot{y}_{3k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \lambda}\Delta\lambda_k, i=1,2,3. \end{aligned} \quad (21)$$

Такі перетворення дають можливість лінеарізувати систему і отримати лінійну систему шести алгебраїчних рівнянь відносно шести невідомих Δy_{ik} та $\Delta\dot{y}_{ik}$ (i=1,2,3):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{ik}(0)} - 1\right)\Delta y_{ik} + \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{jk}(0)}\Delta y_{jk} + \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{1k}(0)}\Delta y_{1k} + \\ &+ \frac{\partial y_i(T)}{\partial \dot{y}_{2k}(0)}\Delta \dot{y}_{2k} + \frac{\partial y_i(T)}{\partial \dot{y}_{2k}(0)}\Delta \dot{y}_{2k} + \frac{\partial y_i(T)}{\partial \dot{y}_{3k}(0)}\Delta \dot{y}_{3k} = \\ = -&\frac{\partial y_i(T)}{\partial \lambda_k}\Delta\lambda_k + [y_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) - y_{ik}(0)], \end{aligned} \quad (22)$$

$$i=1,\ j=2,3; \qquad i=2,\ j=1,3; \qquad i=3.\ j=1,2.$$

Слід звернути увагу на вирази у квадратних дужках у правих частинах всіх рівнянь системи (22). Якщо умови періодичності (16) при $\lambda = \lambda_k$ виконуються точно, ці вирази дорівнюють нулю. Але, внаслідок того, що при дослідженні еволюції віброударного процесу при зміні інтенсивності зовнішнього навантаження застосовується чисельний підхід, умови періодичності задовольняються з нев‘язками:

$$r_{ik} = y_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) - y_{ik}(0),$$
$$r_{i+3,k} = \dot{y}_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) - \dot{y}_{ik}(0), \quad (23)$$
$$i = 1,2,3.$$

Значення нев‘язки дозволяють вирішити, чи добре знайдені прирости початкових умов, і, як наслідок, самі початкові умови. Коли значення нев‘язки розв‘язку системи (22) великі, необхідно змінити приріст параметра навантаження λ і знову шукати нові значення приростів початкових умов.

Отже підкреслимо ще раз, що лінійна система алгебраїчних рівнянь (22) дозволяє знайти невідомі прирости початкових умов $\Delta y_{ik}, \Delta\dot{y}_{ik}, i = 1,2,3$ такі, що розшукуються.

Але спочатку треба знайти коефіцієнти цієї системи. Матриця коефіцієнтів має 42 елемента, її вигляд такий:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_i(T)}{\partial y_{jk}(0)} & \dfrac{\partial y_i(T)}{\partial \dot{y}_{jk}(0)} & \dfrac{\partial y_i(T)}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial \dot{y}_i(T)}{\partial y_{jk}(0)} & \dfrac{\partial \dot{y}_i(T)}{\partial \dot{y}_{jk}(0)} & \dfrac{\partial \dot{y}_i(T)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ j = 1,2,3; \\ i = 2,\ j = 1,2,3; \\ i = 3,\ j = 1,2,3. \end{array} \quad (24)$$

Далі будемо шукати ці коефіцієнти. Введемо заміну змінних в системі (12):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_4(t), \\ \dot{y}_2(t) &= y_5(t), \\ \dot{y}_3(t) &= y_6(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Тоді система (12) переписується у вигляді:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

а її розв‘язок у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Матриця коефіцієнтів (24), які розшукуються, з використанням нових невідомих приймає вигляд:

$$\left(\frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{1k}(0)}\ \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{2k}(0)}\ \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{3k}(0)}\ \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{4k}(0)}\ \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{5k}(0)}\ \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{6k}(0)}\ \frac{\partial y_i(T)}{\partial \lambda_k}\right), \qquad (28)$$
$$i = 1,2,3,4,5,6.$$

Продиференцюємо співвідношення (25) та (27) за початковими значеннями невідомих:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial y_{ik}(0)}\right) = \left(\dfrac{\partial y_4(t)}{\partial y_{ik}(0)}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial y_2}{\partial y_{ik}(0)}\right) = \left(\dfrac{\partial y_5(t)}{\partial y_{ik}(0)}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial y_3}{\partial y_{ik}(0)}\right) = \left(\dfrac{\partial y_6(t)}{\partial y_{ik}(0)}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_4}{\partial y_{ik}(0)} \\ \dfrac{\partial y_5}{\partial y_{ik}(0)} \\ \dfrac{\partial y_6}{\partial y_{ik}(0)} \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot B\cdot \sin y_3(t)\cdot \dfrac{\partial y_3(t)}{\partial y_{ik}(0)}\cdot A^{-1}\cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} + \\ \qquad + A^{-1}\cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial D_1}{\partial y_{ik}(0)} \\ \dfrac{\partial D_2}{\partial y_{ik}(0)} \\ \dfrac{\partial D_3}{\partial y_{ik}(0)} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3,4,5,6. \end{cases} \qquad (29)$$

Тут введені позначення:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} b_{13} &= b_{31} = l m_m \varphi_1(H), \\ b_{23} &= b_{32} = l m_m \varphi_2(H). \end{aligned} \qquad (30)$$

Таким чином отримуємо шість систем диференціальних рівнянь першого порядку. Розв‘язуючи задачу Коши для цих систем, знайдемо коефіцієнти, що записані у вигляді матриці (24), крім останнього стовпця.

Для знаходження останнього стовпця коефіцієнтів в матриці (24) продиференціюємо співвідношення (25) та (27) за параметром навантаження λ_k . Отримуємо ще одну, сьому, систему диференціальних рівнянь, розв‘язуючи задачу Коші для якої, знайдемо коефіцієнти $\frac{\partial y_i(t)}{\partial \lambda_k}$, i=1,2,...,6, які ми шукаємо:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_1(t)}{\partial \lambda_k}\right)=\frac{\partial y_4(t)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_2(t)}{\partial \lambda_k}\right)=\frac{\partial y_5(t)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_3(t)}{\partial \lambda_k}\right)=\frac{\partial y_6(t)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \frac{\partial y_4(t)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial y_5(t)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial y_6(t)}{\partial \lambda_k} \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot B\cdot \sin y_3(t)\,\frac{\partial y_3(t)}{\partial \lambda_k}\,A^{-1}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} + A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial D_2}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial D_3}{\partial \lambda_k} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{31}$$

Таким чином, маємо сім систем диференціальних рівнянь першого порядку, кожне з яких має шість невідомих. Для розв‘язання перших шести систем необхідно взяти такі початкові умови [8]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

для першої системи - перший стовпець, для другої - другий і т.п., для шостої системи за початкові умови треба взяти шостий стовпець цієї матриці, тобто для першої системи маємо початкові умови:

$$\left(\frac{\partial y_1(t)}{\partial y_{1k}(0)}\right)_{t=0}=1,\ \left(\frac{\partial y_2(t)}{\partial y_{1k}(0)}\right)_{t=0}=0,\ \left(\frac{\partial y_3(t)}{\partial y_{1k}(0)}\right)_{t=0}=0,$$

$$\left(\frac{\partial y_4(t)}{\partial y_{1k}(0)}\right)_{t=0}=0\,,\ \left(\frac{\partial y_5(t)}{\partial y_{1k}(0)}\right)_{t=0}=0\,,\ \left(\frac{\partial y_6(t)}{\partial y_{1k}(0)}\right)_{t=0}=0\,,$$

для другої системи $\left(\frac{\partial y_2(t)}{\partial y_{2k}(0)}\right)_{t=0}=1$, решта початкових умов - нульові і т.д. відповідно приведеній матриці. Іншими словами

$$\left(\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_{ik}(0)}\right)_{t=0}=1\,,\ \left(\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_{jk}(0)}\right)_{t=0}=0\,,\quad \begin{array}{c} i=1,...,6, \\ j=1,...,6,\ \ j\neq i. \end{array}$$

Для сьомої системи (31) згідно з методами теорії диференціальних рівнянь [8] всі початкові умови нульові

$$\left(\frac{\partial y_i(t)}{\partial \lambda_k}\right)_{t=0}=0,\ \ i=1,...,.6. \tag{33}$$

Таким чином, наведене вище дозволяє сформулювати основні операції процедури методу продовження розв‘язку за параметром при побудові кривих навантаження для висотної баштової споруди з ударним маятниковим гасителем:

1. Припускаємо, що при деякому значенні параметра навантаження $\lambda=\lambda_k$ відомий розв‘язок вихідної динамічної системи (12), що задовольняє граничним умовам (16) і цілком визначається початковими умовами. Знаходимо цей розв‘язок, розв‘язуючи вихідну нелінійну систему диференціальних рівнянь (12) із заданими початковими умовами при даному значенні параметра λ_k прямим чисельним інтегруванням.

2. Надаємо параметрові навантаження λ приріст $\Delta\lambda_k$. При цьому необхідно визначити прирости початкових умов системи (12). Для цього розв‘язуємо шість систем диференціальних рівнянь першого порядку (22) з початковими умовами (32) за допомогою прямого чисельного інтегрування. Отримуємо 6×6 невідомих функцій $\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_{jk}(0)}$, i=1,2,...,6; j=1,2,...,6. Знаходимо значення цих функцій при $t=T$, які є коефіцієнтами системи (22).

3. Розв‘язуємо сьому систему диференціальних рівнянь першого порядку (31) з нульовими початковими умовами (33) за допомогою прямого чисельного інтегрування. Отримуємо шість невідомих функцій

$\dfrac{\partial y_i(t)}{\partial \lambda_k}$, i=1,2,...,6. Знаходимо значення цих функцій при t=T, які є коефіцієнтами системи (22).

4. Розв‘язуючи систему алгебраїчних лінійних рівнянь (22) знаходимо шість приростів початкових умов $\Delta y_{ik}, \Delta \dot{y}_{ik}$ i=1,2,3.

5. Перевіряємо, чи значення приростів початкових умов такі, що розв‘язок задачі Коши для системи (12) при новому значенні параметра навантаження $\lambda = \lambda_{k+1}$ задовольняє умовам періодичності, тобто нев‘язки малі. Далі основні операції процедури методу продовження розв‘язку за параметром при побудові кривих навантаження повторюються. В іншому випадку, коли нев‘язка розв‘язку велика, приріст параметра навантаження λ зменшують і знов повторюють основні операції чисельної процедури.

Для реалізації алгоритму побудови кривої навантаження методом продовження розв‘язку за параметром необхідно визначитися з вихідною точкою. Вона знаходиться шляхом розв‘язання задачі Коші для системи (7) з нульовими початковими умовами.

3. Чисельні дослідження та аналіз віброударних рухів, що виникають у реальній висотній споруді

Розглядаємо висотну споруду баштового типу (димову трубу), яка знаходиться під дією вітрового навантаження. Запропонована до розгляду конструкція споруди є типовою.

Висота труби H становить 55 м. Труба являє собою тонкостінну оболонку діаметром 630 мм і товщиною стінки 8 мм. У нижній частині на відмітці +2.0 вертикальна труба переходить у газохід того ж діаметру. З умов міцності та жорсткості на оболонці між відмітками 0,0 та +17,0 запроектовані три вертикальних ребра таврового перерізу, які переходять в опорні елементи – похилі колони (рис. 5). Вважається, що об’єкт знаходиться у III вітровому районі згідно СНиП 2.01.07-85 з нормативним вітровим тиском, що дорівнює 38 кгс/м^2.

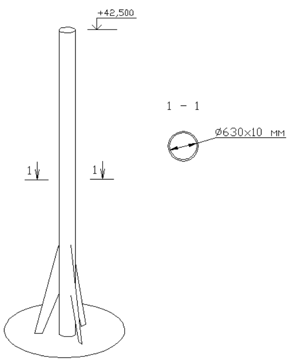


Рис. 5

Для створення розрахункової моделі конструкція була розбита на 11 ділянок. Вагу кожної ділянки і діюче на неї вітрове навантаження було зосереджено в центрі ділянки. Розрахункова модель труби являє собою просторову структуру, яка складається з 33 елементів та 34 вузлів, у 19 з яких зосереджена вага ділянок конструкції. Скінченні елементи являють собою просторові стержні без врахування зсуву, з’єднання стержнів у вузлах прийнято жорстким. Похилі опорні елементи защемлені в основі. Ділянки з ребрами жорсткості моделюються ділянками колового перерізу підвищеної жорсткості. За допомогою пакету програм „МІРАЖ” був проведений модальний аналіз розрахункової моделі труби.

Башта розглядається як система з двома степенями вільності. Далі в таблиці 1 наведені характеристики башти, які відповідають її двом першим формам коливань.

Таблиця 1

Назва характеристики	1-форма (i=1)	2-форма (i=2)
Маса башти m_i (кг)	1148.8	1116.8
Парціальна частота коливань ω_i (рад/с)	2.1774	13.6193
Коефіцієнт демпфірування ξ_i	0.024	0.024
Зовнішнє узагальнене навантаження P_{i0} (Н)	189.875	-51.408
Значення i-ої власної форми коливань у вершині башти $\varphi_i(H)$	1.0	1.0
Значення i-ої власної форми коливань в точці удару $\varphi_i(H-l)$	0.809	0.353

Маятниковий гаситель має такі характеристики: маса $m_{«}$ = 300 кг, довжина стержня l=3.0 м, коефіцієнт демпфірування ξ_m=0.024.

Коли далі будемо досліджувати вплив параметрів маятника, зокрема його маси $m_{«}$ та довжини l на динамічний рух системи, тоді ці параметри будемо змінювати, а поки що вважаємо їх незмінними.

Дослідження були виконані для двох варіантів залежності сили контактної взаємодії F від відстані між тілами, що співударяються – за експоненціальним законом (2) (рис.3) та за комбінованим законом (3) (рис. 4).

3.1 Вибір закону сили контактної взаємодії та підбір її параметрів

Параметри зовнішнього навантаження мають такі значення. Частота зовнішнього впливу, як пояснювалося раніше, дорівнює першій парціальній частоті башти. Поки що працюємо лише на цій частоті: $\omega = \omega_1 = 2.1774$ рад/с.

Параметр інтенсивності зовнішнього навантаження λ змінюється при побудові кривих навантаження, але поки що, для знаходження вихідної точки та дослідження питання вибору моделюючої сили та підбору її параметрів, візьмемо λ=1.0.

Для моделювання сили контактної взаємодії F виберемо експоненціальний закон залежності від відстані між тілами, що співударяються (2) (рис. 3). Підбираємо її параметр σ та коефіцієнт відповідності, який позначимо $\widetilde{C}$, таким чином, щоб при певному значенні λ=1.0 удар моделювався щонайкраще. На рис. 6-9 представлені графіки залежності переміщень тіл ударної системи башта-маятник від часу, фазова траєкторія при одноударному Т-періодичному режимі коливань, що встановлюється, графіки контактної відштовхуючої сили, що виникає в системі згідно інтегруванню, в залежності від часу (рис. 8) та від відстані між баштою та маятником (рис. 9). На рисунках цифрою 1 відмічені криві, що відносяться до башти, а цифрою 2 – до маятника. Амплітуди коливань башти в точці зіткнення $A_{\min} = -0.0095$ м, $A_{\max} = 0.0160$ м.

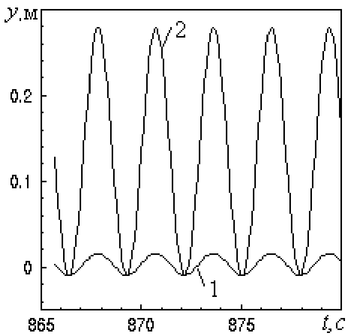


Рис. 6

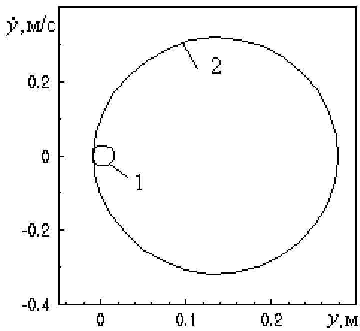


Рис. 7

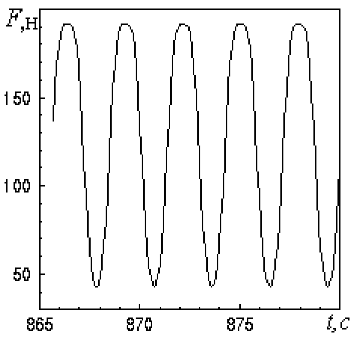


Рис. 8

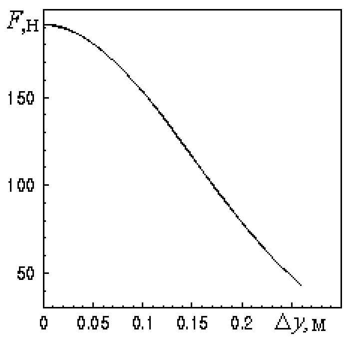


Рис. 9

Графіки одержані при $\tilde{C}$ =72 Нм, σ=0.15 м. Як бачимо на рис. 6 та 7 в момент удару швидкість маятника змінює свій знак, і напрямок його руху стає протилежним.

Під час підбору параметрів моделюючої сили $\tilde{C}$ та σ помічаємо, що якість моделювання удару зберігається незмінно доброю при багатьох інших парах параметрів. Але амплітуди коливань башти відрізняються при цьому в декілька разів. В таблиці 2 для прикладу приведені декілька пар значень цих параметрів і амплітуди коливань башти в точці удару, при цьому якість моделювання удару, як вже відмічалося, залишається доброю.

Таблиця 2

$\tilde{C}$, Нм	43	53	72	75	79
σ, м	0.06	0.10	0.15	0.16	0.17
A_{min}, м	-0.055	-0.030	-0.0095	-0.015	-0.0024
A_{max}, м	0.066	0.037	0.0160	0.012	0.0090

На рис. 10 та 11 для прикладу представлені графіки руху системи при $\tilde{C}$ =43 Нм, σ=0.06 м та $\tilde{C}$ =79 Нм, σ=0.175 м відповідно.

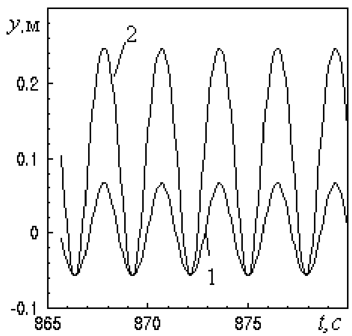


Рис. 10

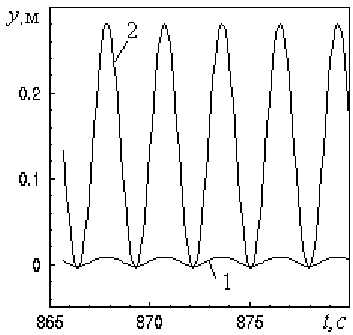


Рис. 11

Таким чином, виникає питання визначення критерію вибору параметрів моделюючої функції. Залишимо поки що це питання відкритим.

Подивимось, що дає комбінований закон залежності моделюючої функції від відстані між баштою та маятником (3) (рис. 4). Спостерігаємо таку саму картину, як і в попередньому випадку – багато груп параметрів k_3, R, d та коефіцієнт відповідності $\widehat{C}$ моделюючої функції забезпечують рівнозначну якість моделювання удару, при цьому амплітуди коливань башти в точці удару відрізняються в різних випадках в кілька разів (табл. 3).

Таблиця 3

k_3	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
R(м)	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045
del (м)	0.580	0.550	0.500	0.450	0.400	0.350
$\widehat{C}$ (Н/м)	350	310	300	290	300	330
$A_{\min}$ (м)	-0.004	-0.002	0.0019	0.0028	-0.0032	-0.012
$A_{\max}$ (м)	0.013	0.0109	0.0066	0.0053	0.0110	0.019

Продовження таблиці 3

k_3	2.2	2.4	2.6	2.7	2.8	2.9
R(м)	0.050	0.055	0.060	0.062	0.064	0.066
del (м)	0.300	0.250	0.200	0.190	0.180	0.170
$\widehat{C}$ (Н/м)	370	440	630	710	820	930
$A_{\min}$ (м)	-0.021	-0.033	-0.047	-0.052	-0.057	-0.060
$A_{\max}$ (м)	0.028	0.039	0.055	0.061	0.067	0.073

На рис. 12-15 представлені графіки руху точки удару башти і маятника, фазова траєкторія та сила F в залежності від часу та відстані між баштою та маятником при k_3=1.0, R=0.020 м, d=0.580 м, $\widehat{C}$ =350 Н/м.

Змінюючи параметри моделюючої функції і досліджуючи амплітуди коливань башти в точці удару, спостерігаємо таке цікаве явище: коли ми рухаємося по таблиці 3 зліва направо, спочатку амплітуда коливань башти зменшується і досягає майже 0, а потім взаємні коливання башти та маятника змінюють фазу, переходячи з антіфази у фазу. При цьому амплітуда коливань башти збільшується (див. рис. 16-19). Підкреслимо, що параметри зовнішнього навантаження при цьому залишаються незмінними: λ=1.0, ω=2.1774 рад/с.

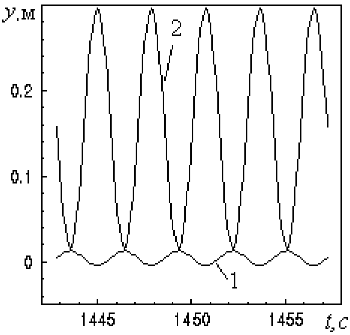


Рис. 12

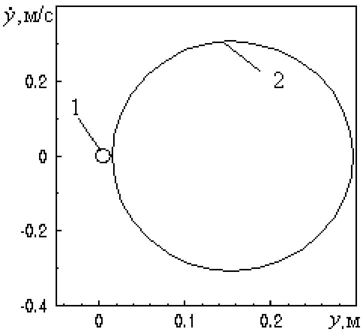


Рис. 13

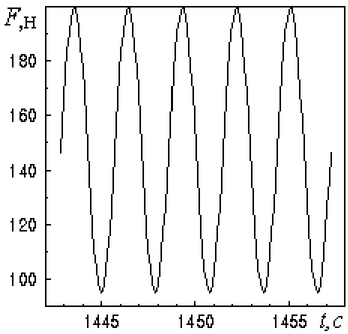


Рис. 14

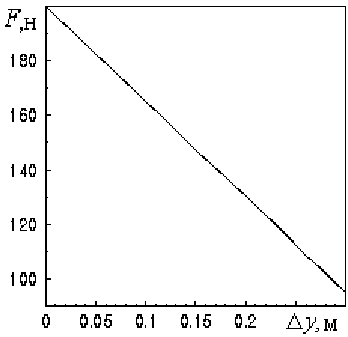
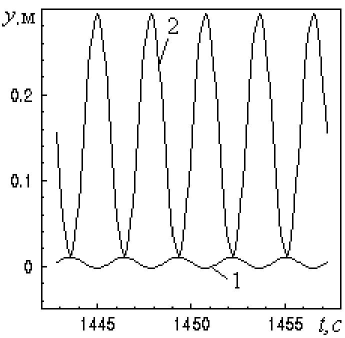


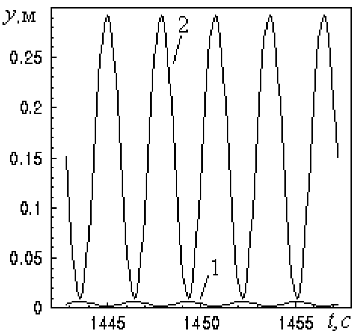
Рис. 15



k_3 =1.2, R=0.025 м, d=0.550м,

$\widehat{C}$ =310Н/м

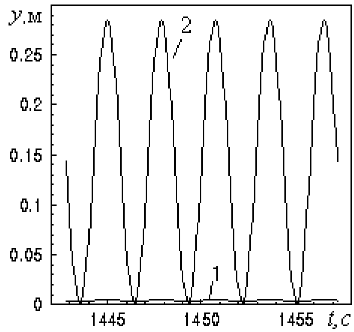
Рис. 16



k_3 =1.4, R=0.030м, d=0.500м,

$\widehat{C}$ =300Н/м

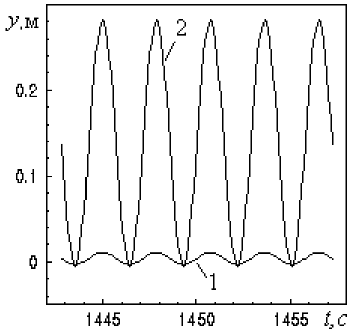
Рис. 17



k_3 =1.6, *R*=0.035м, *d*=0.450м,

$\widehat{C}$ =290Н/м

Рис. 18



k_3 =1.8, *R*=0.040м, *d*=0.400м,

$\widehat{C}$ =300Н/м

Рис. 19

Для наочності спостереження зміни амплітуди приведемо графік руху системи при k_3 =2.8, *R*=0.064м, *d*=0.180м, $\widehat{C}$ =820Н/м (рис. 20).

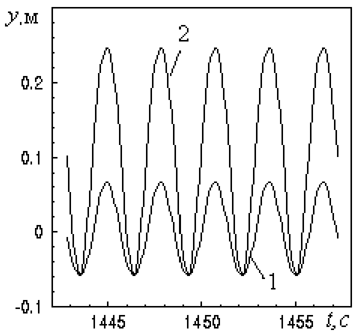


Рис. 20

Таким чином, в цьому випадку також питання критерію вибору параметрів моделюючої функції є вельми актуальним.

Залишаючи це питання поки що не закритим та сподіваючись на подальше його дослідження, оберемо спочатку за критерій амплітуду коливань башти в точці удару, значення якої ми отримуємо, якщо не будемо моделювати удар за допомогою сили контактної взаємодії, а розв‘яжемо задачу удару маятника та башти, вводячи граничні умови в момент удару і використовуючи коефіцієнт відновлення e. Відповідні теорія та методика розв‘язання задач про динамічний рух в віброударних системах з використанням коефіцієнту відновлення та граничних умов в момент удару були описані раніше в [1-4]. Для башти з маятником, що розглядається, при значенні коефіцієнта відновлення e =0.7 отримуємо такий графік руху башти і маятника (рис. 21). Момент удару представлений на окремому рисунку у крупному масштабі (рис. 22).

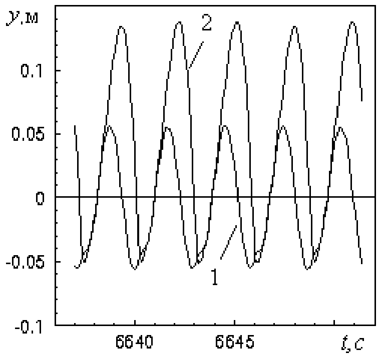


Рис. 21

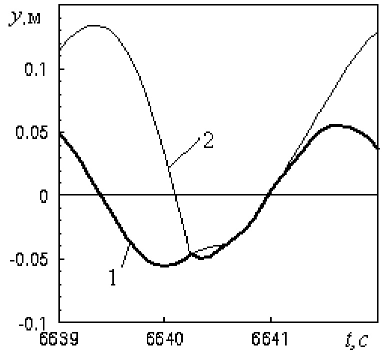


Рис. 22

Амплітуди коливань башти в точці удару мають такі значення:

$$A_{\min} = -\,0.056 \text{ м},\ A_{\max} = 0.056 \text{ м} \ . \qquad (34)$$

Значення цих амплітуд будемо вважати як критерій вибору параметрів функцій, які моделюють силу контактної взаємодії між баштою та маятником. Виходячи з цього виберемо такі значення параметрів моделюючих функцій, при яких амплітуди коливань башти в точці удару співпадають з амплітудами (34).

Для експоненціального закону ці параметри мають значення:

$$\sigma = 0.06 \text{ м та } \tilde{C} = 43 \text{ Нм},$$

для комбінованого закону:

$$k_3 = 2.7,\ R = 0.062 \text{ м},\ d = 0.190 \text{ м},\ \hat{C} = 710 \text{ Н/м}.$$

В цьому випадку одержимо такі графіки руху системи, фазові траєкторії та графіки моделюючої сили згідно інтегруванню в залежності від часу та відстані між баштою та маятником.

Для експоненціального закону:	Для комбінованого закону:
$A_{\min} = -0.055$ м	$A_{\min} = -0.052$ м
$A_{\max} = 0.066$ м	$A_{\max} = 0.061$ м

Як видно з графіків, ми маємо у цих випадках майже повний збіг графіків та значень амплітуд коливань.

Для побудови кривих навантаження методом продовження розв‘язку за параметром в якості вихідної точки ми можемо вибрати будь-яку точку з графіків на рис. 23 та рис. 24.

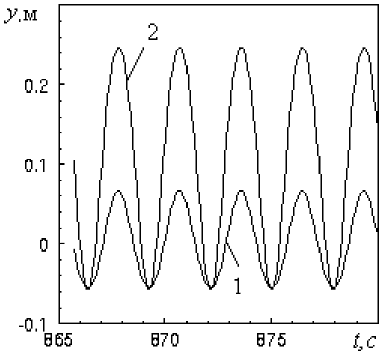


Рис. 23

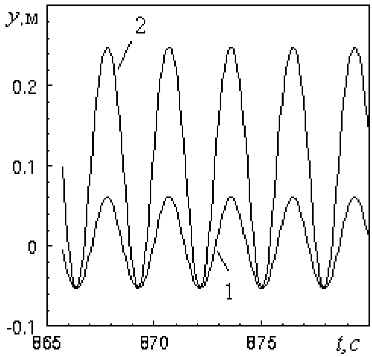


Рис. 24

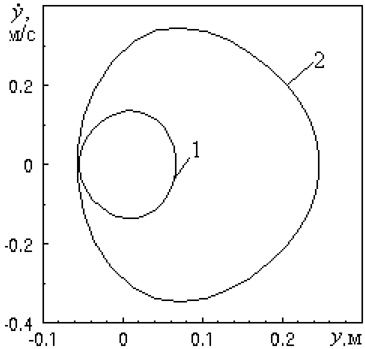


Рис. 25

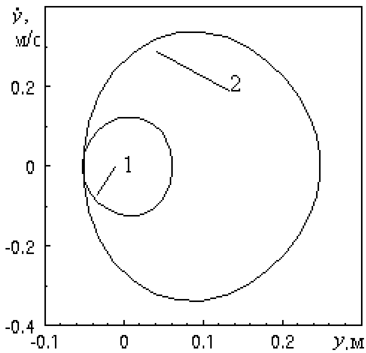


Рис. 26

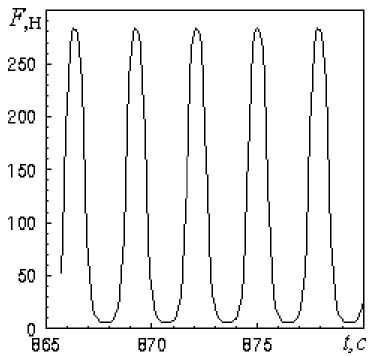


Рис. 27

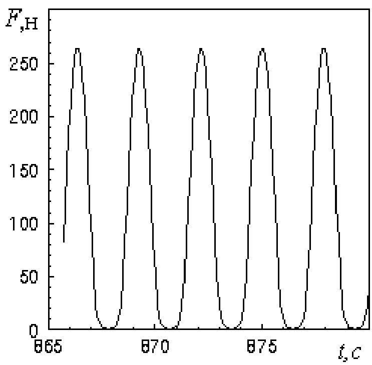


Рис. 28

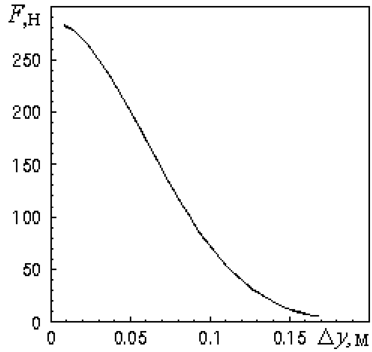


Рис. 29

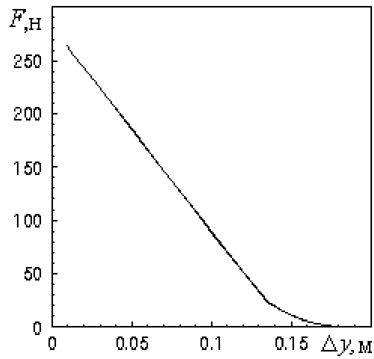


Рис. 30

Підсумовуючи сказане, зробимо висновки.

По-перше, використання моделювання сили контактної взаємодії між баштою та маятником достатньо добре описує вібродинамічні процеси у коливальній системі. При цьому різниці на користь одного із двох законів, що були запропоновані , не визначено. Обидва запропоновані закони, як експоненціальний, так і комбінований, мають ті самі переваги і недоліки.

По-друге, моделювання удару за допомогою сили контактної взаємодії залишається якісним при багатьох групах значень параметрів цієї сили. При цьому амплітуди коливань башти відрізняються в кілька разів. Тому питання розробки надійного критерію вибору цих параметрів є дуже важливим. Як первинний варіант запропоновано за такий критерій брати амплітуду коливань башти в точці удару, отриману при розв‘язанні задачі віброударного руху системи за допомогою використання граничних умов в момент удару та коефіцієнту відновлення.

3.2 Побудова кривої навантаження та її аналіз

Дослідження показали, що сила контактної взаємодії суттєво залежить від динамічного стану системи, а саме від параметрів зовнішнього навантаження – його інтенсивності λ та частоти ω. Не розглядаючи поки що питання залежності від частоти навантаження ω, звернемо увагу на залежність від інтенсивності навантаження λ. Подивимось, чи буде зберігатися якість моделювання удару при зміні цього параметру при застосуванні, наприклад, експоненціального закону опису моделюючої сили.

На рис. 31-32 представлені графіки руху системи башта-маятник при таких значеннях параметрів моделюючої сили: σ=0.06 м та $\tilde{C}$ =43 Нм при λ =0.9 (рис. 31) та λ =1.1 (рис. 32).

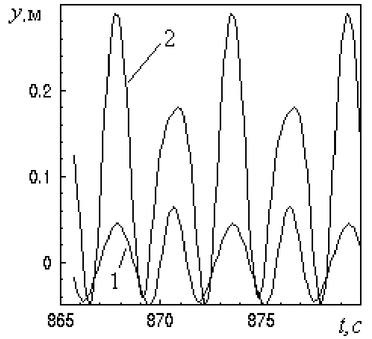


Рис. 31

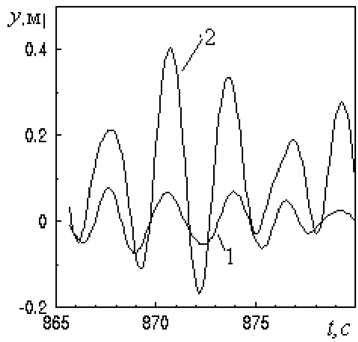


Рис. 32

Порівнюючи ці графіки з даними, наведеними на рис. 23, бачимо, що навіть при такій невеликій зміні інтенсивності навантаження якість моделювання удару не зберігається. Іншими словами, сила контактної взаємодії, яка описується законом (2), незалежним від параметру λ, вже не моделює удар. Тому в ході досліджень було запропоновано ввести в закон моделювання сили контактної взаємодії залежність від λ, а саме:

$$C = \lambda^{1.3} C_1 . \tag{35}$$

Така залежність від параметру інтенсивності навантаження λ була чисельно підібрана і забезпечила непоганий результат. На рис. 33-34 представлені графіки руху системи башта-маятник при тих же значеннях параметрів σ та $\tilde{C}$, що і на рис.31-32, але при введенні в закон моделюючої функції залежності від λ (35). Графіки отримані для λ =0.7 (рис.33) та λ =1.3 (рис. 34).

Як бачимо, при більш значній зміні λ якість моделювання удару зберігається задовільною. Тоді при зберіганні гарної якості моделювання удару при зміні λ, тобто при якісному моделюванні сили контактної взаємодії при різній інтенсивності зовнішнього навантаження маємо можливість використати метод продовження розв‘язку за параметром і побудувати криву навантаження, тобто криву взаємозалежності напіврозмаху коливань башти в точці удару маятника та інтенсивності зовнішнього навантаження λ. На рис.35 приведена така крива (вона помічена на рисунку цифрою 1). Крім того на рис.35 наведені криві навантаження башти без маятника (вона помічена на рисунку цифрою 0) та башти з маятником, але без удару, тобто динамічним маятником (вона помічена на рисунку цифрою 2).

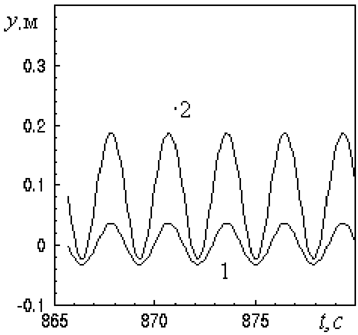


Рис. 33

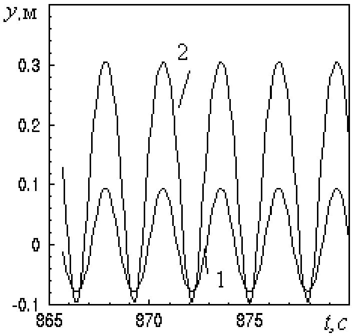


Рис. 34

Аналізуючи ці криві, бачимо, що обидва гасителя, як ударний, так і динамічний, гасять коливання башти дуже добре, зменшуючи амплітуду коливань башти в багато разів. При більшій інтенсивності зовнішнього навантаження (λ>0.68) динамічний гаситель більш ефективний, при меншій інтенсивності (λ<0.68) більш ефективним є ударний гаситель. Підкреслимо, що ці висновки зроблені на підставі кривої навантаження, яка будується при фіксованій частоті зовнішнього навантаження ($\omega = \omega_1 = 2.1774$ рад/с).

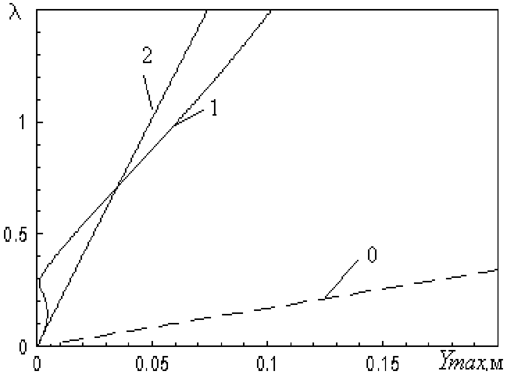


Рис. 35

Аналізуючи криву навантаження башти з ударним маятником, бачимо цікаве явище – петлю при малих значеннях λ. При інтенсивності λ=0.27 амплітуда коливань башти в точці удару зменшується майже до 0 (рис. 36), а при ще менших λ вона збільшується. На рис. 37-38 представлені графіки руху системи башта-маятник при значеннях параметру зовнішнього навантаження λ=0.15 та λ=0.10 відповідно. Відзначимо, що коливання системи башта-маятник перейшли при цьому в антіфазу.

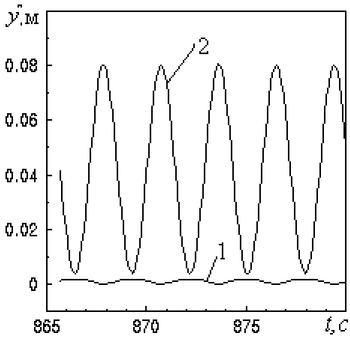


Рис. 36

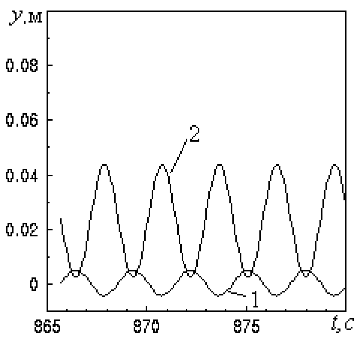


Рис. 37

Таке саме явище складної зміни амплітуди коливань башти і зміни взаємної фази коливань спостерігалися й в іншому випадку, коли змінювались значення параметрів моделюючої функції (див. рис. 16-19). Можна припустити, що таке явище властиво цій складній нелінійній віброударній системі башта-маятник.

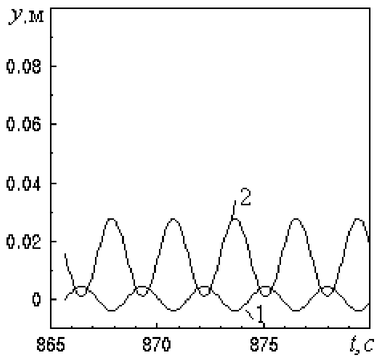


Рис. 38

Підсумовуючи сказане, зробимо такі висновки.

По-перше, сила контактної взаємодії, яку ми вводимо для моделювання удару, залежить не тільки від відстані між тілами, що співударяються, але й від динамічного стану системи.

По-друге, побудовані криві навантаження для башти без маятника, башти з динамічним безударним маятником та ударним маятником доводять, що динамічні маятники, як безударні, так і ударні, дуже ефективно гасять коливання башти, зменшуючи амплітуду цих коливань в багато разів (при фіксованій частоті зовнішнього навантаження ω).

По-третє, крива навантаження для башти з ударним маятником демонструє цікаве явище зменшення амплітуди коливань башти майже до 0 і її збільшення при подальшому зменшенні інтенсивності навантаження. При цьому відбувається зміна фази коливань при невеликому навантаженні.

Підкреслимо ще раз, що дослідження проводились на одній частоті зовнішнього навантаження $\omega = \omega_1$, яка співпадає з першою парціальною частотою башти.

3.3 Аналіз залежності амплітудно-частотних характеристик башти з маятником від довжини та маси маятника

Вище було сказане і доведене, що сила контактної взаємодії, яку ми вводимо для моделювання удару, залежить від динамічного стану системи, зокрема від інтенсивності зовнішнього навантаження λ. Тепер подивимося, чи залежить вона від частоти зовнішнього навантаження ω.

Будемо використовувати моделюючу силу F у такому вигляді, в якому ми вибрали раніше, тобто $\tilde{C}$ =43 Нм, σ=0.06 м (експоненціальний закон зміни моделюючої функції), параметр інтенсивності навантаження λ=1. Змінимо частоту зовнішнього навантаження (до цієї пори вона дорівнювала першій парціальній частоті башти $\omega = \omega_1 = 2.1774$ рад/с). Подивимось, чи збережеться при цьому якість моделювання удару. На рис. 39, 40 представлені графіки руху системи башта-маятник при невеликій зміні зовнішньої частоти ω - на рис.39 ω=2.00 рад/с, на рис.40 ω=2.35 рад/с.

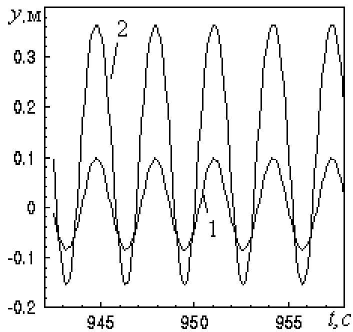


Рис. 39

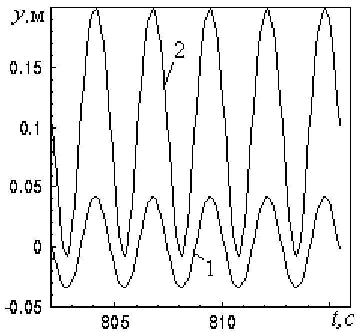


Рис. 40

Порівнюючи з рис. 23, який був отриманий при ω=2.1774 рад/с, бачимо, що навіть при невеликій зміні частоти зовнішнього навантаження, але при параметрах моделюючої сили, що не були змінені, якість моделювання удару значно погіршується. Тобто така сила вже не моделює удар, звідкіля випливає, що її параметри залежать не тільки від інтенсивності зовнішнього навантаження λ, але і від його частоти ω. Проблема полягає у відповіді на питання, яка ця залежність і як її ввести в закон зміни сили контактної взаємодії. Це питання потребує подальших досліджень і поки що залишається відкритим. Тому, будуючи амплітудно-частотну залежність системи башта-маятник на кожному кроці необхідно коректувати параметри моделюючої сили, щоб зберегти якість удару.

Подивимось, як впливає частота зовнішнього навантаження ω на амплітуди коливань башти, тобто побудуємо амплітудно-частотні залежності. При цьому простежимо, як ці залежності змінюються при зміні характеристик маятника – його маси та довжини. Порівнюємо також амплітудно-частотні залежності башти без маятника A_0 , башти з маятником але без удару (динамічний маятниковий гаситель) та башти з ударним маятником.

В таблиці 4 приведені напіврозмахи коливань башти без маятника в точці удару при різних частотах зовнішнього навантаження.

Таблиця 4

ω_1, рад/с	1.80	1.90	1.95	2.00	2.05	2.10	2.17	2.20	2.30	2.40
A_0 , м	0.10	0.14	0.16	0.20	0.27	0.40	0.69	0.63	0.26	0.15

В таблицях 5-7 приведені напіврозмахи коливань башти в точці удару з динамічним (безударним) $A_{1\ дин}$ та ударним $A_{2\ уд}$ маятником при його довжині l=1.5 м і масах $m_м$ =100, 200,300 кг відповідно.

Таблиця 5

l=1.5 м , $m_м$ =100 кг

ω_1, рад/с	1.80	1.90	1.95	2.00	2.05	2.10	2.17	2.20	2.30	2.40
$A_{1\ дин}$, м	0.16	0.33	0.59	0.67	0.30	0.18	0.10	0.09	0.05	-.030
$A_{2\ уд}$, м	0.13	0.20	0.26	0.40	0.74	0.39	0.23		0.12	

Таблиця 6

l=1.5 м , $m_м$ =200 кг

ω_1, рад/с	1.80	1.85	1.90	1.95	2.00	2.05	2.10
$A_{1\ дин}$, м	0.37	0.72	0.49	0.23	0.15	0.10	0.077
$A_{2\ уд}$, м			0.35	0.77		0.36	

Таблиця 7

l=1.5 м, $m_м$ =300 кг

ω_1, рад/с	1.65	1.70	1.75	1.80	1.70	1.85	1.90	1.95
$A_{1\ дин}$, м	0.20	0.30	0.60	0.66	0.30	0.26		0.020
$A_{2\ уд}$, м							0.61	0.40

Подивимось тепер, як впливає довжина маятника на амплітуди коливань башти. В таблиці 8 приведені напіврозмахи коливань башти в точці удару з динамічним та ударним маятником при його довжині l=3.0м і масі $m_м$ =200 кг.

Таблиця 8

l=3.0 м , $m_м$ =200 кг

ω_1, рад/с	1.85	1.90	1.95	2.00	2.05	2.15	2.25	2.35	2.45	2.55	2.65
$A_{1\ дин}$, м			0.027	0.035	0.044	0.065	0.11	0.23	0.41	0.19	0.11
$A_{2\ уд}$, м	0.22	0.50	0.43	0.32	0.23	0.13	0.10	0.070	0.055	0.045	0.036

На рисунках 41-44 побудовані криві, які відповідають цим таблицям: на рис. 41-43 для маятника довжиною l=1.5 м, а на рис. 44 – довжиною l=3.0 м. Криві, які відповідають башті без маятника позначені цифрою 0 (вони нарисовані більш товстою лінією), башті з маятником без удару – цифрою 1, з маятником з ударом – цифрою 2.

З цих рисунків видно, що динамічний маятниковий гаситель, як ударний так і безударний, зміщує зону резонансних частот башти. Величина цього зміщення різна для ударного та безударного маятників, вона залежить також від маси маятника та його довжини. При більшій довжині (l=3.0 м*)* спостерігаємо не тільки зміщення зони резонансу, але також і деяке зменшення резонансної амплітуди коливань.

Цей результат слід вважати попереднім, оскільки закон залежності моделюючої сили від частоти зовнішнього навантаження є ще не достатньо дослідженим, і амплітудо-частотні залежності побудовані “ручну”, але залежності наочно демонструють вплив частоти зовнішнього навантаження на амплітуди коливань башти з маятником і залежність цих коливань від характеристик маятника – його маси і довжини. Тому такі залежності становлять чималий інтерес.

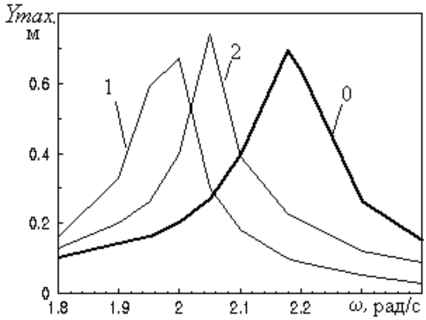


Рис. 41

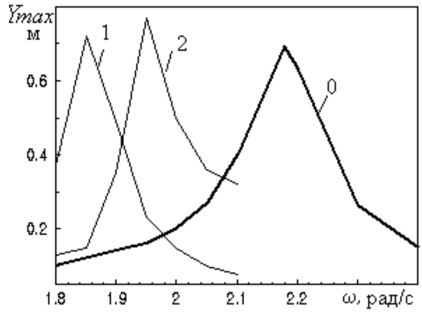


Рис. 42

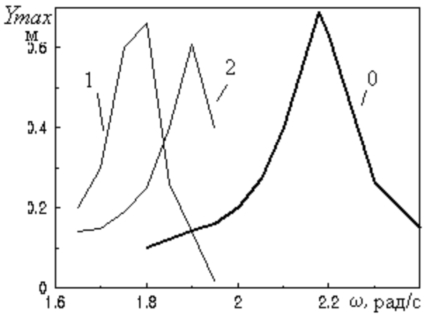


Рис. 43

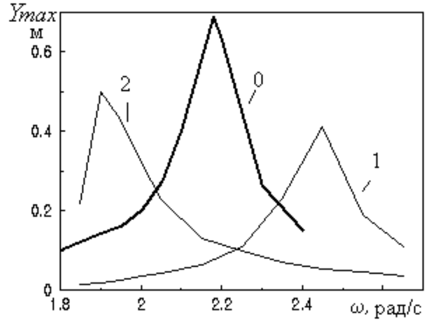


Рис. 44

Підводячи підсумки, зробимо такі висновки.

По-перше, дослідження ще раз довели, що сила контактної взаємодії, яка моделює удар, залежить від динамічного стану системи, зокрема від частоти зовнішнього навантаження.

По-друге, побудовані амплітудно-частотні залежності коливань системи башта-маятник наочно демонструють вплив частоти зовнішнього навантаження, а також характеристик маятника, на амплітуди коливань башти.

Таким чином, підсумовуючи сказане, підкреслимо, що використання сили контактної взаємодії для моделювання удару між баштою і маятником достатнє вдало описує вібродинамічні процеси у коливальній системі. Єдина форма запису рівнянь руху віброударних систем на всій часовій осі дозволяє описати повну сукупність реалізованих рухів, тому цей підхід є дуже перспективним.

Запропоновані закони залежності такої сили від відстані між тілами, що співударяються, мають як переваги, та і недоліки і потребують подальшого удосконалення і дослідження.

1. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Стійкість сталих режимів коливань віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10-18.
2. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2002.-Вип.70.- С.69-80.
3. *Постнікова Т.Г., Погорелова О.С., Борисенко В.Г.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при зовнішньому ударному контакті // Матеріали Третьої Всеукраїнської наукової конференції "Математичні проблеми технічної механіки" - Дніпродзержинськ. - 2003.- С.97.
4. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- С.31-44.
5. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при моделюванні удару із застосуванням нелінійних силових характеристик контактної взаємодії// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2004.-Вип.74.- С.14-23.
6. *С.М.Гончаренко* Моделювання вітрового навантаження при розрахунку випадкових коливань висотних споруд баштового типу // Доповідь на 65-й науково практичній конференції КНУБА. –К. 2004 р.
7. *Баженов В.А., Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П.*Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейних механических системах //Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
8. *В.В.Степанов.* Курс дифференциальных уравнений. Москва, 1958, 498 с.

Надійшла до редколегії 10.10.2005 р.