

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Солодей І.І., канд. техн. наук,
Шевченко Ю.В., аспірант

АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ ДЛЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ НАПІВАНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Важливим етапом в реалізації обчислювальних систем для розв'язання просторових задач динаміки є вибір оптимальних, з точки зору швидкості і складності процесів деформування, алгоритмів інтегрування рівнянь руху у часі, особливістю яких в даній роботі є їх розвиток в рамках НМСЕ. Відомо, що вибір того чи іншого алгоритму пов'язаний із швидкістю протікання процесу деформування та характеру навантажень. При аналізі перехідних процесів найбільше розповсюдження отримав метод узагальнених координат, який припускає розклад розшукуваного рішення в ряд по формах власних коливань. В цілому, для розв'язання систем рівнянь динаміки рекомендовані прямі методи безпосереднього інтегрування по часовій координаті, залишаючи модальні методи для проблем, що пов'язані з використанням нижньої частини частотного спектру. Широке розповсюдження отримали неявні схеми інтегрування за часом (метод Н'юмарка, метод θ -Вільсона), які допускають у порівнянні з явними значно більший крок по параметру. Специфіка алгебраїчних рівнянь НМСЕ зумовлена порушенням ортогональності базисних функцій у просторі оператора пружності для тіл із змінними вздовж направляючої параметрами жорсткості і мас. Явно виділена клітинна структура як матриці жорсткості, так і матриці мас, є підставою для використання алгоритмів, що комбінують прямі та ітераційні методи розв'язання. Поєднання ітераційних циклів, що з однієї сторони пов'язані з порушенням однорідності об'єкту вздовж направляючої, а з іншої є природними для самих алгоритмів (метод ітерацій у підпросторі) дозволяє значно зменшити обчислювальні витрати на розв'язання задачі. Для ефективного пошуку рішення задач динаміки, на сьогоднішній день, потрібно володіти всім набором засобів аналізу, чітко представляти правила і границі їх застосування. До того ж, високі вимоги до розрахункових моделей, що закладені до сучасної нормативної бази припускають розгляд динамічних навантажень різного рівня інтенсивності, які можуть діяти на конструкцію в один і той же момент часу, що в свою чергу потребує ретельного дослідження меж достовірного використання того чи іншого алгоритму.

Вступ. Задача визначення переміщень, швидкостей та прискорень традиційно зводиться до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку для моменту часу t , яка отримана після просторової скінченно-елементної дискретизації [2]:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{Q\}. \quad (1)$$

Методика обчислення коефіцієнтів матриць мас $[M]$, жорсткості $[K]$ та вектора зовнішніх навантажень $\{Q\}$ на основі кільцевого незамкненого неоднорідного скінченного елемента з довільними граничними умовами на торцях приведена в роботі [5].

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0 , який приймається за початок часової координати [4]

$$\{U\}|_{t=t_0} = \{U_0\}, \quad \{\dot{U}\}|_{t=t_0} = \{\dot{U}_0\}. \quad (2)$$

Особливістю напіваналітичного метода скінченних елементів є характерна блокова структура амплітудних матриць та векторів вирішуючих рівнянь:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{l_0 l_0} & \cdots & [K]_{l_0 m} & \cdots & [K]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [K]_{ll_0} & \cdots & [K]_{ll} & \cdots & [K]_{ll} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{Ll_0} & \cdots & [K]_{Lm} & \cdots & [K]_{LL} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{l_0 l_0} & \cdots & [M]_{l_0 m} & \cdots & [M]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [M]_{ll_0} & \cdots & [M]_{ll} & \cdots & [M]_{ll} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [M]_{Ll_0} & \cdots & [M]_{Lm} & \cdots & [M]_{LL} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \{U\}^T &= \{\dot{U}_{l_0}\}^T \quad \cdots \quad \{\dot{U}_l\}^T \quad \cdots \quad \{\dot{U}_L\}^T, \\ \{\dot{U}\}^T &= \{\ddot{U}_{l_0}\}^T \quad \cdots \quad \{\ddot{U}_l\}^T \quad \cdots \quad \{\ddot{U}_L\}^T, \\ \{\ddot{U}\}^T &= \{\ddot{\ddot{U}}_{l_0}\}^T \quad \cdots \quad \{\ddot{\ddot{U}}_l\}^T \quad \cdots \quad \{\ddot{\ddot{U}}_L\}^T, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\{Q\}^T = \left\{ \{Q\}_{l_0}^T \quad \dots \quad \{Q\}_l^T \quad \dots \quad \{Q\}_L^T \right\}. \quad (6)$$

Кожний блок матриць (3), (4) представляє собою стрічкову амплітудну підматрицю, що зформована для двовимірної сіткової області, яка апроксимує поперечний переріз тіла.

У класичному випадку НМСЕ, для однорідних вздовж направляючої тіл обертання при використанні базисних функцій у вигляді рядів Фур'є система рівнянь (1) розпадається на низку незалежних амплітудних систем для кожного із членів ряду:

$$[M]_{ll} \{\ddot{U}\}^l + [K]_{ll} \{U\}^l = \{Q\}_l, \quad l = l_0 \dots L. \quad (7)$$

При аналізі тіл обертання із змінними вздовж направляючої фізико-механічними параметрами або незамкнених тіл обертання з довільними граничними умовами не вдається досягти розділу змінних та подати задачу у вигляді (7).

Методи прямого інтегрування. Розглянемо метод Ньюмарка, який представляє клас неявних умовно стійких схем інтегрування [3]. Невідомі значення амплітудних векторів переміщень та швидкостей в момент часу $t+\Delta t$ представимо через значення цих же параметрів на попередньому кроці за часом по скінченно-різницеvim формулам:

$$\begin{aligned} \{\dot{U}\}^{t+\Delta t} &= \{\dot{U}\}^t + \left[(1-\delta)\{\ddot{U}\}^t + \delta\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} \right] \Delta t, \\ \{U\}^{t+\Delta t} &= \{U\}^t + \{\dot{U}\}^t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{U}\}^t + \alpha \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\delta \geq 0.5$, $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$ - умови, які визначають стійкість схеми інтегрування, що розглядається.

Подаючи $\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}$ через $\{U\}^{t+\Delta t}$:

$$\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[\{U\}^{t+\Delta t} - \{U\}^t - \{\dot{U}\}^t \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{U}\}^t \right] + \{\ddot{U}\}^t, \quad (9)$$

запишемо кінетичну енергію системи для того ж момента часу:

$$[M] \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} = \{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} - \{\bar{\bar{R}}_\rho\}^t, \quad (10)$$

де

$$\{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} = a_0 [M] \{U\}^{t+\Delta t}, \quad (11)$$

$$\{\bar{R}_\rho\}^t = [M] \{a_0 \{U\}^t + a_2 \{\dot{U}\}^t + a_3 \{\ddot{U}\}^t\}, \quad (12)$$

які визначають собою частини вузлових інерційних амплітудних реакцій в моменти часу $t+\Delta t$ та t .

Тоді система рівнянь (1) для набуває вигляду:

$$\{\bar{K}\}^{t+\Delta t} \{U\}^{t+\Delta t} = \{\bar{Q}\}^{t+\Delta t}, \quad (13)$$

де

$$\{\bar{K}\}^{t+\Delta t} = [K]^{t+\Delta t} + a_0 [M] \quad - \quad (14)$$

ефективна амплітудна матриця жорсткості задачі динаміки,

$$\{\bar{Q}\}^{t+\Delta t} = \{Q\}^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}^t \quad - \quad (15)$$

ефективний амплітудний вектор зовнішніх навантажень,

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1.$$

Вирішуючи систему рівнянь (13) одержуємо значення амплітуд переміщень у момент часу $t+\Delta t$, за якими обчислюємо амплітуди швидкостей та прискорень для момента часу $t+\Delta t$:

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} &= a_0 (\{U\}^{t+\Delta t} - \{U\}^t) - a_2 \{\dot{U}\}^t - a_3 \{\ddot{U}\}^t, \\ \{\dot{U}\}^{t+\Delta t} &= \{\dot{U}\}^t + a_6 \{\ddot{U}\}^t + a_7 \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}, \end{aligned} \quad (16)$$

де $a_6 = \Delta t(1-\delta)$, $a_7 = \delta \Delta t$.

За допомогою формул гармонійного аналізу:

$$\{U\}_{coord}^{t+\Delta t} = \sum_{l=l_0}^L \{U\}_l^{t+\Delta t} \psi_{k'}^l, \quad (17)$$

знаходимо координатні значення переміщень, а також координатні значення всіх параметрів напружено-деформованого стану тіла. $\{U\}_{coord}^{t+\Delta t} = \{u_{k',e}^{t+\Delta t}\}$, $\psi_{k'}^l$ - базисні функцій для апроксимації невідомих задачі вздовж направляючої, k' - індекс, що визначає базисну просторову систему координат [1], e - індекс вузлів дискретної моделі.

Так як усі блоки матриці (13) не нульові, застосування прямих методів, серед яких найбільше розповсюдження отримав фронтальний метод Гауса [3], для вирішення систем типу (13) призведе до не виправдано великих витрат машинного часу. Поряд з прямими методами розв'язання систем лінійних рівнянь широко використовуються ітераційні методи, які забезпечують задану точність результатів [3]. Апроксимація конструкції вздовж направляючої майже ортогональною в енергетичному просторі оператора теорії пружності системою базисних [тригонометричних або поліноміальних] функцій забезпечує добру обумовленість матриці (14). У даному випадку віддають перевагу блоково-ітераційним процедурам, серед яких однією з найбільш ефективних є метод блокової (групової) релаксації, який полягає в застосуванні методу послідовної верхньої релаксації до груп невідомих:

Клітинна структура систем рівнянь напівааналітичного метода скінченних елементів природньо визначає вибір блоку ітераційного процесу у вигляді підсистеми, що формується для одного члена ряду розкладу невідомих вздовж направляючої:

$$\{U\}_{j,i+1}^{l,t+\Delta t} = \{U\}_i^{l,t+\Delta t} + \omega [\mathcal{K}]_l^{-1} \left(\{\mathcal{G}\}_l^{t+\Delta t} - \{\tilde{R}\}_{j,i}^{t+\Delta t} \right), \quad (18)$$

де $\{\tilde{R}\}_{j,i}^{t+\Delta t}$ - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації i кроку $t+\Delta t$, який визначається співвідношенням:

$$\{\tilde{R}\}_{j,i}^{t+\Delta t} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [\mathcal{K}]_{lm} \{U\}_{j,i+1}^{m,t+\Delta t} + \sum_{m=l}^L [\mathcal{K}]_{lm} \{U\}_i^{m,t+\Delta t}, \quad (19)$$

$\{U\}_{j,i+1}^{m,t+\Delta t}$, $\{U\}_i^{m,t+\Delta t}$ - амплітудні значення вузлових переміщень в момент часу $t+\Delta t$ на ітераціях $i+1$ та i відповідно, ω - параметр релаксації ($1 \leq \omega < 2$).

На кожному кроці за часом ітераційний процес закінчується на ітерації $I=i$, якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t} \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t} \right\|, \quad (20)$$

де $\{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t}$ - прирощення амплітудних переміщень на ітерації i у момент часу $t+\Delta t$, $\{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t} = \sum_{i=1}^I \{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t}$ - вектор прирощень

амплітудних переміщень у момент часу $t+\Delta t$, $\|\{\Delta U\}\| = \|\{\Delta U\}\|^2$, ε - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

З метою достовірності вище викладеної методики для призматичних тіл розглянуто коливання консольної жорстко закріпленої балки, довжиною $L = 10$ дюймів з квадратним поперечним перетином 1×1 дюймів [1]. Апроксимація об'єкту здійснюється 10 СЕ по довжині балки. До верхньої і нижньої площин балки прикладається вертикальне рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $p = 2.85$ фунтів/дюйм - по $p/2$ до кожної площини. Навантаження прикладається миттєво і не змінюється в процесі деформування. Рішення задачі отримане при різних кроках інтегрування у часі на часовому проміжку $t \in [0; 12.15 \cdot 10^{-3}]$ с.

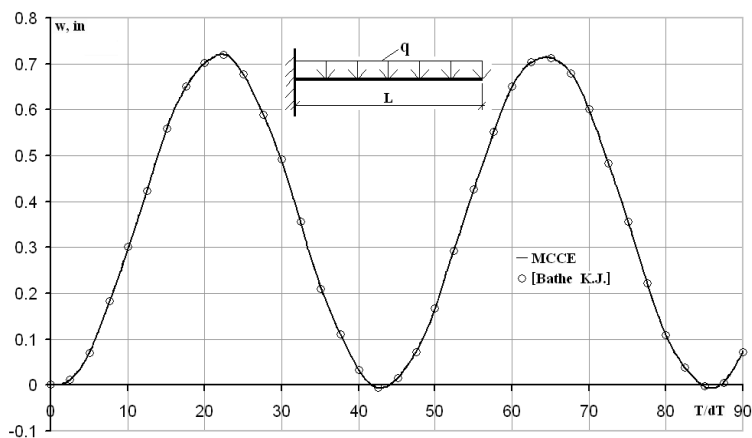


Рис. 1

За еталонні прийняті результати, отримані в роботі [1]. В табл.1 наведені максимальні переміщення крайньої точки консольної балки та період коливань при рішенні за допомогою програмних комплексів NASTRAN та MCCE. Проведена внутрішня збіжність результатів розрахунку. За базовий крок інтегрування в часі прийнято $\Delta t = 1.35 \times 10^{-4}$ с. Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого при найменшому кроці в часі $-0.5\Delta t$ що добре узгоджується з еталонним результатом.

Таблиця 1

MMCE				
Δt	w, in	%	Період $T \times 10^{-3}$, c	%
0.5 Δt	7.25	0	5.65	0
1 Δt	7.24	0.14	5.67	-0.35
2 Δt	7.20	0.69	5.74	-1.56
4 Δt	7.12	1.79	5.87	-3.95
Nastran				
Δt	w, in	%	Період $T \times 10^{-3}$, c	%
0.5 Δt	7.37	0	5.61	0
1 Δt	7.30	0.95	5.67	-1.07
2 Δt	7.27	1.39	5.78	-3.03
4 Δt	7.07	4.06	6.32	-12.66

В той же час для підтвердження достовірності наведеної методики для однорідних тіл обертання проведено аналіз динамічного деформування жорстко защемленого по краям вісесиметричного купола під дією рівнорозподіленого навантаження інтенсивності $p=600$ lb/in [1]. Навантаження прикладається миттєво в початковий момент часу і не змінюється на всьому проміжку часу, що розглядається $t \in [0; 10^{-3}]$ sec. Геометричні розміри купола: середній радіус - $R = 22.27$ in; товщина купола - $h = 0.41$ in; кут розвору - $\alpha = 26.67$. Фізико-механічні характеристики: $E = 10.5 \times 10^6$ lb/in²; $\nu = 0.3$; $\rho = 2.45 \times 10^{-4}$ lb-sec²/in⁴. Крок інтегрування в часті $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-5}$. За еталонні прийняті результати отримані в роботі [1].

На рис. 2. представлений графік вертикального переміщення середини купола при рішенні за допомогою програмних комплексів NASTRAN та MMCE, що добре узгоджуються з еталонним рішенням. В табл. 2 приведені результати внутрішньої збіжності рішення, при розв'язку з різними кроками в часі, в точках екстремумів графіка функцій переміщень середини купола.

Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого при найменшому кроці в часі - $0.5\Delta t$, що засвідчує гарну поведінку збіжності алгоритмів обох програмних комплексів.

Щоб підтвердити достовірність MMCE в порівнянні з традиційним MCE було розглянуто коливання однорідного товстостінного сталевго нескінченного циліндра з характеристиками матеріалу: $E=2.1 \times 10^{11}$ Па, $\rho=7.8 \times 10^3$ кг/м³, $\nu=0$, під дією рівнорозподіленого по частині зовнішньої

поверхні тиску з інтенсивністю $q_a=1\text{Па}$. Схема навантаження та геометричні розміри моделі показані на рис. 3, де $R_{\text{зов}}=2\text{ м}$, $R_{\text{внутр}}=1\text{ м}$,

$\alpha=45^\circ$, $(q_a = \begin{cases} 0, & \alpha < 45^\circ \\ -1, & \alpha \geq 45^\circ \end{cases} \text{Па})$. Навантаження прикладене миттєво і

утримувалось на всьому інтервалі дослідження $t \in [0; 8 \cdot 10^{-3}] \text{ с}$. По товщині моделі утримували 15 СЕ, по кільцевій координаті 72 СЕ. Проведено внутрішню збіжність рішення при вихідному кроці інтегрування в часі $\Delta t=0.4 \times 10^{-4} \text{ с}$.

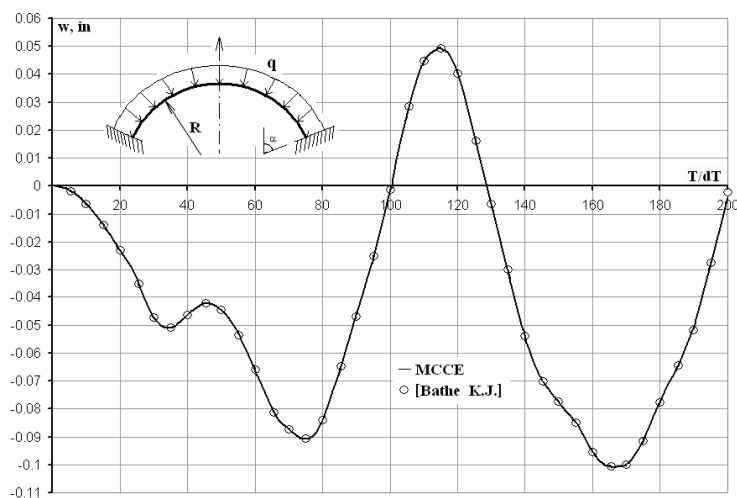


Рис. 2

Отримані рішення задачі пружного динамічного деформування циліндра за допомогою МСЕ та НМСЕ при різних кроках інтегрування в часі.

В табл. 3 наведено внутрішню збіжність горизонтального переміщення точки D при розрахунках з різними кроками в часі. Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого при найменшому кроці в часі – $0.5\Delta t$, що засвідчує однакову поведінку традиційного МСЕ та НМСЕ.

Проведено апробацію методики для суттєво неоднорідних тіл обертання. В якості тестового прикладу було розглянуто коливання товстостінного сталевго неоднорідного нескінченного циліндра з характеристиками матеріалу: $E_1=2.1 \times 10^{11} \text{Па}$, $E_2=1.05 \times 10^{11} \text{Па}$, $\rho=7.8 \times 10^3 \text{кг/м}^3$, $\nu=0$, під дією рівнорозподіленого по частині зовнішньої

поверхні тиску з інтенсивністю $q_a=1\text{Па}$, ($q_a = \begin{cases} 0, \alpha < 45^\circ \\ -1, \alpha \geq 45^\circ \end{cases} \text{Па}$). Схема навантаження та геометричні розміри моделі показані на рис. 4.

Таблиця 2

HMCE				
Δt	1 максимум ($t=1.7 \cdot 10^{-4}$)	%	2 максимум ($t=3.6 \cdot 10^{-4}$)	%
$0.5\Delta t$	-5.08 e-02	0.00	-9.13 e-02	0.00
$1\Delta t$	-5.09 e-02	-0.16	-9.08 e-02	0.49
$2\Delta t$	-5.15 e-02	-1.21	-9.00 e-02	1.40
$4\Delta t$	-5.06 e-02	0.53	-8.88 e-02	2.67
Δt	3 максимум ($t=5.75 \cdot 10^{-4}$)	%	4 максимум ($t=8.4 \cdot 10^{-4}$)	%
$0.5\Delta t$	4.99 e-02	0.00	-1.02 e-01	0.00
$1\Delta t$	4.93 e-02	1.30	-1.01 e-01	0.79
$2\Delta t$	4.94 e-02	1.06	-1.01 e-01	0.52
$4\Delta t$	4.65 e-02	6.97	-9.54 e-02	6.09
Nastran				
Δt	1 максимум ($t=1.7 \cdot 10^{-4}$)	%	2 максимум ($t=3.6 \cdot 10^{-4}$)	%
$0.5\Delta t$	-5.21 e-02	0.00	-8.89 e-02	0.00
$1\Delta t$	-5.23 e-02	-0.38	-8.91 e-02	-0.23
$2\Delta t$	-5.28 e-02	-1.34	-8.87 e-02	0.23
$4\Delta t$	-5.18 e-02	0.58	-8.63 e-02	2.93
Δt	3 максимум ($t=5.75 \cdot 10^{-4}$)	%	4 максимум ($t=8.4 \cdot 10^{-4}$)	%
$0.5\Delta t$	5.00 e-02	0.00	-9.81 e-02	0.00
$1\Delta t$	4.99 e-02	0.20	-9.77 e-02	0.41
$2\Delta t$	4.94 e-02	1.20	-9.37 e-02	4.49
$4\Delta t$	4.19 e-02	16.20	-9.30 e-02	5.20

Отримані рішення задачі пружного динамічного деформування циліндра за допомогою МСЕ та HMCE. По товщині моделі утримували 15 СЕ, по кільцевій координаті 72 СЕ.

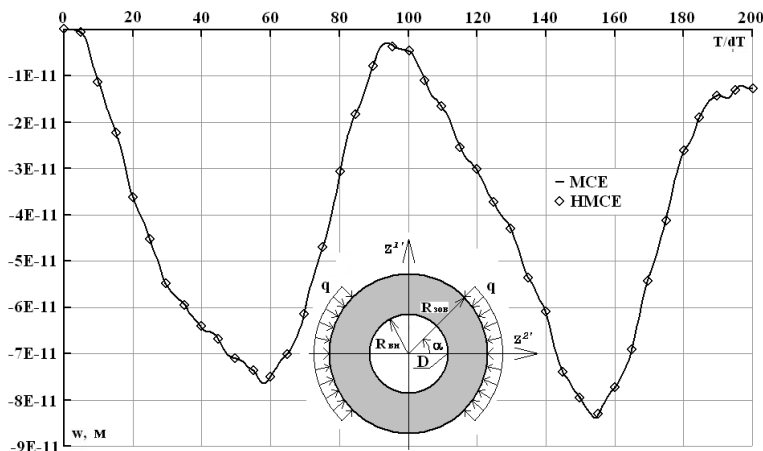


Рис. 3

Таблиця 3

Δt	MCE		HMCE	
	w, м	%	w, м	%
$0.5\Delta t$	-7.56e-11	0.00	-7.61e-11	0.00
$1\Delta t$	-7.64e-11	-1.09	-7.71e-11	-1.28
$2\Delta t$	-7.42e-11	1.83	-7.48e-11	1.65
$4\Delta t$	-7.36e-11	2.59	-7.42e-11	2.47

В табл. 4 приведено горизонтальне переміщення точки D при розрахунках з різними кроками в часі. За вихідний крок інтегрування у часі прийнято $\Delta t = 0.4 \times 10^{-4}$ с.

При обчисленні похибки у відсотках до рішення отриманого при найменшому кроці в інтегрування часі – $0.5\Delta t$, отриманий результат засвідчує гарну збіжність з еталонним.

Розклад невідомих за власними формами. В багатьох випадках для розв'язання системи звичайних диференціальних лінійних рівнянь руху дискретної моделі (1) при заданих початкових умовах (2) використовується чисельний підхід заснований на розкладі розшукуваного рішення по формам власних коливань конструкції.

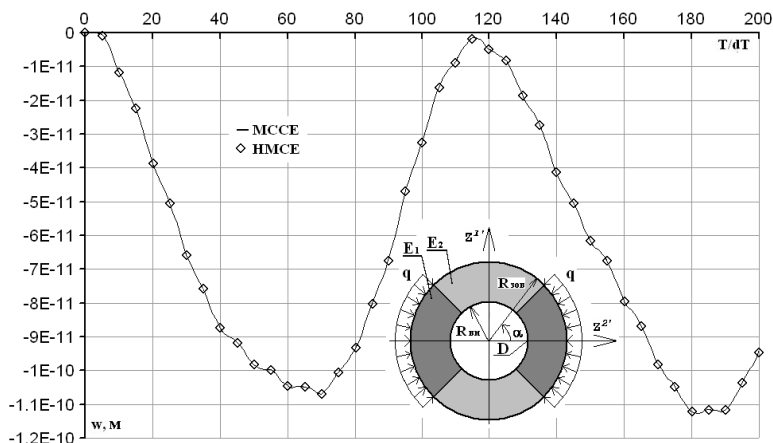


Рис. 4

Таблиця 4

Δt	MCE		HMCE	
	w, M	%	w, M	%
$0.5 \Delta t$	-1.06 e -10	0.00	-1.07 e -10	0.00
$1 \Delta t$	-1.06 e -10	0.55	-1.07 e -10	0.25
$2 \Delta t$	-1.06 e -10	0.66	-1.05 e -10	1.99
$4 \Delta t$	-1.05 e -10	1.69	-1.04 e -10	2.52

Перехід до нормальних координат здійснюється в результаті лінійного перетворення:

$$\{U\} = [\Phi]\{X\}, \quad (21)$$

де

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \{\Phi\}_{r_0}^{l_0} & \dots & \{\Phi\}_r^{l_0} & \dots & \{\Phi\}_\Omega^{l_0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \{\Phi\}_{r_0}^l & \dots & \{\Phi\}_r^l & \dots & \{\Phi\}_\Omega^l \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\Phi\}_{r_0}^L & \dots & \{\Phi\}_r^L & \dots & \{\Phi\}_\Omega^L \end{bmatrix}, \quad \{X\}^T = \{x_{r_0} \quad \dots \quad x_r \quad \dots \quad x_\Omega\}, \quad (22)$$

$\{\Phi\}_r^l$ - l-та амплітуда r-ї власної форми дискретної моделі, що знаходиться за допомогою модального аналізу конструкції; $x_r(t)$ -

невідомі вагові коефіцієнти рішення для r -ої власної форми; Ω – кількість власних форм, які утримуються при лінійному перетворенні.

Виконавши підстановку (21) в (1) і домноживши зліва на $[\Phi]^T$:

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{X}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{X\} = [\Phi]^T \{Q\}, \quad (23)$$

отримаємо систему рівнянь (23), яка з урахуванням ортогональності власних форм:

$$[\Phi]^T [M][\Phi] = [I], \quad [\Phi]^T [K][\Phi] = [\Lambda], \quad (24)$$

$$\text{де } [\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{r_0} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_\Omega \end{bmatrix}, \quad \lambda_r - \text{власне значення } r\text{-ої власної форми,}$$

перетворюється до низки незалежних диференціальних рівнянь вигляду:

$$[I]\{\ddot{X}\} + [\Lambda]\{X\} = [\Phi]^T \{Q\} \quad (25)$$

з початковими умовами у вигляді:

$$\{X_0\} = [\Phi]^T [M]\{\dot{U}_0\}, \quad \{\dot{X}_0\} = [\Phi]^T [M]\{\dot{U}_0\}, \quad (26)$$

тут

$$\{X_0\}^T = \{x_{r_0}^{t_0} \quad \cdots \quad x_r^{t_0} \quad \cdots \quad x_\Omega^{t_0}\}, \quad \{\dot{X}_0\}^T = \{\dot{x}_{r_0}^{t_0} \quad \cdots \quad \dot{x}_r^{t_0} \quad \cdots \quad \dot{x}_\Omega^{t_0}\}.$$

Рішення звичайного диференціального рівняння 2-го порядку (25) подається інтегралом Дюамеля:

$$\{X\}^t = [CC]^t \{X\}^{t_0} + [SS]^t \{\dot{X}\}^{t_0} + \int_{t_0}^t [SS]^{t-\tau} [\Phi]^T \{Q\} d\tau, \quad (27)$$

де

$$[CC]^\tau = \text{diag}[\cos \theta_r \tau], \quad [SS]^\tau = \text{diag}\left[\frac{\sin \theta_r \tau}{\theta_r}\right], \quad \theta_r = \sqrt{\lambda_r}.$$

Для кожного з рівнянь можна записати

$$x_r^t = x_r^{t_0} \cos \theta_r t + \dot{x}_r^{t_0} \frac{\sin \theta_r t}{\theta_r} + \frac{1}{\theta_r} \int_{t_0}^t \sum_{l=l_0}^L \{\Phi\}_r^{lT} \{Q\}_l^\tau \sin \theta_r (t-\tau) d\tau, \quad (28)$$

Обчислення інтегралу виконується чисельно на основі формули прямокутників.

Розв'язання проблеми власних значень. Узагальнена проблема власних значень, з якої повинні бути визначені Ω власних рішень, тобто амплітудні матриці $[\Phi]$ та $[\Lambda]$, формулюється у вигляді

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Lambda], \quad (29)$$

при цьому набір власних векторів $[\Phi] \in [M]$ - ортогональним, тобто задовольняє умовам (24), та $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r \leq \dots \leq \lambda_\Omega$.

При аналізі вільних коливань найбільш ефективним для визначення спектру власних форм та частот є метод зворотніх ітерацій у підпросторі з ортогоналізацією по Граму-Шмідту.

Використовуючи деякий набір початкових векторів $[\tilde{Y}]_1$ на кожній ітерації $n = 1, 2, \dots$ обчислюємо наступні наближення:

$$[K][\tilde{Y}]_{n+1} = [Q]_n, \quad [Q]_n = [M][\tilde{Y}]_n \quad (30)$$

де

$$[Y] = \begin{bmatrix} \{Y\}_{r_0}^{l_0} & \dots & \{Y\}_r^{l_0} & \dots & \{Y\}_\Omega^{l_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{Y\}_{r_0}^l & \dots & \{Y\}_r^l & \dots & \{Y\}_\Omega^l \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{Y\}_{r_0}^L & \dots & \{Y\}_r^L & \dots & \{Y\}_\Omega^L \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \{Q\}_{r_0}^{l_0} & \dots & \{Q\}_r^{l_0} & \dots & \{Q\}_\Omega^{l_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{Q\}_{r_0}^l & \dots & \{Q\}_r^l & \dots & \{Q\}_\Omega^l \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{Q\}_{r_0}^L & \dots & \{Q\}_r^L & \dots & \{Q\}_\Omega^L \end{bmatrix}.$$

Ортогоналізовані амплітудні вектори розшукуваного рішення, які формують амплітудну матрицю $[Y]$ обчислюються у відповідності до процедури Грама-Шмідта:

$$\{Y\}_{r,n+1}^l = \{\tilde{Y}\}_{r,n+1}^l - \sum_{s=1}^{r-1} \alpha_{l,n+1}^s \{\tilde{Y}\}_{s,n}^l, \quad (31)$$

де

$$\alpha_{l,n+1}^s = \frac{\sum_{m=l_0}^L \{\tilde{Y}\}_{s,n}^{lT} [M]_{lm} \{\tilde{Y}\}_{r,n+1}^m}{\sum_{m=l_0}^L \{\tilde{Y}\}_{s,n}^{lT} [M]_{lm} \{\tilde{Y}\}_{s,n}^m},$$

або у векторному вигляді:

$$[Y]_{n+1} = [\bar{Y}]_{n+1} [R]_{n+1}, \quad (32)$$

де $[R]_{n+1}$ - верхня трикутна матриця.

Припускаючи, що початкові амплітудні вектори з $[\tilde{Y}]_1$ не ортогональні до розшукуваного набору власних форм, при завершенні ітераційного циклу отримаємо:

$$[Y]_{n+1} \rightarrow [\Phi], [R]_{n+1} \rightarrow [\Lambda]. \quad (33)$$

Для виконання умов ортогональності (24) нормуємо набір амплітудних векторів $[\tilde{Y}]_{n+1}$ у розумінні приведення їх довжин до одиниці з ваговою матрицею $[M]$:

$$[\tilde{Y}]_{n+1} = \frac{[Y]_{n+1}}{\left([Y]_{n+1}^T [M] [Y]_{n+1}\right)^{1/2}}. \quad (34)$$

На кожній n -ій ітерації із співвідношення Релея обчислюємо наближення до власних чисел:

$$[\Lambda]_{n+1} = \frac{[\bar{Y}]_{n+1}^T [K] [\tilde{Y}]_n}{[\bar{Y}]_{n+1}^T [M] [\bar{Y}]_{n+1}}. \quad (35)$$

Збіжність ітераційного процесу перевіряється за допомогою:

$$\frac{|\lambda_{r,n+1} - \lambda_{r,n}|}{\lambda_{r,n+1}} \leq \varepsilon, \quad \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n}^l \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_r^l \right\|. \quad (36)$$

Похибка ε повинна бути менше або рівною 10^{-2s} , якщо власні значення $[\Lambda]$ потрібно обчислити з точністю до $2s$ цифр. Власний вектор тоді буде мати s або більше вірних цифр.

Основним кроком методу зворотніх ітерацій у підпросторі є розв'язання системи рівнянь (30) для визначення амплітудної $[\bar{Y}]_{n+1}$, більш близької до власних векторів у порівнянні з попереднім наближенням $[\tilde{Y}]_n$.

Для неоднорідних тіл або при використанні для апроксимації вздовж направляючої системи майже ортогональних базисних функцій матриця

$[K]$ рівняння (30) має багатодіагональну структуру, тому на кожній n -ій ітерації методу зворотніх ітерацій для розв'язання систем лінійних рівнянь (30) найбільш ефективно використовувати процедуру методу блочних ітерацій з верхньою релаксацією. Розмір блоку методу блочної верхньої релаксації визначається амплітудними підматрицями жорсткості та мас. Тоді процес розв'язання набуває вигляду:

$$\{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i+1} = \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i} + \omega[K]_{ll}^{-1} \{Q\}_{r,n}^l + \{R\}_{r,n+1}^{l,i}, \quad (37)$$

де $\{R\}_{r,n+1}^{l,i}$ - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації i , який визначається співвідношенням:

$$\{R\}_{r,n+1}^{l,i} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{m,i+1} + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{m,i}. \quad (38)$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації $I=i$, якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i} \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^l \right\|, \quad (39)$$

де $\{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i}$ - прирошення амплітудних невідомих на ітерації i ,

$\{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^l = \sum_{i=1}^I \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i}$ - вектор прирошень амплітудних невідомих,

$\|\{\Delta \bar{Y}\}\| = \|\{\Delta \bar{Y}\}\|^2$, ε - наперед задане мале додатнє число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

У загальному випадку ітераційні процеси будуються послідовно. Сумарна кількість ітерацій відповідає добутку кількості ітерацій на двох ітераційних циклах.

В даній роботі пропонується підхід що ґрунтується на можливості одночасного проведення ітераційних процедур методу зворотніх ітерацій та ітераційного процесу, що викликаний наявністю задіагональних членів матриць мас та жорсткості. Для одного блоку методу блочної верхньої релаксації, (30) можна записати як:

$$\sum_{m=l_0}^L [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m = \{Q\}_{r,k}^l, \quad \{Q\}_{r,k}^l = \sum_{m=l_0}^L [M]_{lm} \{\tilde{Y}\}_{r,k}^m. \quad (40)$$

Ітераційний процес подається у вигляді:

$$\{\bar{Y}\}_{r,k+1}^l = \{\bar{Y}\}_{r,k}^l + \omega [K]_{ll}^{-1} (\{Q\}_{r,k}^l + \{R\}_{r,k}^l), \quad (41)$$

де

$$\{R\}_{r,k}^l = \sum_{m=l_0}^{l-1} [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k}^m. \quad (42)$$

Процедура ортогоналізації має вигляд:

$$\{Y\}_{r,k+1}^l = \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^l - \sum_{s=1}^{r-1} \alpha_{l,k+1}^s \{\tilde{Y}\}_{s,k}^l, \quad (43)$$

$$\text{де } \alpha_{l,k+1}^s = \frac{\sum_{m=l_0}^L \{\tilde{Y}\}_{s,k}^{lT} [M]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m}{\sum_{m=l_0}^L \{\tilde{Y}\}_{s,k}^{lT} [M]_{lm} \{\tilde{Y}\}_{s,k}^m}.$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації $K=k$, якщо виконуються умови:

$$\frac{|\lambda_{r,k+1} - \lambda_{r,k}|}{\lambda_{r,k+1}} \leq 10^{-2s} \quad \text{та} \quad \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,k}^l \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_r^l \right\|, \quad (44)$$

$\{\Delta \bar{Y}\}_{r,k}^l$ - прирощення амплітудних невідомих на ітерації k ,

$\{\Delta \bar{Y}\}_r^l = \sum_{k=1}^K \{\Delta \bar{Y}\}_{r,k}^l$ - вектор прирощень амплітудних невідомих,

$\|\{\Delta \bar{Y}\}\| = \|\{\Delta \bar{Y}\}\|^2$, ε - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

Власні значення та нормований вектор властивих форм обчислюємо за формулами:

$$[\Lambda]_{k+1} = \frac{\sum_{m=l_0}^L \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^{lT} [K]_{lm} \{\tilde{Y}\}_{r,k}^m}{\sum_{m=l_0}^L \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^{lT} [M]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m}, \quad (45)$$

$$\{\tilde{Y}\}_{r,k+1}^l = \frac{\{Y\}_{r,k+1}^l}{\left(\sum_{m=l_0}^L \{Y\}_{r,k+1}^{lT} [M]_{lm} \{Y\}_{r,k+1}^m \right)^{1/2}}. \quad (46)$$

Для прискорення ітераційного процесу існують апіорні оцінки вибору кількості утриманих власних форм і частот. Наприклад в роботі [3] пропонується вибір $\Omega = \min\{2P, P+8\}$, де P - необхідна кількість власних форм та частот, що повинні бути визначені з достатньою точністю, [6] пропонує підхід $\Omega = 4P/3$. Проведені дослідження показали, що для задач $\Omega < 10-15$ ефективніше використовувати перший підхід, але при збільшенні частотного спектру значно зростає та стає переважною ефективність другого підходу.

З метою проведення апробації даної методики розкладу по власним формам для однорідних тіл обертання проведено аналіз коливань жорстко защемленого по краям вісесиметричного купола під дією рівнорозподіленого навантаження інтенсивності $p=600$ фунтів/дюйм [1]. Вихідні данні розглянуто в попередній частині. Навантаження прикладається миттєво в початковий момент часу і не змінюється на всьому проміжку часу, що розглядається $t \in [0; 10^{-3}]$ с, при рішенні утримувався крок інтегрування в часі $\Delta t=0.5e-5$.

На рис. 5 представлено графік вертикального переміщення середини купола при рішенні за допомогою програмних комплексів NASTRAN та MMCE при утриманні різної кількості власних частот.

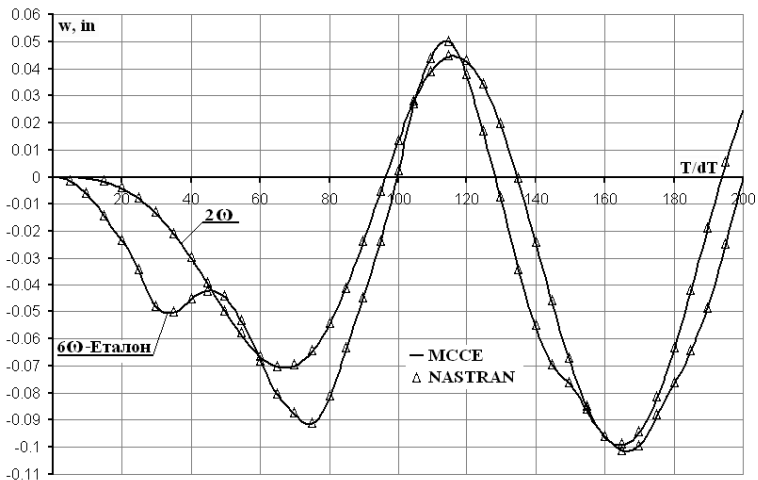


Рис. 5

В табл. 5 приведені результати збіжності отриманого рішення при різних кількості утриманих власних частот в точках екстремумів графіка

функцій переміщень середини купола. Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого при рішенні даної задачі прямим методом, що добре узгоджується з еталонним результатом. Як засвідчили отримані результати похибка не перевищує 2% в порівнянні з еталонним рішенням досягається вже при утриманні 6 і більше власних форм.

Таблиця 5

К-сть w	HMCE			
	1 максимум	%	2 максимум	%
2w	-	-	-7.08 e -02	-22.64
4w	-4.82 e -02	-5.49	-8.98 e -02	-1.95
6w	-5.11 e -02	0.31	-9.12 e -02	-0.37
8w	-5.09 e -02	0.00	-9.16 e -02	0.00
К-сть w	3 максимум	%	4 максимум	%
2w	4.46 e -02	-10.58	-9.94 e -02	-2.24
4w	5.02 e -02	0.51	-9.93 e -02	-2.26
6w	4.97 e -02	-0.40	-1.02 e -01	-0.02
8w	4.99 e -02	0.00	-1.02 e -01	0.00
К-сть w	Nastran			
	1 максимум	%	2 максимум	%
2w	-	-	-6.84 e -02	-23.06
4w	-4.84 e -02	-7.63	-8.89 e -02	0.00
6w	-5.19 e -02	-0.95	-8.89 e -02	0.00
8w	-5.24 e -02	0.00	-8.89 e -02	0.00
К-сть w	3 максимум	%	4 максимум	%
2w	4.48 e -02	-10.04	-9.74 e -02	-1.22
4w	5.01 e -02	0.60	-9.56 e -02	-3.04
6w	5.00 e -02	0.40	-9.78 e -02	-0.81
8w	4.98 e -02	0.00	-9.86 e -02	0.00

Для підтвердження реалізації HMCE в порівнянні з традиційним MCE було розглянуто коливання товстостінного сталевго однорідного нескінченного циліндра. Розрахункова схема, характер навантаження та фізико-механічні данні приведено вище.

Отримані рішення напружено-деформованого стану конструкції за допомогою МСЕ та НМСЕ при розкладі рішення по власним частотам. По товщині моделі утримували 15 СЕ, по кільцевій координаті 72СЕ. Крок інтегрування у часі становив $\Delta t=0.4 \times 10^{-4}$ с.

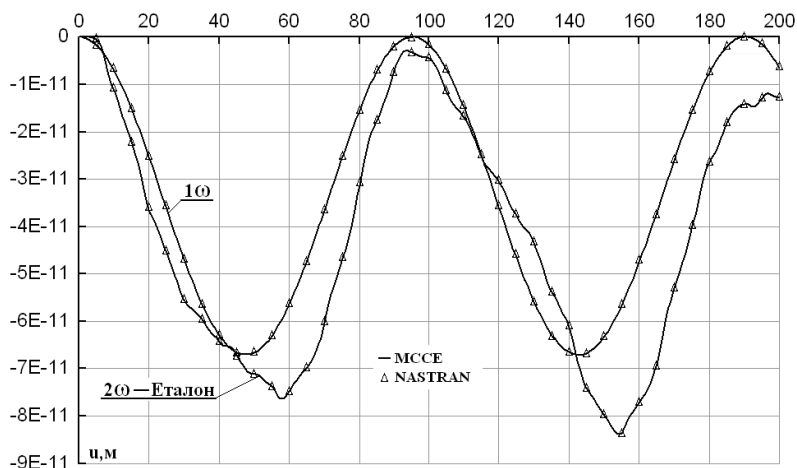


Рис. 6

Таблиця 6

NASTRAN				
	1 max $t=2.32e-3$ с	%	2 max $t=6.16e-3$ с	%
прямий	-7.58E-11	0.00	-8.30E-11	0.00
8w	-7.58E-11	0.03	-8.28E-11	0.20
4w	-7.62E-11	-0.59	-8.38E-11	-0.96
2w	-7.58E-11	-0.05	-8.35E-11	-0.55
1w	-7.09E-11	6.51	-7.09E-11	14.65
HMCE				
	1 max $t=2.32e-3$ с	%	2 max $t=6.16e-3$ с	%
прямий	-7.64E-11	0.00	-8.38E-11	0.00
8w	-7.63E-11	0.08	-8.34E-11	0.49
4w	-7.68E-11	-0.51	-8.44E-11	-0.65
2w	-7.63E-11	0.16	-8.41E-11	-0.31
1w	-6.71E-11	12.23	-6.71E-11	20.00

В табл. 6 приведено горизонтальне переміщення точки D при розрахунках з утриманням різної кількості власних частот. Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого прямим методом. Результати розрахунків засвідчують похибку менше 1% в порівнянні з еталонним рішенням при використанні 2 і більше власних частот.

1. *Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L.* "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis" // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*- 1975.- 5, N 2, PP. 353-386.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
3. *Bate K., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.
4. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. -483с.
5. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Піскунов С.О., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 77. - С. 3-29.
6. *Сахаров А.С., Кислоокій В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с

Надійшло до редакції 24.11.2006 р.