

УДК 539.3

Чибіряков В.К., доктор. техн. наук,
Жупаненко І.В.

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКУ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ

Для розрахунку тонкої круглої пластини на динамічні впливи пропонується алгоритм, в основу якого покладено методику динамічного розрахунку стержневих систем. Алгоритм базується на розрахунковій моделі, що є континуальною за жорсткісними властивостями та дискретною за інерційними.

Вісесиметрична задача динаміки тонкої круглої пластини одновимірна по просторовій координаті, але відповідне рівняння згину містить змінні коефіцієнти, тож динамічний розрахунок базується на застосуванні спеціальних функцій.

В будівельній механіці для одновимірної за просторовими координатами задачі динаміки використовується зручний та ефективний алгоритм. Так, для дослідження коливань балки з розподіленою масою використовують розрахункову модель, що є континуальною за жорсткісними властивостями та дискретною за інерційними. Тобто балка розділяється на окремі ділянки, маси яких зосереджуються в певних точках континуальної безінерційної одновимірної моделі. Для континуальної системи з зосередженими масами складаються рівняння руху, що утворюють систему звичайних диференціальних рівнянь за часом, яка при застосуванні методу сил в матричній формі має вигляд:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = \mathbf{B} \cdot \vec{P}, \quad (1)$$

де $\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ - матриця-стовпчик степенів вільності зосереджених мас (n

- кількість динамічних степенів вільності); $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$ -

матриця інерції; $\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$ - матриця впливу сил інерції;

$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \dots \\ P_m(t) \end{bmatrix}$ - матриця-стовпчик зосереджених зовнішніх сил, що діють в

певних точках осі балки; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta'_{11} & \delta'_{12} & \dots & \delta'_{1m} \\ \delta'_{21} & \delta'_{22} & \dots & \delta'_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \delta'_{m1} & \delta'_{m2} & \dots & \delta'_{mm} \end{bmatrix}$ - матриця впливу

зосереджених зовнішніх сил.

Рівняння (1) дозволяє розглянути всі основні динамічні задачі для балки: розрахунок на власні, вимушені та нестационарні коливання. При цьому забезпечується достатня для практики точність. Але для інших одновимірних задач складання рівнянь типу (1) має деякі особливості.

Згадані особливості розглянемо на прикладі задачі про дослідження вісесиметричних коливань тонкої кільцевої пластини (рис. 1).

Розбиваючи кільцеву пластину на n однакових по координаті r ділянок, тобто

$$r_{j+1} = r_j + \Delta r, \left(j = \overline{1, n} \right);$$

$$\Delta r = \frac{r_l - r_o}{n},$$

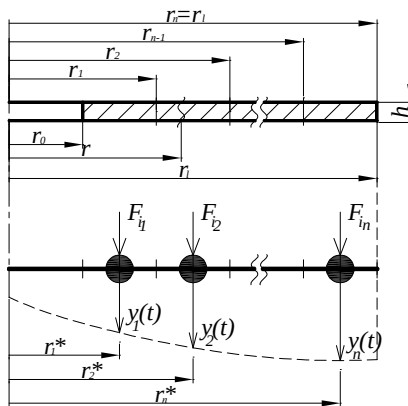


Рис. 1. Кільцева пластина

та прикладаючи до континуальної безмасової пластини відповідну зосереджену (по r !) масу в центрі ваги кожної ділянки, отримаємо

дискретну за інерційними та континуальну за жорсткісними властивостями розрахункову модель, рівняння руху якої мають вигляд:

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = \mathbf{Bp} \cdot \vec{P}(t) \quad (2)$$

де

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} - \delta_{jk} - \text{переміщення від одиничної (по } r) \text{ сили } F_{ik} \text{ в напрямку сили інерції } F_{ij};$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^* \end{bmatrix}, \text{ де } m_j^* = \frac{\pi \cdot (r_j^2 - r_{j-1}^2)}{2 \cdot \pi \cdot r_j^*},$$

$$r_j^* = \frac{2}{3} \frac{r_j^2 + r_j \cdot r_{j-1} + r_{j-1}^2}{r_j + r_{j-1}};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta'_{11} & \delta'_{12} & \dots & \delta'_{1m} \\ \delta'_{21} & \delta'_{22} & \dots & \delta'_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \delta'_{m1} & \delta'_{m2} & \dots & \delta'_{mm} \end{bmatrix} - \delta'_{jl} \left(\begin{matrix} j = \overline{1, n} \\ l = \overline{1, m} \end{matrix} \right) - \text{переміщення в напрямку}$$

j -ї степені вільності від одиничної зосередженої по r сили $P_l(t) = 1$.

На відміну від матриці $\mathbf{\Pi}$ для балки, матриця $\mathbf{\Pi}$ для кільцевої пластини не є симетричною. Однак симетричною матрицею є добуток матриць $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R}$, що випливає з відповідної теореми взаємності переміщень, яку отримаємо, виходячи з диференціального рівняння згину балки, записаного у вигляді:

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{r \cdot q(r)}{D}. \quad (3)$$

Запишемо роботу зовнішніх сил одного стану на переміщеннях іншого стану (характеристики якого позначаються зірочкою):

$$A_{I,II} = \int_{r_0}^{r_l} \frac{r \cdot q(r) \cdot w^*(r)}{D} dr.$$

Підставляючи замість $r \cdot q(r) / D$ вираз, що розташований в лівій частині рівняння (3) та інтегруючи чотири рази по частинах, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_l} \frac{r \cdot q \cdot w^*}{D} dr &= w^* \cdot r \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \Big|_{r_0}^{r_l} - \frac{dw^*}{dr} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \Big|_{r_0}^{r_l} + \\ &+ \frac{dw}{dr} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw^*}{dr} \right) \Big|_{r_0}^{r_l} - w \cdot r \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw^*}{dr} \right) \right] \Big|_{r_0}^{r_l} + \int_{r_0}^{r_l} \frac{r \cdot q^* \cdot w}{D} dr. \end{aligned}$$

Якщо обидва стани кільцевої пластини задовольняють однаковим однорідним граничним умовам, то всі позаінтегральні члени зникають. Оскільки розглядається пластина сталої жорсткості, то ліву і праву частину отриманої рівності можна скоротити на D , і остаточно маємо:

$$\int_{r_0}^{r_l} r \cdot q(r) \cdot w^*(r) dr = \int_{r_0}^{r_l} r \cdot q^*(r) \cdot w(r) dr. \quad (4)$$

Розглядаючи навантаження $q(r)$ як зосереджене по координаті r в точці $r = r_j$, тобто $q(r) = \delta(r - r_j)$ і відповідно $q^*(r) = \delta(r - r_k)$, та користуючись властивостями дельта-функції Дірака, при інтегруванні з (4) отримуємо теорему взаємності переміщень для кільцевої пластини у вигляді:

$$r_j \cdot w^*(r_j) = r_k \cdot w(r_k)$$

або, користуючись позначеннями будівельної механіки для степеней вільності $w^*(r_j) = \delta_{kj}$ та $w(r_k) = \delta_{jk}$, маємо:

$$r_j \cdot \delta_{kj} = r_k \cdot \delta_{jk}. \quad (5)$$

Із співвідношення (5) випливає симетрія матриці $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$. Це головна особливість алгоритму динамічного розрахунку кільцевої пластини, яка дозволяє поширити на кільцеву пластину всю послідовність розв'язання різних динамічних задач для балки.

В будівельній механіці стержневих систем елементи матриць впливу $\mathbf{P}$ та $\mathbf{V}$ знаходяться за формулою Мора, що враховує континуальний

характер розрахункової моделі. Але в більш складних випадках одновимірних задач, зокрема при розрахунку кільцевої пластини, формулу Мора застосувати неможливо. Натомість елементи цих матриць можуть бути знайдені з будь-якою точністю розв'язанням відповідних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, що описують одиничні стани, за методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [1].

Для цього розрахункове рівняння (3) запишемо у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\vec{Y}}{dx} = \mathbf{A} \cdot \vec{Y} + \vec{F}, \quad (6)$$

$$\text{де } \vec{Y} = \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ Q \\ M \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu/r & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/r & 0 \\ 0 & -(1-\nu^2)/r^2 & 1 & -(1-\nu)/r \end{bmatrix}, \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Невідомі функції повинні задовільняти певним однорідним граничним умовам. За навантаження q розглядається зосереджене по r навантаження

$$q(r) = \delta(r - r_k), \left(k = \overline{1, n} \right).$$

Алгоритм методу дискретної ортогоналізації відомий [1]. В даному випадку слід відзначити особливість побудови часткового розв'язку неоднорідної системи. До $r = r_k$ цей частковий розв'язок нульовий по всіх

компонентах, тобто $\vec{Y}_q(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ для $r < r_k$. Оскільки розглядається зосереджене

навантаження, то перерізуючи сила при переході через точку $r = r_k$ змінюється скачком на (-1) , інші компоненти розв'язку неперервні. Далі продовжується інтегрування неоднорідної системи (6). Зосереджений характер навантаження таким чином враховується точно, а оскільки задачі Коші розв'язуються методом Рунге-Кутта-Фельберга з контролем точності на кроці [2], то побудова одиничних станів виконується з будь-якою точністю.

Подальший розв'язок різних динамічних задач наступний.

Задача 1. Знаходження частот і форм власних коливань.

Розв'язок системи однорідних рівнянь (2)

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = 0 \quad (7)$$

шукаємо у вигляді $\vec{Y}(t) = \vec{Y}_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$, в результаті його підстановки у рівняння (7) та нескладних перетворень, отримаємо:

$$-\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \omega^2 \cdot \vec{Y}_0 + \vec{Y}_0 = 0,$$

$$\text{або} \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{Y}_0 = \lambda \cdot \vec{Y}_0, \quad (8)$$

де $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$. Це задача на власні значення для матриці $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$. Оскільки ця матриця несиметрична, а матриця інерції $\mathbf{T}$ – позитивно визначена та діагональна, то вводимо заміну:

$$\vec{Y}_0^* = \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{Y}_0. \quad (9)$$

Відносно $\vec{Y}_0^*$ рівняння (8) можна привести до вигляду:

$$\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{Y}_0^* = \lambda \cdot \vec{Y}_0^*. \quad (10)$$

В цьому випадку матриця $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$ є симетричною, оскільки симетрична матриця $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$. Власні числа та власні вектори симетричної матриці знаходяться за допомогою відомих алгоритмів.

Наведена методика реалізована у вигляді програми, написаної мовою FORTRAN для РС комп'ютерів. В якості тестової задачі розглядалися вільні коливання круглої пластини, защемленої в центральній точці. Геометричні та фізичні характеристики пластини наступні:

Таблиця 1

Частоти власних коливань круглої пластини

Частоти коливань	Точні значення	Наближено отримані по запропонованій методиці ($n=20$)
ω_1	111,21	111,4
ω_2	620,1	622,1
ω_3	1799,5	1806
ω_4	3549,8	3569

$r_l = 1\text{ м}$, $h_l = 0,2\text{ м}$, $\nu = 0,3$, $E = 2,4 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$. Порівняння отриманих частот (для розбиття пластини на 20 мас) з частотами, знайденими за методикою, описаною в роботі С.П.Тимошенко [3], наведені в табл. 1.

Задача 2. Розрахунок нестационарних коливань.

Нестационарні коливання описуються системою рівнянь (2) з початковими умовами:

$$\text{при } t = 0 \quad \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0, \quad \left. \frac{d\vec{Y}}{dt} \right|_{t=0} = \vec{V}_0, \quad (11)$$

де $\vec{Y}_0$ – вектор початкових переміщень, а $\vec{V}_0$ – вектор початкових швидкостей. Введемо заміну (9) і отримаємо задачу Коші:

$$\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}^*(t)}{dt^2} + \vec{Y}^*(t) = \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{B}_p \cdot \vec{P}(t). \quad (12)$$

$$\vec{Y}^*(0) = \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{Y}_0, \quad \left. \frac{d\vec{Y}^*}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{V}_0 \quad (13)$$

Знайшовши власні числа та власні вектори матриці $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$, пронормуємо власні вектори та утворимо матрицю $\mathbf{S}$, стовпчиками якої є нормовані власні вектори матриці $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$. Введемо заміну:

$$\vec{Y}^{**}(t) = \mathbf{S}^T \cdot \vec{Y}^*(t). \quad (14)$$

Оскільки матриця $\mathbf{S}$ є ортогональною матрицею, то $\mathbf{S}^{-1}$ дорівнює транспонованій до $\mathbf{S}$ матриці $\mathbf{S}^T$. Система рівнянь (12) перетворюється до вигляду:

$$\mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{S} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}^{**}(t)}{dt^2} + \vec{Y}^{**}(t) = \mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{B}_p \cdot \vec{P}(t). \quad (15)$$

Тут матриця $\mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}$, де $\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ –

діагональна матриця, елементами якої є власні числа матриці $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$. Таким чином, система (15) розпадається на окремі

диференціальні рівняння другого порядку. Початкові умови для цих рівнянь мають вигляд:

$$\vec{Y}^{**}(0) = \mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{Y}_0, \quad \left. \frac{d\vec{Y}^{**}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{V}_0. \quad (16)$$

Окремі задачі Коші розв'язуються чисельно, а потім знаходяться шукані значення переміщень мас в будь-який момент часу за формулами:

$$\vec{Y}^*(t) = \mathbf{S} \cdot \vec{Y}^{**}(t), \quad \vec{Y}(t) = (\sqrt{\mathbf{T}})^{-1} \vec{Y}^*(t),$$

$$\text{де } (\sqrt{\mathbf{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1^*}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2^*}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{m_n^*}} \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, використовуючи знайдені власні числа та власні вектори матриці $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$, можна побудувати простий алгоритм розрахунку на вимушені коливання.

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи математических наук. – 1961. – Т.16. – Вып.3. – с. 171 – 174.
2. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 280 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.