УДК 539.3

Вабіщевич М.О.
Сахаров О.С., д-р техн. наук
Солодей І.І., канд. техн. наук

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ПРИ ДІЇ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

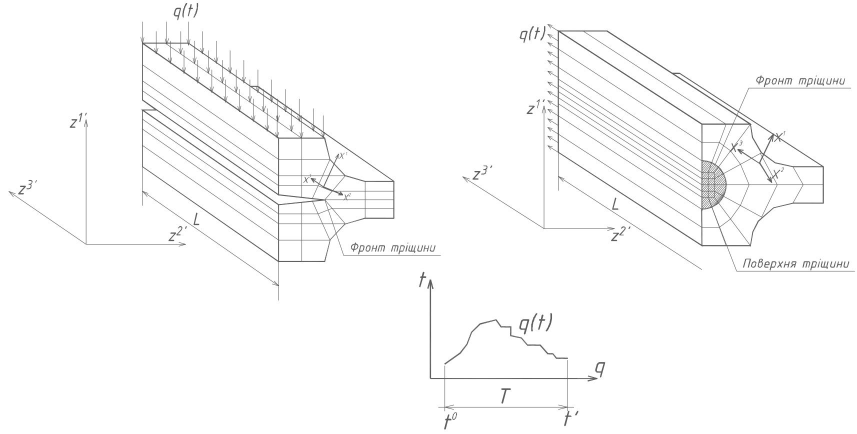
Здійснено узагальнення методики обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень прямим методом для просторових призматичних тіл на снові напіваналітичного методу скінченних елементів при дії імпульсного навантаження.

Вступ. Значна кількість конструктивних елементів, являє собою неоднорідні призматичні тіла складної форми. До них відносяться різноманітні вузли та деталі енергетичного і транспортного машинобудування, а також зразки для визначення механічних характеристик матеріалів і т.і. Внаслідок експлуатаційних та технологічних умов зазначені об’єкти можуть мати певні пошкодження, типу тріщин. Нерідко такі об'єкти знаходяться під дією довільно орієнтованих у просторі та у часі динамічних навантажень, головною рисою яких є мікросекундні діапазони протікання. Дослідження напружено-деформованого стану таких конструкцій веде до необхідності розв’язання складних просторових задач динаміки для навантажених імпульсними силовими полями неоднорідних призматичних тіл складної форми та структури, при наявності у них тріщин.

Для аналіза подібного класа об’єктів найбільш раціональним є застосування напіваналітичного методу скінченних елементів, як це показано при розв’язанні лінійних задач механіки руйнування в роботах [1, 2]. Однак, в зазначених публікаціях розглядаються виключно задачі статики. Тому розробка ефективних засобів розрахунку вказаних конструкцій, при динамічних навантаженнях є актуальною проблемою.

Метою роботи є створення на основі напіваналітичного метода скінченних елементів ефективної методики визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами при дії імпульсного навантаження

1.Постановка задачі. Розглядаються в базисній Декартові системі координат $z^{i'}$ неоднорідні призматичні тіла з тріщинами, що знаходяться під дією довільного імпульсного навантаження або зміщень, на інтервалі часу $T \in [t_0, t_1]$ (рис.1).



а *б*

Рис. 1

Вісі $z^{1'}$, $z^{2'}$ лежать в площині поперечного перерізу тіла, вісь $z^{3'}$ спрямована вздовж утворюючої.

Для призматичних тіл виділяють два типи тріщин: поздовжні (рис.1,а), фронт яких збігається за напрямком з віссю $z^{3'}$і поперечні (рис.1,б), фронт яких розташований в площині поперечного перерізу тіла і є ортогональним до вісі z^3

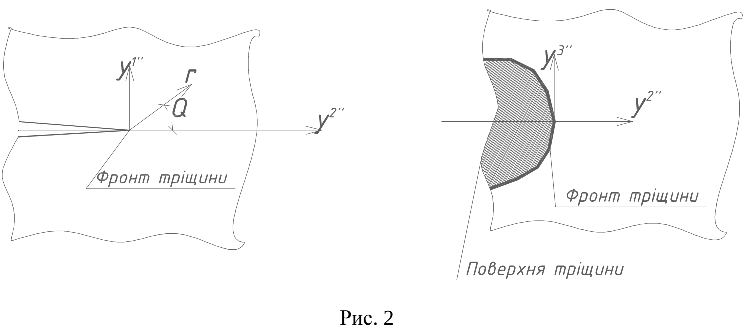


Рис. 2

Для опису НДС в околі вершини тріщини застосовується система координат $y^{i''}$, пов’язана з фронтом тріщини, таким чином, щоб вісь $y^{1''}$ співпадала з нормаллю до поверхні тріщини, $y^{2'}$ орієнтована по нормалі до фронту тріщини, а $y^{3''}$ була спрямована вздовж дотичної до фронту. Сингулярне поле напружень поблизу вершини тріщини в системі координат $y^{i''}$ в усіх точках її фронту буде характеризуватися коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН). Конкретизація виразів, що описують взаємозв’язок напружень і переміщень з величиною КІН залежить від типу розкриття тріщини [2].

Для тріщин нормального відриву (тип I):

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{11}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2})\ ,\\
&\sigma^{12}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\ ,\\
&\sigma^{22}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2})\ ,\\
&u_1=\frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}),\\
&u_2=\frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Для тріщин поперечного зсуву (тип II):

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{11}=\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},\\
&\sigma^{12}=\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}),\\
&\sigma^{22}=\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2})\ ,\\
&u_1=\frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(-1+2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}),\\
&u_2=\frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(2-2\nu+\cos^2\frac{\theta}{2}).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Для тріщин поздовжнього зсуву (тип III):

$$
\sigma^{13}=\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2},\quad \sigma^{23}=-\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2},\ u_3=\frac{K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{3}
$$

де r,θ – полярні кооринати з початком в вершині тріщини (рис. 2); μ – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z^{i'}_{,j}$, що обумовлює зв'язок між місцевою та базисною системами координат [4]:

$$z^{\alpha'}_{,\beta} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}, \quad z^{\alpha'}_{,3} = z^{3'}_{,\alpha} = 0; \; z^{3'}_{,3} = \frac{L}{2}. \tag{4}$$

де L – довжина тіла в напрямку $z^{3'}$.

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення *1,2*, а позначені латинськими – *1,2,3*.

Компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензору базисної системи згідно з формулою:

$$g_{\alpha\beta} = z^{\gamma'}_{,\alpha} z^{\gamma'}_{,\beta}, \quad g_{33} = \left(z^{3'}_{,3}\right)^2. \tag{5}$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій ε_{ij} через переміщення u_i в місцевій системі координат [4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) - u_k \, \Gamma^k_{ij}, \tag{6}$$

де Γ^k_{ij} – символи Кристофеля другого роду.

Подамо переміщення в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k = u_{s'} z^{s'}_{,k}, \tag{7}$$

Оскільки в декартовій базисній системі координат всі символи Кристофеля дорівнюють нулю, то:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{l',\alpha} z^{l'}_{,\beta} + u_{l',\beta} z^{l'}_{,\alpha}\right); \\ \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\left(u_{l',\alpha} z^{l'}_{,3} + u_{l',3} z^{l'}_{,\alpha}\right); \\ \varepsilon_{33} = u_{l',3} z^{l'}_{,3}. \end{gathered} \tag{8}$$

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl}\varepsilon_{kl} . \tag{9}$$

В ізотропному тілі компоненти тензора пружних сталих d^{ijkl} пов'язані з коефіцієнтами Ламе λ і μ співвідношеннями [2]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu\left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}\right), \tag{10}$$

де $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$; $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$; $E = E\left(z^{i'}\right)$, $\nu = \nu\left(z^{i'}\right)$ - значення модуля пружності і коефіцієнта Пуассона в точці тіла, що розглядається.

Фізичні компоненти тензорів деформацій $\tilde{\varepsilon}_{kl}$, напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ та пружних констант $\tilde{d}^{ijkl}$ визначаються співвідношеннями:

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}},$$
$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij}\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}, \tag{11}$$
$$\tilde{d}^{ijkl} = d^{ijkl}\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}} .$$

Рівновага тіла при наявності інерційних сил, описується рівнянням, покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат приймає вигляд [2]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, z^{j'}_{,k}\sigma^{ki}\right) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'} . \tag{12}$$

Однозначність розв'язання (12) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0, який приймається за початок часової координати:

$$u(z^{i'}, t_0) = u_0(z^{i'}), \quad \dot{u}(z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(z^{i'}), \quad z^{i'} \in V . \tag{13}$$

При цьому припускається, що на частині поверхні S_u задані кінематичні граничні умови:

$$u(z^{i'}, t) = \tilde{u}(z^{i'}, t), \quad z^{i'} \in S_u , \tag{14}$$

а на поверхні S_p з нормаллю $\vec{n} = n_j e^j$ - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z^{k'}_{,i}\sigma^{ij}n_j = \tilde{p}\left(z^{k'},t\right),\quad z^{k'} \in S_p\,. \tag{15}$$

В кожний момент часу пружно-деформований стан згаданого тіла повинен задовольняти варіаційному рівнянню руху яке, згідно принципам Лагранжа-Даламбера, подамо у вигляді:

$$\int\limits_V \rho\ddot{u}^{i'}\delta u_{i'}dV + \int\limits_V \tilde{\sigma}^{ij}\delta\tilde{\varepsilon}_{ij}dV - \int\limits_V f^{i'}\delta u_{i'}dV - \int\limits_{S_p} p^{i'}\delta u_{i'}dS = 0\,, \tag{16}$$

де $\tilde{\sigma}^{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ - фізичні компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно.

2.Особливості дискретизації призматичних тіл з тріщинами на основі НМСЕ Для апроксимації просторових неоднорідних призматичних тіл використовуються просторові неоднорідні призматичні скінченні елементи, що являють собою призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді прямої.

Кожному скінченному елементу (СЕ) поставлена у відповідність місцева система координат x^i, яка природньо пов'язана з геометрією об'єкта, так що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину скінченного елементу, а x^3 спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із $z^{3'}$. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2 (рис.3). Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ.

Будемо вважати, що щільність матеріалу ρ, компоненти тензора пружних постійних і C^{ijkl} визначник метричного тензора g незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі:

$$\rho = \rho\big|_{x^\alpha=0}\,,\ C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}{}^{ijkl} = C^{ijkl}\Big|_{x^\alpha=0};\ g = \overset{\circ}{g} = g\big|_{x^\alpha=0}; \tag{17}$$

В той же час ρ і C^{ijkl} довільно змінюються вздовж осі x^3 і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування

За невідомі при розв’язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ в базисній системі координат $(u\colon\dot{u}\colon\ddot{u})_{k'}$, де k' - напрямок в базисній системі координат.

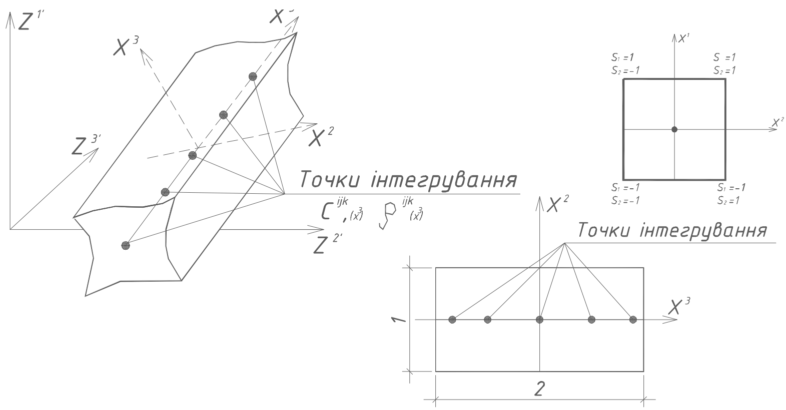


Рис.3

В той же час ρ і C^{ijkl} довільно змінюються вздовж осі x^3 і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування

За невідомі при розв’язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ в базисній системі координат $(u\colon\dot{u}\colon\ddot{u})_{k'}$, де k' - напрямок в базисній системі координат.

Якщо обмежитися білінійним розподілом переміщень, швидкостей і прискорень в площині перетину елемента і описати їх через вузлові значення поліномами Лагранжа першого ступеня:

$$\mathrm{P}_{(S_1,S_2)} = \prod_{n=1}^{2}\left(S_{(n)}x^{(n)}+\frac{1}{2}\right) = \left(S_1x^1+\frac{1}{2}\right)\left(S_2x^2+\frac{1}{2}\right) = , \tag{18}$$
$$= S_1x^1S_2x^2+\frac{1}{2}S_2x^2+\frac{1}{2}S_1x^1+\frac{1}{4}$$

можна записати:

$$(u\colon\dot{u}\colon\ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1}\sum_{S_2}P_{(S_1,S_2)}(u\colon\dot{u}\colon\ddot{u})_{k'(S_1,S_2)}\ . \tag{19}$$

Індекси S_1 та S_2 визначають положення вузла відносно центру поперечного перерізу елемента і набувають значеннь ± 1 (рис.3).

В центрі поперечного перерізу СЕ переміщення, швидкості, прискорення і їх похідні виражаються формулами:

$$
\begin{aligned}
&\left(u\!:\dot{u}\!:\ddot{u}\right)_{k'}\Big|_{x^{\alpha}=0}=\frac{1}{4}\sum_{S_1}\sum_{S_2}\left(u\!:\dot{u}\!:\ddot{u}\right)_{k'(S_1,S_2)},\\
&\left(u\!:\dot{u}\!:\ddot{u}\right)_{k',\beta}\Big|_{x^{\alpha}=0}=\frac{1}{2}\sum_{S_1}\sum_{S_2}\left(u\!:\dot{u}\!:\ddot{u}\right)_{k'(S_1,S_2)}S_{\beta},\\
&\left(u\!:\dot{u}\!:\ddot{u}\right)_{k',12}\Big|_{x^{\alpha}=0}=\sum_{S_1}\sum_{S_2}\left(u\!:\dot{u}\!:\ddot{u}\right)_{k'(S_1,S_2)}S_1S_2\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

В напрямку утворюючої переміщення, та їх похідні по напрямку x^3 апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій $\varphi^{(l)}$ – поліномам Лагранжа $(l=0,1)$ і Міхліна $(l=2,.....L)$:

$$
u_{m'}=\sum_{l=0}^{L}u_{m'}^{l}\varphi^{(l)}\ ;\ u_{m',3}=\sum_{l=0}^{L}u_{m'}^{l}\varphi_{,3}^{(l)};
\tag{21}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{(0)}=\frac{1}{2}\left(1-x^3\right),\ \ \varphi^{(1)}=\frac{1}{2}\left(1+x^3\right),\\
&\varphi^{(l)}=f^{(l)}p^{(l)}-f^{(l-2)}p^{(l-2)},\ \ f^{(l)}=\sqrt{\left(4l^2-1\right)^{-1}}\,,\\
&p^{(l)}=\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\left(l+k\right)!}{(l-k)!(k!)^2\,2^{k+1}}\left[\left(1-x^3\right)^k+(-1)^l\left(1+x^3\right)^k\right].
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Скінченні елементи, що пропонуються, орієнтовані на розрахунок широкого класу неоднорідних призматичних тіл. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного рішення.

Подамо компоненти тензору повних фізичних деформацій в поперечних перетинах, що відповідають точкам інтегрування, у відповідності до моментної схеми скінченних елементів (ММСЕ) відрізками ряду Маклорена [4]:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)},\ \ \tilde{\varepsilon}_{12}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}\,,\\
&\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)},\ \ \tilde{\varepsilon}_{33}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}\,x^{\beta}\ ,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

де

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}\Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^{\beta}}\bigg|_{x^{\beta}=0}.$$

Подаючи коефіцієнти розкладу напружень через коефіцієнти розкладу деформацій згідно закону Гука, отримаємо:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12};$$

$$\tilde{\sigma}^{\alpha 3} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha}, \tag{24}$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена через напруження місцевій системі координат (9):

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}; \qquad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12} = \overset{\circ}{g}_{12} \overset{\circ}{\sigma}{}^{12};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}\, \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} = \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}; \tag{25}$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}\, \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} = \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,(3-\alpha)}.$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена, отримані з урахуванням (11), матимуть вигляд:

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}; \qquad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}; \qquad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}; \tag{26}$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\bigg|_{x^{\beta}=0} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right);$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right);$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta},$$

3.Визначення компонентів матриць жорсткості. Варіація потенційної енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \tilde{\sigma}^{ij} \delta\tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3 . \tag{27}$$

Подаючи фізичні компоненти тензору напружень і тензору деформацій згідно (25) та (26) і виконавши інтегрування по x^1 та x^2, отримаємо:

$$\delta W = \int\limits_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 , \tag{28}$$

або, у матричній формі:

$$\delta W = \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 , \tag{29}$$

Коефіцієнти розкладення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} , \tag{30}$$

З урахуванням цього вираз (29) набуває вигляду:

$$\delta W = \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} \right) \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 \tag{31}$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами (19), подамо вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^{L} \sum_{n=0}^{L} \left(\delta \{u\}_l^T\right) [K]_{ln} \{u\}_n , \qquad (32)$$

де $[K]_{ln}$ – матриця жорсткості неоднорідного косокутного призматичного СЕ:

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком x^3 для матриці жорсткості СЕ отримаємо наступний вираз[4]

$$[K]_{ln} = \Bigg\{ \left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T [D]_{00}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1\right] + \left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T [D]_{30}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1\right] + \left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T [D]_{03}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2\right] +$$

$$+ \left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T [D]_{33}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2\right] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \Bigg(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T [D]_{00\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right] +$$

$$+ \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T [D]_{30\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right] + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T [D]_{03\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right] +$$

$$+ \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T [D]_{33\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right] \Bigg) \Bigg\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} . \qquad (33)$$

4. Визначення компонент матриці мас. Варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta K^e = -\int_{x^3} \overset{\circ}{\rho}\, \ddot{u}^{m'} \delta u_{m'} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 . \qquad (34)$$

Виразивши переміщення вузлів елемента вздовж утворючої на основі поліномів (21), та використавши припущення про осереднення маси біля вузла, що розглядається, враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає частині мас елементів, які примикають до даного вузла, перепишемо варіацію кінетичної енергії у вигляді:

$$\delta K^e = -\sum_{l=l_0}^{L} \sum_{n=n_0}^{L} \ddot{u}_{m'}^{n} \int_{x^3} \overset{\circ}{\rho}\, \varphi^{(l)} \varphi^{(n)} dx^3\, \overset{\circ}{g}{}^{m'm'} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, \delta u_{m'}^{l} , \qquad (35)$$

або в матричній формі

$$\delta K^{e} = -\sum_{l=l_0}^{L}\sum_{n=n_0}^{L}\left(\delta\{u\}_l^T\right)[M]_{\ln}\{\ddot{u}\}_n\ , \tag{36}$$

де $[M]_{\ln}$ - амплітудна матриця мас неоднорідного вздовж x^3 скінченного елемента, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$m_{\ln}^{m'} = \frac{1}{4}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,\overset{\circ}{g}{}^{m'm'}\overset{\circ}{\rho}_{\ln}\,, \tag{37}$$

тут введені наступні позначення:

$$\overset{\circ}{\rho}_{\ln} = \int_{x^3}\overset{\circ}{\rho}\,\varphi^{(l)}\varphi^{(n)}dx^3 = \sum_{p=1}^{P}\overset{\circ}{\rho}_p\,\varphi_p^{(l)}\varphi_p^{(n)}H_p\,, \tag{38}$$

ρ_p - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає p-ій точці інтегрування, H_p – вагова функція чисельного інтегрування.

5. Використання методу Ньюмарка при обчисленні параметрів руйнування. На основі отриманих формул для матриці мас та матриці жорсткості можемо записати рівняння руху в матричній формі як:

$$[M]\{\ddot{U}\}+[K]\{U\}=\{Q\}. \tag{39}$$

Найбільш поштреним серед методів прямого інтегрування рівнянь руху у часі є метод Ньюмарка [7]:

$$\{\dot{U}\}^{t+\Delta t} = \{\dot{U}\}^{t} + \left[(1-\delta)\{\ddot{U}\}^{t} + \delta\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}\right]\Delta t\,,$$

$$\{U\}^{t+\Delta t} = \{U\}^{t} + \{\dot{U}\}^{t}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\{\ddot{U}\}^{t} + \alpha\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}\right]\Delta t^2\,, \tag{40}$$

де $\delta \ge 0.5$, $\alpha \ge 0.25(0.5+\delta)^2$ - умови, які визначають стійкість схеми інтегрування, що розглядається.

Подаючи $\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}$ через $\{U\}^{t+\Delta t}$, та підставивши $\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}$ у вираз для кінетичної енергії системи, записаний для того ж момента часу, одержимо:

$$a_0[M]\{U\}^{t+\Delta t}+[K]\{U\}^{t+\Delta t}=\{Q\}^{t+\Delta t}+[M]\left\{a_0\{U\}^t+a_2\{\dot{U}\}^t+a_3\{\ddot{U}\}^t\right\}, \quad (41)$$

або

$$\left[\hat{K}\right]^{t+\Delta t}\{U\}^{t+\Delta t}=\left\{\hat{Q}\right\}^{t+\Delta t}, \quad (42)$$

де

$$a_0=\frac{1}{\alpha\Delta t^2},\ a_2=\frac{1}{\alpha\Delta t},\ a_3=\frac{1}{2\alpha}-1 . \quad (43)$$

На основі рішення (40), тобто значень амплітуд переміщень у момент часу *t+Δt*, обчислюємо амплітуди швидкостей та прискорень:

$$\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}=a_0\left(\{U\}^{t+\Delta t}-\{U\}^t\right)-a_2\{\dot{U}\}^t-a_3\{\ddot{U}\}^t,$$
$$\{\dot{U}\}^{t+\Delta t}=\{\dot{U}\}^t+a_6\{\ddot{U}\}^t+a_7\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}, \quad (44)$$

де $a_6=\Delta t(1-\delta)$, $a_7=\delta\Delta t$.

Апроксимація конструкції вздовж направляючої майже ортогональною системою поліноміальних базисних функцій забезпечує добру обумовленість матриці $\left[\hat{K}\right]^{t+\Delta t}$. Найбільш економічними, з точки зору трудоємкості розв'язання отриманої системи алгебраїчних рівнянь, є блоково-ітераційні процедури. Пропонується використання методу групової релаксації, для якого блок ітераційного процесу формується в межах одного члена ряду розкладу невідомих вздовж направляючої:

$$\{U\}_{i+1}^{l,t+\Delta t}=\{U\}_i^{l,t+\Delta t}+\omega\left[\hat{K}\right]_{ll}^{-1}\left(\left\{\hat{Q}\right\}_l^{t+\Delta t}-\left\{\tilde{R}\right\}_{l,i}^{t+\Delta t}\right), \quad (45)$$

де $\left\{\tilde{R}\right\}_{l,i}^{t+\Delta t}$ - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації *i* кроку *t+Δt*:

$$\left\{\tilde{R}\right\}_{l,i}^{t+\Delta t}=\sum_{m=l_0}^{l-1}\left[\hat{K}\right]_{lm}\{U\}_{i+1}^{m,t+\Delta t}+\sum_{m=l}^{L}\left[\hat{K}\right]_{lm}\{U\}_i^{m,t+\Delta t}, \quad (46)$$

$\{U\}_{i+1}^{m,t+\Delta t}$, $\{U\}_i^{m,t+\Delta t}$ - амплітудні значення вузлових переміщень в момент часу *t+Δt* на ітераціях *i+1* та *i* відповідно, ω - параметр релаксації ($1\le\omega<2$).

Для завершення ітераційного процесу виконується нерівність:

$$\left\|\sum_{l=l_0}^{L}\{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t}\right\|\le\varepsilon\left\|\sum_{l=l_0}^{L}\{\Delta U\}^{l,t+\Delta t}\right\|, \quad (47)$$

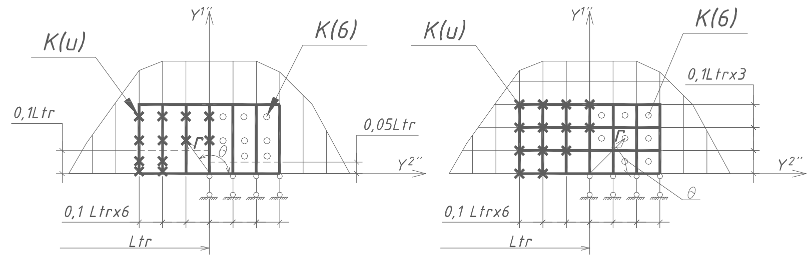
де $\{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t}$ - прирощення амплітудних переміщень на ітерації i у момент часу $t+\Delta t$, $\{\Delta U\}^{l,t+\Delta t} = \sum_{i=1}^{I} \{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t}$ - вектор прирощень амплітудних переміщенннь у момент часу $t+\Delta t$, $\|\{\Delta U\}\| = |\{\Delta U\}|^2$, ε - наперед задане мале додатнє число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

Оскільки при розв'язку задач динаміки визначення КІН прямим методом виконується на основі обчислених значень параметрів пружно-деформованого стану, які змінюються в часі, то його величина теж буде функцією t. Для кожного значення t обчислення КІН базується на методиці, докладне викладення і опис реалізації якої при застосуванні МСЕ для призматичних тіл описані в [3].

В просторових тілах визначення КІН проводиться в низці точок по фронту тріщини. Для тіл з поперечними тріщинами ці точки збігаються з вузлами СЕ моделі, що лежать на фронті тріщини, а для тіл з поздовжніми тріщинами такими точками є точки інтегрування, розташовані вздовж вісі x^3

В тілах з поперечними тріщинами привершинні області, в яких проводиться визначення КІН за напруженнями та переміщеннями і його подальше усереднення, розташовані в площині $y^{1''}$- $y^{2''}$, яка є ортогональною до поверхні і фронту тріщини. Місця визначення КІН за переміщеннями та напруженнями в межах привершинної області визначаються розташуванням точок інтегрування вздовж вісі x^3. Враховуючи вимоги методики, пов'язані з явищем сингулярності, в точках, розташованих на відстанях менших $0.1L_{тр}$ ($L_{тр}$ довжина тріщини) вздовж вісей $y^{1''}$ $y^{2''}$ від вершини тріщини КІН не визначається. Також не визначається КІН за напруженнями в точках, що розташовані ближче $0.05L_{тр}$ від вісі $y^{2''}$ (рис.4, точки обчислення КІН за напруженнями позначені кружками, за переміщеннями – хрестиками).

Для тіл з поздовжніми тріщинами КІН визначаються по всім точкам інтегрування вздовж вісі $z^{3'}$, яка збігається за напрямком з фронтом тріщини. Привершинна область для кожної точки інтегрування знаходиться в площині поперечного перерізу тіла $z^{3'}$ – $z^{2'}$, K(σ) визначається в центрах СЕ, K(u) – у вузлах СЕ моделі (рис.4), тобто в цьому випадку визначення КІН в межах привершинної області відбувається в поперечному перерізі тіла.

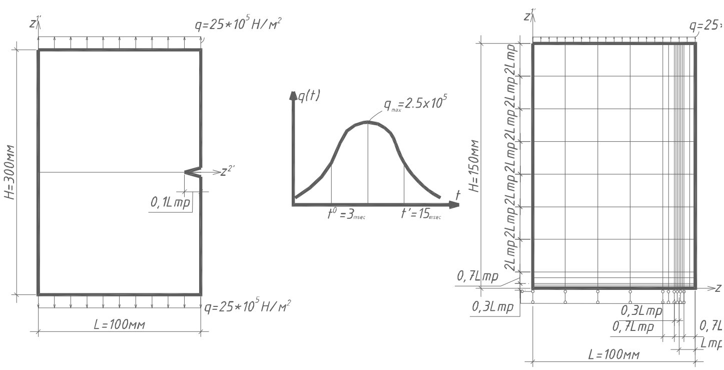


а *б*

Рис. 4

Для тіл з поздовжніми тріщинами КІН визначаються по всім точкам інтегрування вздовж вісі $z^{3'}$, яка збігається за напрямком з фронтом тріщини. Привершинна область для кожної точки інтегрування знаходиться в площині поперечного перерізу тіла $z^{3'} - z^{2'}$, $K(\sigma)$ визначається в центрах СЕ, $K(u)$ – у вузлах СЕ моделі (рис.4), тобто в цьому випадку визначення КІН в межах привершинної області відбувається в поперечному перерізі тіла [1].

З метою дослідження вірогідності і ефективності НМСЕ в просторових задачах механіки руйнування при динамічному навантаженні було проведено розв’язання задачі розтягу прямокутної пластини з крайовою тріщиною (рис. 5,а).



а *б* *в*

Рис. 5

Пластина знаходиться під дією імпульсного навантаження, графік якого наведений на рис. 5,б. Розрахунок виконувався в межах плоскої деформації на основі скінченно-елементної моделі, наведеної на рис. 5,в. При статичному навантажені обчислені на основі НМСЕ значення КІН співпадають як з аналітичними [6], так і з експериментальними результатами [5] в межах 2%. Аналогічні дані отримані і при співставленні експериментальних даних роботи [5] і при динамічному навантаженні для максимальних значень КІН.

Таким чином, розроблена методика визначення лінійних параметрів руйнування дозволяє отримувати достовірні результати при розрахунку тіл з тріщинами в мікросекундному діапазоні дії динамічного навантаження.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.:НИИСМ, 1993. – 376 с.
3. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 73. – С. 73–82.
4. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І.,.,Андрієвський В.П. ,Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченого елемента для розв’язання просторових задач термов’язкопружнопластичності НМСЕ: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 73. – С. 105-108.
5. *F. Catsamanis, D. Raftopoulos, P.S. Theocaris.* Static and Dynamic Stress Intensity Factors by the Method of Transmitted Caustics: Journal of Engineering Materials and Technology,1977. – Vol.4 – P. 105-109.
6. *Саврук М. П., Осипов П.Н., Прокопчук И.В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К. Наукова думка, 1989.
7. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.

Надійшло до редакції 17.11.2006 р.