УДК 539.3

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
І.В. Жупаненко

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИН ОБЕРТАННЯ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Запропоновано методику розв'язання задачі про власні коливання пластин обертання змінної товщини, що реалізує комбінований двох-етапний чисельно-аналітичний підхід. Аналітичний етап розрахунку полягає в зниженні вимірності вихідних співвідношень динамічної задачі теорії пружності шляхом застосування узагальненого методу скінчених інтегральних перетворень по поперечній координаті та методу Фур'є по коловій координаті. Для чисельного розв'язання редукованої одновимірної задачі пропонується два альтернативних підходи, ефективність та збіжність яких перевірена при розв'язанні тестових задач.

Постановка задачі. В якості об'єкта досліджень розглядаються однорідні ізотропні лінійно-пружні просторові тіла вісесиметричної структури, обмежені двома кусково-гладкими бічними поверхнями, що не перетинаються, і торцевою поверхнею. Торцева поверхня складається з двох співвісних циліндричних поверхонь, а площина, ортогональна до твірних торцевої поверхні, називається опорною площиною (рис. 1). Бічні поверхні пластин є геометричним місцем точок, які займають кінці ортогонального до опорної площини відрізку змінної довжини при русі вздовж опорної площини, а торцеві поверхні утворюються даним відрізком як твірною. Твірні бічних поверхонь являють собою плоску кусково-гладку криву, що в загальному випадку складається з m ділянок.

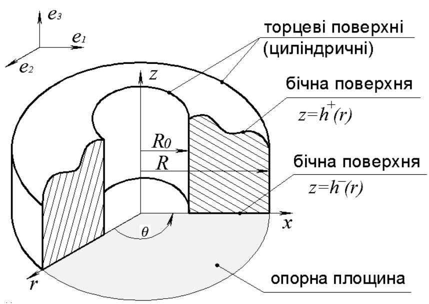

Рис. 1. Товста пластина несиметричної будови

Згідно з прийнятою в [1] термінологією будемо називати такі тіла *товстими пластинами несиметричної будови* (далі – товсті пластини), що поєднують пластини за класичним розумінням, а також об'єкти, що не мають серединної площини симетрії.

Пластина відноситься до циліндричної системи координат $\{z, \theta, r\}$, нормально пов'язаної з опорною площиною. Координати заданої точки пластини в прийнятій системі координат визначаються наступним чином: z – довжина перпендикуляра від заданої точки до опорної поверхні; r, θ – криволінійні координати ортогональної проекції точки на цю поверхню (рис. 1). Радіальна координата відраховується від внутрішньої торцевої поверхні і пов'язана з циліндричною координатою r співвідношенням

$$r = R_0 + x, \; x \in [0, L], \; L = (R - R_0).$$

В обраній системі координат пластина займає область Ω евклідового простору:

$$\Omega = [0 \le x \le L] \times [0 \le \theta \le 2\pi] \times \left[h^-(x) \le z \le h^+(x) \right].$$

Рівняння руху пружного середовища, що займає область Ω, задаються співвідношеннями лінійної динамічної теорії пружності [2]. В якості вихідних приймаються тривимірні співвідношення теорії пружності, записані в циліндричних координатах відносно компонент вектора переміщень u_r, u_θ, u_z та тензора напружень $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}$, $\sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$.

Граничні умови на бічних поверхнях $z = h^-(x)$, $z = h^+(x)$ та на окремих ділянках торцевої поверхні $x = 0$ та $x = L$ моделюються за допомогою пружних в'язів відомої жорсткості k [1] і записуються у вигляді алгебраїчних співвідношень, наведених в [1].

Побудова редукованої задачі. Для розв'язання задачі про власні коливання пластин обертання застосовується традиційний для об'єктів такого класу двох-етапний підхід, згідно з яким на першому етапі знижується вимірність вихідної динамічної задачі теорії пружності, а на другому – редукована задача розв'язується чисельно. Обидва етапи розв'язання розглядаються як реалізація чисельно-аналітичної методики розрахунку, що є проблемно-орієнтованою, оскільки використовується для розв'язання задач визначеного класу та базується на врахуванні специфіки об'єктів цього класу.

Перший, аналітичний, етап методики розрахунку частот і форм власних коливань пластин полягає в зниженні вимірності вихідної тривимірної задачі теорії пружності шляхом застосування узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень [1] по поперечній координаті z та розділення змінних методом Фур'є по коловій координаті θ.

Процедура зниження вимірності може бути сформульована в наступному алгоритмі побудови редукованих співвідношень задачі про власні коливання товстих пластин.

На першому кроці алгоритму, слідуючи узагальненому методу скінченних інтегральних перетворень, вихідним співвідношенням теорії пружності, записаним у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку по трьох просторових координатах, ставляться у відповідність редуковані двовимірні рівняння. Ця процедура формалізована до простої заміни невідомих у вихідних співвідношеннях їх проекційними аналогами за побудованою таблицею відповідностей [1]. Напруження на бічних поверхнях пластини, які входять в отримані рівняння, визначаються з відповідних граничних умов. Таким чином отримується двовимірна замкнена система диференціальних рівнянь, що доповнюється редукованими граничними умовами для розрахункових вектор-функцій. Оскільки за прийнятою формою запису граничні умови на торцевій поверхні мають вигляд алгебраїчних співвідношень, то редуковані граничні умови отримують простою заміною функцій, які входять в ці умови, їхніми моментами відносно системи базисних функцій (ортонормованих поліномів Лежандра).

Другим кроком алгоритму для обраного об'єкту досліджень є розділення змінних в отриманих співвідношеннях шляхом розкладу невідомих вектор-функцій в ряди Фур'є по коловій координаті. В отримані таким чином одновимірні по просторовій координаті співвідношення деякі невідомі входять алгебраїчно і можуть бути виключені, що дозволяє зменшити розмірність розв'язувальних рівнянь.

За часовою координатою для випадку власних коливань шукатимемо розв'язок задачі в наступному вигляді:

$$u_x = u_{x,0} \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad \left(u_x \Leftrightarrow u_\theta \Leftrightarrow u_z\right)$$

де амплітудне значення переміщення $u_{i,0}$ є функцією лише просторових координат і не залежить від часу. Вирази для компонент тензора напружень записуються аналогічним чином.

Отримана таким чином редукована крайова задача описується послідовністю окремих для кожної гармоніки систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами з граничними умовами для розрахункових вектор-функцій у вигляді алгебраїчних співвідношень. Система розв'язувальних рівнянь може бути представлена в нормальній формі Коші в матричному вигляді наступним чином:

$$\frac{d}{dx}\vec{Y}^{i} = [A(\omega)]\cdot \vec{Y}^{j}\ , \tag{1}$$

де $\vec{Y}^{i}$ – вектор невідомих, $\left\{Y^{i}\right\}^{T} = \left\{u_{x}^{*i}, u_{\theta}^{*i}, u_{z}^{*i}, \sigma_{x}^{i}, \sigma_{x\theta}^{i}, \sigma_{xz}^{i}\right\}$, $u_{j}^{*i} = \mu \cdot u_{j}^{i}\ (j = x, \theta, z)$; $[A(\omega)] = \left[a_{ij}\right]\left(i = \overline{1,6};\ j = \overline{1,6}\right)$ – матриця коефіцієнтів, елементи якої мають наступний вигляд:

$$a_{11} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{1}{R_0+x}\cdot\delta^{ij} - r^{ij}\right),\ a_{12} = -n\cdot\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{1}{R_0+x}\cdot\delta^{ij},$$

$$a_{13} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{2}{h(x)}\cdot m^{ij},\ a_{14} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\delta^{ij},\ a_{15} = a_{16} = 0,$$

$$a_{21} = n\cdot\frac{1}{R_0+x}\cdot\delta^{ij},\ a_{22} = \left(\frac{1}{R_0+x}\cdot\delta^{ij} + r^{ij}\right),\ a_{23} = a_{24} = 0,\ a_{25} = \delta^{ij},$$

$$a_{26} = 0,\ a_{31} = -\frac{2}{h(x)}\cdot m^{ij},\ a_{32} = 0,\ a_{33} = r^{ij},\ a_{34} = a_{35} = 0,\ a_{36} = \delta^{ij},$$

$$a_{41} = \left(\frac{4(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{1}{(R_0+x)^2} - \frac{\rho}{\mu}\cdot\omega^2\right)\cdot\delta^{ij},\ a_{42} = n\cdot\frac{4(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{1}{(R_0+x)^2}\cdot\delta^{ij},$$

$$a_{43} = \frac{2}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{2}{h(x)}\cdot\frac{1}{R_0+x}\cdot m^{ij},\ a_{44} = -\left(\frac{2\mu}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{1}{R_0+x}\cdot\delta^{ij} + r^{ji}\right),$$

$$a_{45} = -n\cdot\frac{1}{R_0+x}\cdot\delta^{ij},\ a_{46} = \frac{2}{h(x)}\cdot m^{ji},\ a_{51} = n\cdot\frac{4(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{1}{(R_0+x)^2}\cdot\delta^{ij},$$

$$a_{52} = \left(n^2\cdot\frac{4(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{1}{(R_0+x)^2}\cdot\delta^{ij} + \frac{4}{h^2(x)}\cdot m^{ki}m^{kj} - \frac{\rho}{\mu}\cdot\omega^2\cdot\delta^{ij}\right),$$

$$a_{53} = n\cdot\frac{1}{R_0+x}\cdot\frac{2}{h(x)}\cdot\left(\frac{2\lambda}{(\lambda+2\mu)}\cdot m^{ij} - m^{ji}\right),$$

$$a_{54}=n\cdot\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{1}{R_0+x}\cdot\delta^{ij},\ a_{55}=-\left(\frac{2}{R_0+x}\cdot\delta^{ij}+r^{ji}\right),\ a_{56}=0,$$

$$a_{61}=\frac{2\lambda}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{1}{R_0+x}\cdot\frac{2}{h(x)}\cdot m^{ji},$$

$$a_{62}=\left(n\cdot\frac{2\lambda}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{1}{R_0+x}\frac{2}{h(x)}\cdot m^{ji}-n\cdot\frac{1}{R_0+x}\frac{2}{h(x)}m^{ij}\right),$$

$$a_{63}=\left(n^2\cdot\frac{1}{(R_0+x)^2}\cdot\delta^{ij}+\frac{4(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{4}{h^2(x)}\cdot m^{ki}\cdot m^{kj}-\frac{\rho}{\mu}\cdot\omega^2\cdot\delta^{ij}\right),$$

$$a_{64}=\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{2}{h(x)}\cdot m^{ji},\ a_{65}=0,\ a_{66}=-\left(\frac{1}{R_0+x}\cdot\delta^{ij}+r^{ji}\right).$$

Тут параметр n характеризує форму хвилеутворення по паралелі і дорівнює числу хвиль в цьому напрямку, δ^{ij} – символ Кронеккера.

Матричні коефіцієнти [r^{ij}], [m^{ij}] описані в [1].

Граничні умови для розрахункових вектор-функцій в матричному вигляді записуються наступним чином:

$$[C_0]\cdot\vec{Y}^i(0)=\vec{0},\quad [C_L]\cdot\vec{Y}^i(L)=\vec{0}, \tag{2}$$

де матриці [C_0] та [C_L] мають вигляд:

$$[C_0]=\begin{bmatrix} C11_0 & 0 & 0 & C14_0 & 0 & 0\\ 0 & C22_0 & 0 & 0 & C25_0 & 0\\ 0 & 0 & C33_0 & 0 & 0 & C36_0\end{bmatrix},$$

$$[C_L]=\begin{bmatrix} C11_L & 0 & 0 & C14_L & 0 & 0\\ 0 & C22_L & 0 & 0 & C25_L & 0\\ 0 & 0 & C33_L & 0 & 0 & C36_L\end{bmatrix}.$$

$$C11_0=\frac{k_{x0}}{\sqrt{1+k_{x0}^2}}\cdot\delta^{ij},\ C22_0=\frac{k_{\theta0}}{\sqrt{1+k_{\theta0}^2}}\cdot\delta^{ij},\ C33_0=\frac{k_{z0}}{\sqrt{1+k_{z0}^2}}\cdot\delta^{ij},$$

$$C14_0 = \frac{-1}{\sqrt{1+k_{x0}^2}} \cdot \delta^{ij}, \; C25_0 = \frac{-1}{\sqrt{1+k_{\theta 0}^2}} \cdot \delta^{ij}, \; C36_0 = \frac{-1}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij}.$$

$$C11_L = \frac{k_{xL}}{\sqrt{1+k_{xL}^2}} \cdot \delta^{ij}, \; C22_L = \frac{k_{\theta L}}{\sqrt{1+k_{\theta L}^2}} \cdot \delta^{ij}, \; C33_L = \frac{k_{zL}}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij},$$

$$C14_L = \frac{1}{\sqrt{1+k_{xL}^2}} \cdot \delta^{ij}, \; C25_L = \frac{1}{\sqrt{1+k_{\theta L}^2}} \cdot \delta^{ij}, \; C36_L = \frac{1}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij}.$$

Чисельне розв’язання редукованої задачі. Другим етапом методики, що пропонується, є чисельне розв’язання побудованої редукованої задачі (1) – (2). Редукована задача може бути класифікована як задача на власні значення для систем звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Одним з найбільш поширених методів чисельного розв’язання одновимірних задач на власні значення є покроковий $\Delta(\lambda)$ – метод [3]. Вибір цього методу в якості основного в абсолютній більшості досліджень одновимірних задач про коливання пластин обумовлений його високою точністю при визначенні власних значень та власних функцій задачі та можливістю знаходження власних чисел на будь-якому наперед заданому інтервалі спектру. Описаний в [4] алгоритм реалізації покрокового методу для розрахунку частот і форм власних вісесиметричних коливань товстих пластин без змін переноситься на випадок несиметричних коливань і складає основну частину другого етапу методики, що пропонується.

Накопичений на сьогоднішній день досвід застосування покрокового методу для розв’язання задач про власні коливання пластин виявив, що ефективність його застосування значною мірою залежить від вибору параметрів пошуку: початкового значення λ_0 та кроку $\Delta(\lambda)$. Невдалий вибір цих параметрів може призвести до зниження ефективності розрахунку або до втрати деяких власних значень. Вказаний недолік методу вимагає його застосування спільно з іншими методами, що дають можливість наближеного визначення розподілу власних значень.

Одновимірний характер редукованих рівнянь (1) – (2) дозволяє в якості такого допоміжного методу поширити на клас пластин обертання розвинений в будівельній механіці стрижневих систем алгоритм, який дозволяє для одновимірних об’єктів наближено зводити динамічну задачу, що описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних (по просторовій та часовій координатах), до динамічної задачі, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь (по часовій координаті).

Відповідно до алгоритму, динамічний розрахунок ведеться для континуальної за жорсткісними та дискретної за інерційними властивостями моделі. Дискретно-континуальна модель будується шляхом розбиття об’єкта на ділянки та зосередження мас цих ділянок в окремих точках континуальної безінерційної системи. Таким чином можна перейти від континуальної моделі з нескінченною кількістю степенів вільності до дискретно-континуальної, кількість степенів вільності якої відповідає добутку кількості зосереджених мас на кількість степенів вільності однієї маси.

В роботі [5] такий алгоритм розроблений для тонкої кільцевої пластини і виявлено особливості побудови дискретно-континуальної моделі пластини та рівнянь руху системи. Як показано в [5], задача про власні коливання пластин зводиться до алгебраїчної задачі на власні значення:

$$[\Pi]\cdot[R]\cdot[T]\cdot\vec{Y}=\lambda\cdot\vec{Y}, \qquad (3)$$

де $\lambda=1/\omega^2$ – власне число, матриці [R], [T] описані в [5], а елементи матриці впливу $[\Pi]=\left[\delta_{jk}\right]$ $(j,k=\overline{1,n})$ (n – кількість зосереджених мас) визначаються як переміщення від зосередженої (по x!) одиничної статичної сили F_{ik} по напрямку сили інерції F_{ij}.

По суті, кожен одиничний стан визначається як розв’язок статичної неоднорідної крайової задачі

$$\frac{d}{dx}\vec{Y^i}=[A]\cdot\vec{Y^j}+\vec{F^i} \qquad (4)$$

з граничними умовами (2), де компоненти вектора $\vec{F^i}$ задаються одиничним зосередженим силовим впливом, що відповідає конкретному одиничному стану, і визначаються з неоднорідних граничних умов на бічних поверхнях пластини.

Прийнятий варіант запису граничних умов дозволяє врахувати розподілене по бічних поверхнях навантаження, в той час як одиничний стан визначається зосередженим по координаті x навантаженням. Перехід від поверхневого до зосередженого навантаження здійснюється за допомогою дельта-функції Дірака:

$$q_i^{\pm}(x) = q_i^{\pm} \cdot \delta(x - x_k), \left(k = \overline{1,n};\, i = x,\, \theta,\, z \right). \qquad (5)$$

Підстановка неоднорідних граничних умов на бічних поверхнях в редуковані рівняння товстих пластин дозволяє визначити компоненти вектора навантажень $\vec{F}^{i}$ наступним чином:

$$F_{\alpha}^{i} = \frac{1}{\sqrt{h(x)}} \cdot \left[B^{-} q_{\alpha}^{-}(x) \left(e_1^{ij} - e_2^{ij} \right) + B^{+} q_{\alpha}^{+}(x) \delta^{ij} \right] \cdot p^{j} \; (\alpha = x,\, \theta,\, z),$$

де $q_{\alpha}^{\pm}(x)$ визначається співвідношенням (5), $B^{\pm} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h^{\pm}(x)}{\partial x} \right)^2}$,

матриці [e_1^{ij}], [e_2^{ij}] та вектор [p^{j}] визначені в [1].

Оскільки дискретизація системи виконується на рівні вихідної тривимірної моделі пластини, то степенями вільності нової розрахункової схеми є компоненти вектора переміщень $U\{ u_x, u_{\theta}, u_z \}$. При цьому прийнятий варіант побудови теорії пластин дозволяє врахувати шість степенів вільності однієї маси: три степені вільності, яким відповідає одиничне навантаження, порівну розподілене по обох бічних поверхнях: $q_i^{+} = 0{,}5$, $q_i^{-} = 0{,}5 \; (i = x, \theta, z)$, і три степені вільності, яким відповідає одиничне навантаження, прикладене до бічних поверхонь з різним знаком: $q_i^{+} = 0{,}5$, $q_i^{-} = -0{,}5 \; (i = x, \theta, z)$. Перші три степені вільності характеризують коливання стиску-розтягу, згину та обертання, а решта три – відповідні самоврівноважені по товщині пластини коливання зсуву. Така кількість степенів вільності відповідає врахуванню двох поліномів Лежандра $P_0(\xi), P_1(\xi)$, $\left(\xi = \frac{2z - \left(h^{+}(x) + h^{-}(x) \right)}{h^{+}(x) - h^{-}(x)} \right)$ при апроксимації інерційних властивостей розрахункової моделі. При цьому жорсткісні властивості моделі при статичному розрахунку одиничних станів апроксимуються більшою кількістю поліномів, що визначається практично виправданою точністю розрахунку елементів матриці впливу.

Загалом алгоритм розрахунку частот і форм власних коливань дискретно-континуальної моделі пластини наступний.

На першому кроці розрахунку здійснюється дискретизація інерційних властивостей пластини шляхом розбиття її на окремі концентричні ділянки і зосередження мас цих ділянок в певних точках (по координаті x) континуальної безінерційної системи. На основі здійсненої дискретизації формуються матриця радіусів мас $[R]$ та матриця інерції $[T]$.

Далі будуються одиничні стани для визначення матриці піддатливості $[\Pi]$. Як зазначалося вище, кожна зосереджена маса загалом може мати шість степенів вільності, з-поміж яких обираються ті, що будуть враховані в даному конкретному випадку. Таким чином призначаються способи прикладення одиничного зосередженого навантаження – одиничні стани. Для кожного одиничного стану редукована задача (4), (2) розв'язується методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова.

Оскільки степенями вільності системи є компоненти вектора переміщень $U\{u_x, u_\theta, u_z\}$ то на останньому етапі розрахунку одиничних станів виконується зворотній перехід узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень від отриманого розв'язку в зображеннях (відносно моментів невідомих) до оригіналу (шуканих переміщень). З останніх вибираються компоненти δ_{jk} матриці піддатливості $[\Pi]$ як переміщення по напрямку j-ї степені вільності від одиничної сили по напрямку k-ї степені вільності.

Задача визначення частот і форм власних коливань зводиться до визначення власних чисел та власних векторів симетризованої матриці $\left[\sqrt{T}\right]\cdot[\Pi]\cdot[R]\cdot\left[\sqrt{T}\right]$. Як зазначалося вище, частота власних коливань пов'язана з відповідним власним числом наступним співвідношенням:

$$\omega_k = \sqrt{1/\lambda_k}\ ,$$

а континуальна форма коливань будується на основі знайдених при побудові одиничних станів переміщень.

Розв'язання тестових задач. Розроблена методика розрахунку частот та форм власних коливань пластин обертання змінної товщини реалізована в комплексі програм для ПЕОМ, написаних алгоритмічною мовою FORTRAN. Можливості методики та достовірність результатів, отриманих за допомогою програмного комплексу, тестувалися на розв'язанні задач, для яких відомий розв'язок в рамках прикладних теорій (класичної та теорії типу Тимошенка).

В якості першого прикладу розглянуто задачу про визначення частот власних коливань защемленої по контуру круглої пластини радіусом $a = 1$ м і товщиною $h = 0{,}05$ м. В табл. 1 наведено значення частотного параметра k, пораховані за класичною теорією [6] і по запропонованій методиці (при реалізації покрокового методу та розрахунку дискретно-континуальної моделі).

Таблиця 1

Число вузлових кіл s		Число вузлових діаметрів n				
		0	1	2	3	4
0	Класична теорія [6]	3,196	4,611	5,906	7,144	8,347
	Покроковий метод	3,409 3,185	4,618 4,421	5,865 5,858	7,120 7,045	8,365 8,190
	Дискретно-континуальна модель	3,451	4,603 4,600	5,652	6,662	7,644
1	Класична теорія [6]	6,306	7,799	9,197	10,536	11,837
	Покроковий метод	6,667 6,234	8,431 7,522	9,151 9,002	10,474 10,244	11,769 11,432
	Дискретно-континуальна модель	6,593 6,591	7,935 7,932	9,070	10,131 10,134	11,157
2	Класична теорія [6]	9,440	10,958	12,402	13,795	15,15
	Покроковий метод	9,849 9,222	12,027 10,490	12,281 11,952	13,598 13,191	14,483 14,374
	Дискретно-континуальна модель	9,753 9,750	11,285 11,279	12,384 12,381	13,417 13,413	14,423 14,421
3	Класична теорія [6]	12,577	14,109	15,579	17,005	18,396
	Покроковий метод	12,908 12,107	14,119 13,333	15,253 14,750	16,541 15,962	17,788 17,119
	Дискретно-континуальна модель	12,843 12,838	14,662 14,652	15,649 15,639	16,603 16,595	17,563 17,554

Значення над рискою отримані при N=2 для покрокового методу і N=4 для дискретно-континуальної моделі, а значення під рискою при N=4 та N=6 відповідно (N – ступінь поліноміальної апроксимації). При розрахунку прийнято коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}33$. Частотний параметр пов'язаний з коловою частотою наступним співвідношенням:

$$k^4 = \rho \cdot h \cdot a^4 \omega^2 \big/ D\,,$$

де ρ і D – щільність та циліндрична жорсткість відповідно.

Аналізуючи отримані результати, слід зазначити, що розбіжність нижчих частот, отриманих покроковим методом, порівняно з класичною теорією складає до 4% і зростає із збільшенням номеру частоти до 8%. Така закономірність добре узгоджується з відомим обмеженням класичної теорії при визначенні вищих частот коливань. Частоти, отримані при розрахунку дискретно-континуальної моделі, відрізняються від отриманих по класичній теорії до 8,5 %, а зазначена вище закономірність не спостерігається.

Для тестування можливостей методики у випадку пластини змінної товщини розв'язана задача про коливання кільцевої пластини, радіальний переріз якої показано на рис. 2.

В табл. 2 наведені значення перших п'яти безрозмірних частот такої пластини при трьох вузлових діаметрах. При розрахунках коефіцієнт Пуассона прийнято $\nu = 0{,}3$.

Безрозмірні частоти пов'язані з відповідними коловими частотами наступним співвідношенням:

$$\lambda_j = \omega_j R \big/ c\,,$$

де $c = \sqrt{E/\rho}$ – швидкість звуку в матеріалі пластини (ρ, E – щільність та модуль пружності матеріалу відповідно); R – характерний лінійний розмір пластини в плані.

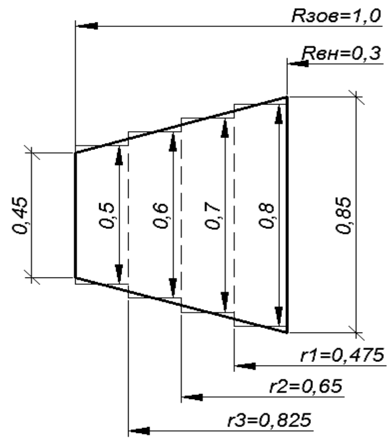

Рис. 2

Частоти визначені для трьох варіантів граничних умов на внутрішній граничній поверхні пластини при вільній від закріплень зовнішній. Для кожного з варіантів граничних умов в першому рядку табл. 2 наведено значення частот, отримані по запропонованій методиці, в другому – значення, взяті з роботи [7]. Останні отримані при реалізації підходу, що базується на апроксимації пластини набором з чотирьох пластин

Тимошенка постійної товщини (на рис. 2 показані пунктирними лініями). Пластина, що розглядається, може бути віднесена до пластин середньої товщини, для яких теорія типу Тимошенка забезпечує надійні розв'язки, а тому взяті з роботи [7] можна вважати певною мірою еталонними. Отримані по запропонованій методиці значення частот для пластини ступінчато-змінної товщини наведено в третьому рядку табл. 2.

Таблиця 2

Умови закріплення	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
Вільний край	1,756	3,549	4,356	4,844	5,723
	1,558	3,571	4,355	5,022	5,765
	1,493	3,340	4,455	4,922	5,660
Шарнірне спирання	1,817	3,643	4,758	5,258	6,121
	1,634	3,843	4,795	5,411	6,401
	1,529	3,511	4,858	5,315	6,507
Жорстке закріплення	1,859	3,830	5,031	5,883	6,669
	1,654	3,848	4,966	5,509	6,500
	1,540	3,523	4,910	5,396	6,647

Аналізуючи дані табл. 2, можна сказати про збіжність результатів, отриманих по запропонованій методиці (перший рядок) та по теорії пластин Тимошенка (другий рядок). Найбільша розбіжність значень (до 12 %) спостерігається для першої та четвертої частот, що може бути віднесено на рахунок апроксимації пластинами постійної товщини. Так, порівняння значень другого та третього рядків табл. 2 (для пластини ступінчато-змінної товщини), показує, що в цьому випадку розбіжність значно менша (до 4 – 7 % для першої частоти та 2 % для четвертої).

Варто також зауважити, що найкраща збіжність результатів спостерігається для випадку вільних від закріплень граничних поверхонь. Це пояснюється тим, що в теорії Тимошенка приймається закріплення лише граничного контуру серединної площини, в той час як в теорії пластин, що розглядається в даній роботі, граничні умови моделюються на всій торцевій поверхні пластини.

В цілому, розв’язані вище тестові задачі показали високу точність визначення частот власних коливань по запропонованій методиці, а також її ширші, порівняно з відомими прикладними теоріями, можливості.

Модельна задача. Для ілюстрації можливостей розробленої методики при розрахунку частот і форм власних коливань об’єктів складної геометрії розв’язана модельна задача про власні коливання розрахункової моделі турбінного диску авіаційного газотурбінного двигуна.

Турбінний диск в якості об’єкта розрахунку обраний з наступних міркувань. З практичної точки зору, максимальна точність розрахунку частот власних коливань турбінних дисків дозволяє на стадії проектування забезпечити відстроювання їх власних частот від частот робочого циклового навантаження турбінного двигуна. Це дозволяє знизити матеріальні і часові затрати на відстроювання експериментальними методами при доведенні таких конструкцій. З теоретичної точки зору, розрахунок турбінного диску, що має складну геометричну форму і не має серединної площини симетрії, дозволяє повною мірою дослідити можливості запропонованої методики та перевірити її достовірність шляхом порівняння з експериментальними даними.

Конструктивна схема радіального перерізу диску прийнята відповідно до роботи [8] і показана на рис. 3 тонкими суцільними лініями, а його розрахункова схема показана жирними лініями. На рисунку наведено відносні розміри, віднесені до зовнішнього радіусу диску.

Лінії, що обмежують переріз диска, апроксимуються (рис. 3) поліномами нульової (постійна товщина), першої (лінійно-змінна товщина) та другої степені. Штриховими лініями на рис. 3 відмежовано ділянки, в межах яких задається закон зміни товщини. Як і в роботі [8], виступаючі елементи при апроксимації відкидаються, в тому числі й циліндричні фланці, що примикають до масивної маточини.

Отримані по запропонованій методиці (при реалізації покрокового методу) безрозмірні частоти власних коливань диску, зображеного на рис. 3, а також відповідні експериментальні та розрахункові значення, взяті з роботи [8], наведено в табл. 3. Безрозмірні частоти $\lambda_{j,m}$ пов’язані з коловими частотами $\omega_{j,m}$ наступною залежністю:

$$\lambda_{j,m} = \omega_{j,m} R \cdot \sqrt{\rho/E} \ ,$$

де m – число вузлових площин (діаметрів); j – порядковий номер частоти при фіксованому m; R – зовнішній радіус тіла обертання; ρ, E – відповідно щільність та модуль пружності матеріалу.

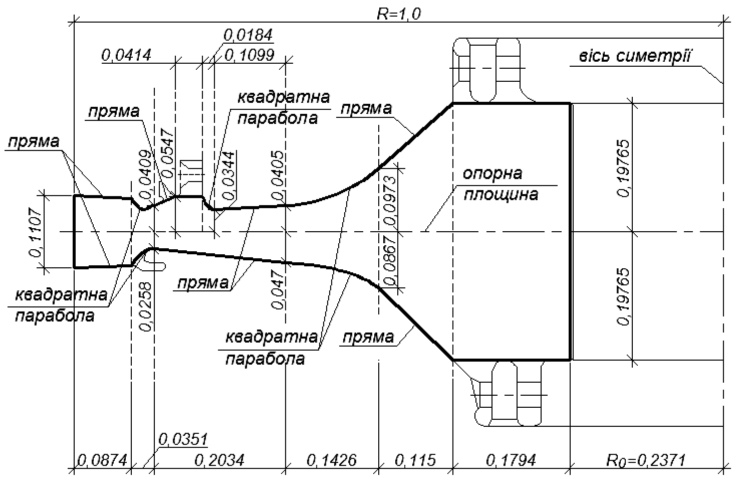

Рис. 3. Радіальний переріз турбінного диску.

При визначенні розрахункових значень частот в роботі [8] реалізується підхід, що базується на розбитті складної конструкції на тіла канонічної форми (структурні елементи). Такий підхід є чи не єдиним (за виключенням загальних чисельних методів) з відомих на сьогоднішній день методів визначення частот і форм власних коливань пластин змінної товщини.

Для диску, що розглядається, структурними елементами є циліндричні тіла, для яких в роботі [8] реалізовано два алгоритми визначення частот і форм власних коливань. Перший з них базується на розв'язках динамічної задачі теорії пружності для скінченного циліндра, в другому – структурний елемент розглядається з позиції теорії коливань пластин по моделі Тимошенка. При цьому в силу гіпотез теорії пластин при розрахунку диску за другим алгоритмом (шоста колонка табл. 3) приймається, що апроксимуючі циліндри розташовані так, що їх серединні площини утворюють площину симетрії диску. Асиметричність реального диску враховується лише при розрахунку методом теорії пружності (п'ята колонка табл. 3). Значення безрозмірних частот, отримані при експериментальному дослідженні, методика якого докладно описана в [8] наведені в третій колонці табл. 3.

Таблиця 3

m	j	Експеримент [8]	Розрахункові значення		
			Запропонована методика	Теорія пружності [8]	Модель Тимошенка [8]
2	1	0,4293	0,4253	0,4233	0,3842
3	1	0,5719	0,5650	0,5520	0,5717
4	1	0,7266	0,7510	0,7784	0,7823
5	1	0,9517	1,0059	1,0845	1,0605
6	1	1,2083	1,3231	1,4508	1,4174
7	1	1,503	1,6931	1,8614	1,8222
8	1	1,807	2,1082	2,3158	2,1338
3	2	1,925	2,039	1,958	2,029

Як видно з табл. 3, запропонована методика розрахунку дає найбільш близькі до експериментальних значення частот. Так при $m \le 4$ похибка запропонованої методики по відношенню до експериментальних частот складає 0,9 – 3,4 %, в той час як методу теорії пружності 1,4 – 7,1 %, а методу моделі Тимошенка до 10,5 %. При $m \ge 5$ відмінність зростає до 12,6 %, 24 % та 21 % відповідно.

Стосовно оцінок розбіжності значень, отриманих по запропонованій методиці, то їх можна вважати певною мірою орієнтовними з наступних як суб’єктивних, так і об’єктивних причин. Суб’єктивними причинами, усунувши які можна було б підвищити точність розрахунку, є такі:

- по-перше, фактичні розміри диску в роботі [8] не наведені, а тому точність апроксимації перерізу диска визначається точністю графічного зображення в згаданій роботі. Таким чином розрахункова схема не повторює на 100 % геометрію досліджуваного зразка, хоча вочевидь є більш близькою до нього порівняно з запропонованим розбиттям на циліндри;

- по-друге, не наводяться також фізико-механічні характеристики реального диску, які очевидно для конкретного зразка не визначались, а тому при розрахунку орієнтовно прийнято значення коефіцієнту Пуассона $\nu = 0{,}3$, що може дещо відрізнятися від реального.

До об’єктивних причин розбіжності розрахункових значень (отриманих як в роботі [8], так і в даній роботі) з експериментальними, відносяться наступні:

- при розрахунках граничні поверхні пластини прийняті вільними від закріплень, що не зовсім відповідає умовам виконання експерименту. Експериментальний зразок вільно встановлювався на столі, контактуючи з його поверхнею через товстий шар гуми. Оскільки спирання здійснювалось не по всій поверхні маточини, а лише через циліндричні фланці, що до неї примикають, то можна вважати похибку, внесену граничними умовами, незначною;

- більш істотну похибку в розрахунок вносить наявність похилих до осі турбінного диску пазів під замки лопаток, внаслідок чого диск не є тілом обертання. Проте в облопаченому диску ці пази заповнюються лопатковим замком і відмінність диску від тіла обертання зменшується.

Таким чином можна зробити висновок, що запропонована в даній роботі методика визначення параметрів власних коливань пластин обертання змінної товщини порівняно з відомими підходами дає можливість суттєво підвищити точність розрахунку частот. Крім того, отримані кількісні оцінки свідчать про забезпечення необхідної з практичної точки зору точності визначення частот власних коливань в широкому діапазоні спектру, в тому числі й високочастотних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Чибіряков В.К.,* Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
2. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Лен.: Судпромгиз, 1958. – 372 с.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
4. *Жупаненко І.В.* Власні коливання товстої кільцевої пластини // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. – Вип. 83. – К.: КНУБА, 2009. – С. 165 – 172.
5. *Чибіряков В.К.*, Жупаненко І.В. Про один алгоритм розрахунку вісесиметричних коливань круглої пластини // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. – Вип. 81. – К.: КНУБА, 2007 – С. 43 – 50.
6. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек: справочник / Под ред. Филиппова А.П. – Киев: Наук. думка. – 1964. – 288 с.
7. *Моргачев К.С.* Динамика пластин (модель Тимошенко) постоянной и переменной толщины: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.23.17 / Самарский гос. арх.-строит. ун-т. – Самара, 2007. – 20 с.: ил.
8. *Кузнецов Н.Д., Фридман Л.И., Колотников М.Е.* Расчетные методы определения собственных частот элементов контрукций в форме тел вращения и близких к ним // Проблемы машиностроения и надежности машин. М.: Наука. – 1993. – № 3. – С. 98 – 106.

Отримано 27.08.10

Чибиряков В.К., Жупаненко И.В.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Предложено методику решения задачи о собственных колебаниях пластин вращения переменной толщины, реализующая комбинированный двухэтапный численно-аналитический подход. Аналитический этап расчета состоит в понижении размерности исходных соотношений динамической задачи теории упругости путем применения обобщенного метода конечных интегральных преобразований по поперечной координате пластины и метода Фурье по окружной координате. Для численного решения редуцированной одномерной задачи предложено два альтернативных подхода, эффективность и достоверность которых проверена решением тестовых задач.

Chybiryakov V.K., Zhupanenko I.V.

THE METHOD FOR SOLUTION OF THE PROBLEM ON FREE VIBRATIONS OF AXI-SYMMETRIC PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

The method is proposed for solution of the problem on free vibrations of axi-symmetric plates with variable thickness. The method realizes combined the numerically-analytical approach. At the analytical stage of calculation is applied the extended method of finite integral transforms on plate’s thicknesses and the Fourier method with respect to the circumferential coordinate for reduction of three-dimensional equations of the dynamic theory of elasticity. The reduced one-dimensional problem are solved numerically by two alternative approaches, which efficiency and reliability has been checked by solving of test problems.