

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2 (ЗМ 4) Диференціальні рівняння

Методичні вказівки
до виконання самостійних та індивідуальних робіт
для здобувачів ОПП першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
інженерних та природничих спеціальностей
всіх форм навчання КНУБА

Київ 2025

УДК 512.64,514.12,517.2

B55

Укладачі: О. В. Доля, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Ю. В. Рябчун, д-р філософії, доцент;
Л. І. Турчанінова, канд. техн. наук, доцент

Рецензент О. І. Баліна, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск О. О. Терентьєв, д-р техн. наук,
професор, завідувач кафедри.

*Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій
проектування та прикладної математики, протокол № 10 від
27 травня 2025 року.*

В авторській редакції.

Вища математика: Модуль 2 (ЗМ 4). Диференціальні рівняння:
B55 методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт
/уклад. : О. В. Доля, Ю. В. Рябчун, Л. І. Турчанінова. – Київ:
КНУБА, 2025.– 28 с.

Містять необхідні практичні відомості для виконання самостійних та індивідуальних завдань Модуля 2, що включають завдання з диференціальних рівнянь різних порядків і систем диференціальних рівнянь. Також приклади виконання типових варіантів змістового модуля 4 індивідуальної роботи та 30 варіантів для виконання самостійних робіт.

Призначено для здобувачів ОПІ першого (бакалаврського) рівня вищої освіти інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання КНУБА

© КНУБА, 2025

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	4
МОДУЛЬ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	5
РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА	13
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	26

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Запропоноване видання являє собою методичні рекомендації для вивчення дисципліни «Вища математика. Модуль 2. Диференціальні рівняння».

Основою навчання є самостійна робота студента з підручником, навчальним посібником, конспектом лекцій та виконання індивідуальної роботи.

Метою викладання дисципліни «Вища математика» є засвоєння фундаментальних основ математики, зокрема, аналізу необхідних для подальшого вивчення та розуміння інших математичних дисциплін.

У цьому виданні наведено розв'язки варіантів типових завдань з індивідуальної роботи змістового модуля 4. Рекомендуються для аудиторної та самостійної роботи студентів КНУБА.

МОДУЛЬ 2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку (табл.1).
2. Визначити тип рівняння та знайти його загальний або частковий розв'язок (табл. 2).
3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку (табл.3).
4. Розв'язати систему рівнянь (табл.4).

Таблиця 1

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
1	$(y - x^2 y)xdy + dx = 0$ $(x + y) - (y - x)y' = 0$ $x^2 dy + 2xydx = dx$ $y'x + y = -x^2 y^2$	8	$y \ln^3 y + y' \sqrt{x+1} = 0$ $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ $y' - \frac{y}{x} = x \cos x$ $y' + 2xy = 2x^3 y^3$
2	$x(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ $xy' - y = \sqrt{y^2 - x^2}$ $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $x dy = (y^2 \ln x - y)dx$	9	$(1 + x^2)y' - \frac{1}{2} \cos^2 2y = 0$ $x dy - y \ln \frac{y}{x} dx = 0$ $\cos x dy + y \sin x dx = dx$ $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$
3	$y' \sin x = y \ln y$ $(x + y) - (y - x)y' = 0$ $y' - \frac{2y}{x} = 3x$ $y' - y + y^2 \cos x = 0$	10	$(1 + x^2)dy + y \sqrt{1 + x^2} dx = xydx$ $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$ $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$ $y' - y = xy^2$
4	$x \sqrt{1 - y^2} dx + y \sqrt{1 - x^2} dy = 0$ $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$ $dy + y dx - e^x dx = 0$ $x dy = (y - 2x^2 y^2) dx$	11	$e^{x^3 - y^3} dx + \frac{y^2}{x^2} dy = 0$ $y + yy' - x + xy' = 0$ $y' + \frac{y}{x} = x^2$ $xydy = (y^2 + x)dx$

5	$2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0$ $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(y^2 + 1)dx + 2xydy = 2y^2dy$ $x dy = y(2y \ln x - 1)dx$	12	$y\sqrt{y^2 - 1}dx - \sqrt{1 - x^2}dy = 0$ $y' = \frac{y - \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$ $y - (x + y^2 \sin y)y' = 0$ $y' = xy + x^3y^3$
6	$y\sqrt{y^2 - 1}dx - \sqrt{1 - x^2}dy = 0$ $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ $xy' - 2y = 2x^4$ $dy = (xy^2 + 3xy)dx$	13	$2x^2yy' + y^2 = 2$ $(x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$ $y' + \frac{xy}{1 - x^2} = \arcsin x$ $3y^2y' + y^3 + x = 0$
7	$(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$ $y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right)$ $2(e^y - x)dy = dx$ $y' + 2xy = 2xy^2$	14	$(xy^2 + x) + (y - x^2y)y' = 0$ $y^2 + x^2y' = xyy'$ $(1 + x^2)dy - 2ydx = 0$ $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$
15	$e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$ $y' = \frac{3xy^2 + 2x^3}{y^3}$ $2ydx + xdy = 2y^3dx$ $y' = y^2e^x - 2y$	22	$\frac{\operatorname{tgy}}{\cos^2 x} dx + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y} dy = 0$ $y + xy' + yy' = 0$ $x dy + dx - \cos y dy = 0$ $dy - y^2e^x dx = -2y dx$
16	$e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y \cdot y' = 0$ $x dy = y dx + \sqrt{y^2 - x^2} dx$ $2y dx - (2y^3 - x) dy = 0$ $xy^2 dy = (x^2 + y^2) dx$	23	$(1 + x)y dx + (1 - y)x dy = 0$ $2x^3 dy = y(2x^2 - y^2) dx$ $y dx - x dy - y^2 \cos x dx = 0$ $y' + \frac{1}{x} y = y^2 \ln x$
17	$dy \sin x - y \ln y dx = 0$ $y' = \frac{y^2 - 4yx}{2x^2 - 2xy + 2y^2}$ $y' + 2xy = e^{-x^2}$ $2y dy = (x + y^2) dx$	24	$xy^2 + x + (y - x^2y)y' = 0$ $x^2y' + y^2 - 2xyy' = 0$ $(x + 1)dy - 2ydx = (x + 1)^3 dx$ $y' + y \frac{\operatorname{ctg} x}{2} = y^3 \frac{\sin x}{2}$
18	$e^y \sqrt{1 + x^2} dy + dx = 0$ $(2\sqrt{xy} - y) dx + x dy = 0$ $(x + y^2)y' = y$ $y' + \frac{1}{x} y = -xy^2$	25	$(1 + y^2) dx = xy(1 + x^2) dy$ $y dx + 2\sqrt{xy} dy - x dy = 0$ $(xy + e^x) dx - x dy = 0$ $y' - y \cdot \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$

19	$(1 + e^x)yy' = e^x$ $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$ $y' + 2y = e^{-x}$ $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy$	26	$(1 + x^2)y^3 + (1 - y^2)x^3 y' = 0$ $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$ $\frac{dx}{2y} + (x - y^2) dy = 0$ $y' \cos x + y \sin x = 1$
20	$x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0$ $y' = \frac{x(x + 2y)}{y^2 - x^2}$ $dy - y \operatorname{ctg} x dx = \sin x dx$ $xy' - y = -xy^2$	27	$y' \sqrt{1 + y^2} = (2 + y) \sqrt{1 + x^2}$ $x dx - y dx = x \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx$ $\frac{dx}{dy} + xy + 1 = 0$ $2x^2 dy = (4xy + y^2) dx$
21	$y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0$ $x dy - \left(y - x e^{\frac{x}{y}}\right) dx = 0$ $y' + y \cos x = \cos x$ $xy' - 2y = 3x^2 y^2$	28	$(1 + x^2)y' + y \sqrt{1 + x^2} = xy$ $x dy = y(\ln y - \ln x) dx$ $y' + 2xy - x e^{-x^2} = 0$ $y' - y \cos x = y^2 \cos x$
29	$2y(1 + e^x)y' = e^x$ $x dy - y dx = x \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx$ $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ $xy' - y^2 \ln x + y = 0$	30	$y' \cos^2 x = \sin^2 y$ $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ $y' - \frac{y}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ $y' + 2xy = y^2 e^{-x^2}$

Таблиця 2

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
1	$y' - 2y = 3x - 1, y(0) = \frac{1}{4}$ $y'' - \frac{y'}{x} = x \arctg x$	16	$y'' - y = x \sin x, y(0) = 0, y'(0) =$ $2xy'y'' = (y')^2 + 1$
2	$2y' - 6y + x^2 = 0, y(0) = 0$ $2y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$	17	$y'' - y' - 2y = (x + 2)e^{-x},$ $y(0) = 0, y'(0) = 0$ $yy'' + (y')^2 = 0$
3	$xy' + y = x \sin x, y(\pi) = 3$ $y'' - \frac{y'}{x} = x^2 \ln x$	18	$y'' + y'tg x = 0, y(0) = 0, y'(0) =$ $y(y + 1)y'' = (y')^2$
4	$y' + \frac{2y}{1 - x^2} = \frac{1 - x}{(1 + x)^3}, y(2) =$ $(y - 4)(y - 5)y'' = (y')^2$	19	$y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 8} = 1, y(0) = \frac{1}{8}$ $y(y - 1)y'' = (y')^2$
5	$y' = \sqrt{y^2 + 4} \ln^2 x, y(1) = 0$ $y'' - \frac{y'}{x} = x^2 \sin x$	20	$y'' + y'tg x = \cos^4 x, y(0) = 0,$ $y'(0) = 0$ $(1 + y)y'' = (y')^2$
6	$y' + xy^3 = xy, y(0) = \frac{1}{2}$ $(y + 4)(y + 2)y'' = (y')^2$	21	$y'' - y' - 6y = xe^{2x}, y(0) = 0,$ $y'(0) = 0$ $y'' \operatorname{tgy} = (y')^2$
7	$y' + xy = x^2, y(0) = 1$ $y'' - \frac{y'}{x} = xe^{2x}$	22	$y'' \sin y = (y')^2, y(0) = \frac{\pi}{3},$ $y'(0) = 1$ $y'' - \frac{2y'}{x}(x^2 - x + 1) = x^2 \arctg x$
8	$y''' = x \sin x, y(0) = 0, y'(0) =$ $y''(0) = 1$ $y''y^3 = 1$	23	$y^3 y' + \frac{y^4}{2x} = \sin x, y\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ $y'' \sqrt{1 + y^2} + (y')^2 = 0$
9	$y' + \frac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}, y(1) = 1$ $y'' - \frac{y^{-x}}{x} = x \sin x$	24	$y' + \frac{2xy}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^4 - 1}, y(0) = 1$ $y'' = (y')^2 \operatorname{tgy}$

10	$y'' = \frac{x}{(x+2)^3}, y(0)=0, y'(0)=0$ $1 + (y')^2 = yy''$	25	$y'' - y' = 3e^x, y(0)=0, y'(0)=0$ $y''\sqrt{1+y^2} + (y')^2 = 0$
11	$y^4 y' + y^5 = x^2 + 1, y(0)=0$ $y'' - \frac{y'}{x} = x \cos^2 x$	26	$2y'' + y' - y = 3xe^x, y(0)=0,$ $y'(0)=0$ $(y'')^2 = y'$
12	$y' = \frac{2y-x}{2x+y}, y(1)=1$ $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos^2 x$	27	$y = xy' - x^2, y(5) = 2$ $2y'' - y' \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sin^3 \frac{x}{2}$
13	$xy' - y = xe^{-x}, y(1)=0$ $y'' - \frac{y'}{\sin x} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}}$	28	$y'' + 4y' - 5y = xe^x, y(0)=0,$ $y'(0)=0$ $y'' - \frac{y'}{x} = x \arcsin x$
14	$y' + y \cos x = \sin x \cos x, y(0)=0$ $y'' + \frac{xy'}{x^2+4} = x^3$	29	$y'' + y' = x^2 - x + 3, y(0)=0,$ $y'(0)=0$ $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos^3 x$
15	$y' + \frac{y}{x^2+x} = \frac{x}{x+1}, y(1)=1$ $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos^4 x$	30	$y'' = \sin^3 x, y(0)=0, y'(0)=0$ $y'' = 2y + 1$

Таблиця 3

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
1	$y'' = 9y,$ $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$ $y'' + y = \operatorname{tg} x$	16	$y'' + 9y = 0,$ $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$
2	$y'' + y = 0,$ $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ $y'' + y = \operatorname{ctg} x$	17	$y'' + 3y' = 0,$ $y'' + y' - 2y = 6x^2$ $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$
3	$y'' - 7y' + 12y = 0,$ $y'' - 4y = 8x^3$ $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$	18	$y'' - 5y' + 6y = 0,$ $y'' + 9y = e^x \cos x$ $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$
4	$y'' + 2y' + 10y = 0,$ $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x$ $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$	19	$y'' - 4y' + 5y = 0,$ $y'' + 2y = x^2 + 2$ $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$
5	$y'' - 5y' + 4y = 0$ $y'' + 3y' + 2y = 2\cos 2x$ $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$	20	$y'' - y' - 2y = 0,$ $y'' + 4y = x \sin 2x$ $y'' + y = \sin x \cos x$
6	$y'' - 2y' + 2y = 0,$ $y'' + y = x$ $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$	21	$y'' - 6y' + 34y = 0,$ $y'' + y = \sin x$ $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$
7	$y'' + 2y' + 9y = 0,$ $y'' + y = 2e^x$ $y'' + y = \cos x$	22	$y'' - 4y' + 4y = 0,$ $y'' + y = 2e^{-x}$ $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$
8	$y'' - 16y = 0,$ $y'' + 3y' = 9x$ $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$	23	$y'' + 4y' + 29y = 0$ $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$ $y'' - y' = \frac{2x}{x^3} e^x$
9	$y'' - 8y' + 16y = 0$ $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$	24	$y'' - 4y' + 3y = 0,$ $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$

	$y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$		$y'' - y' = \frac{2x}{x^3} e^x$
10	$y'' + y = 0$ $y'' - 3y' + 2y = e^x$ $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$	25	$y'' - 4y' + 13y = 0,$ $y'' + y = -\sin 2x$ $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$
11	$2y'' + 5y' + 2y = 0, y'' - 2y = xe^{-x}$ $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}$	26	$y'' + 4y' = 0,$ $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$ $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$
12	$y'' - 2y' + y = 0,$ $y'' - 2y' = x^2 - x$ $y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}$	27	$y'' - 4y' + 4y = 0,$ $y'' + y = -\sin 2x$ $y'' - 2y' + y = \frac{x^3 + 2x + 2}{x^3}$
13	$y'' + 6y' + 13y = 0,$ $y'' + 5y' + 6y = e^{-x}$ $y'' - y' = e^{2x} \cos 2x$	28	$y'' - 4y = 0,$ $y'' - 4y' + 3y = e^{3x} \sin x$ $y'' - y = \frac{e^x}{e^x - 1}$
14	$y'' + 2y' + 2y = 0$ $y'' + y' = 6x$ $y'' - 2y' = \frac{x - 5}{e^{2x}}$	29	$y'' + 4y' = 0,$ $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} \sin x$ $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
15	$y'' - 4y = 0$ $y'' + 8y = e^{-2x}$ $y'' - y = \frac{e^x}{e^{x+1}}$	30	$y'' - 5y' + 8y = 0$ $y'' - y' = 2(1 - x)$ $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$

Таблиця 4

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
1	$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$	16	$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$
2	$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$	17	$\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$	18	$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$
4	$\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$	19	$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$
5	$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$	20	$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$
6	$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$	21	$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$
7	$\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$	22	$\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$
8	$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$	23	$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$
9	$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	24	$\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$
10	$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$	25	$\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$
11	$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$	26	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$
12	$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$	27	$\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$
13	$\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$	28	$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$
14	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$	29	$\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$
15	$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$	30	$\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

1. Визначити загальний розв'язок, або загальний інтеграл диференціальних рівнянь I порядку.

2. Розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку.

3. Знайти загальний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків.

4. Методом виключення знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами .

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy' = y \ln y \quad (1.1)$$

Розв'язання.

Диференціальне рівняння (1.1) можна привести до вигляду $y' = f(x)y(y)$, а саме

$$y' = \frac{1}{x} \cdot y \ln y.$$

Значить це диференціальне рівняння з розподіленими змінними. Ділимо змінні за правилом пропорції:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x}; \quad \frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x} \quad (1.2)$$

Інтегруємо обидві частини диференціального рівняння (1.2)

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{x}$$

звідки

$$\ln \ln y = \ln x + c_1,$$

де c_1 – стала інтегрування. Для зручності потенціювання запишемо $c_1 = \ln c$. Тоді

$$\begin{aligned} \ln \ln y &= \ln cx \\ \ln y &= cx \\ y &= e^{cx} \end{aligned} \quad (1.3)$$

При розподіленні змінних в таких диференціальних рівняннях можлива втрата розв'язків. У нашому випадку ми фактично припускали, що $y \neq 0$ і $y \neq 1$. Безпосередньою підстановкою ми переконуємось, що $y=0$ і $y=1$ є розв'язками рівняння (1.1). Розв'язок $y=1$ може бути отримано з множини розв'язків (1.3) при $c=0$. Але розв'язок $y=0$ не входить у множину

розв'язків (1.3), так як рівність $e^{cx} = 0$ не виконується ні при яких значеннях c . Тому розв'язками рівняння (1.1) є функції

$$y = e^{cx}, y = 0.$$

Приклад 2. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad (1.4)$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння (1.4) може бути зведеним до вигляду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

а саме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} \quad (1.5)$$

і тому можемо вважати, що (1.4) є однорідне диференціальне рівняння. Тому робимо заміну

$$y = u(x) \cdot x, \quad (1.6)$$

де $u(x)$ – невідома функція від x . Надалі для спрощення записів не будемо вказувати аргумент x , а просто писати u .

Тоді

$$y' = u + x \frac{du}{dx}, \quad (1.7)$$

Підставляємо похідну (1.7) і заміну (1.6) в рівняння (1.5):

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2},$$

або

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u(1 + u^2)}{1 - u^2}.$$

Розподіляємо змінні

$$\frac{(1 - u^2) du}{u + u^3} = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можемо інтегрувати:

$$\int \frac{(1 - u^2)}{u + u^3} du = \int \frac{dx}{x} \quad (1.8)$$

Знайдемо інтеграл в лівій частині (1.8):

$$\int \frac{(1 - u^2 + 4u^2) - 4u^2}{u + u^3} du = \int \frac{1 + 3u^2}{u + u^3} du - 4 \int \frac{u^2 du}{u(1 + u^2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d(u + u^3)}{u + u^3} - 2 \int \frac{d(1 + u^2)}{1 + u^2} = \\
&= \ln(u + u^3) - 2\ln(1 + u^2) = \ln \frac{u+u^3}{(1+u^2)^2} = \ln \frac{u(1+u^2)}{(1+u^2)^2} = \\
&\quad \ln \frac{u}{1+u^2}.
\end{aligned}$$

Підставляємо знайдений інтеграл в (1.8):

$$\ln \frac{u}{1+u^2} = \ln x + \ln c.$$

Для зручності потенціювання сталої інтегрування задаємо у вигляді $\ln c$. Тоді

$$\begin{aligned}
\ln \frac{u}{1+u^2} &= \ln xc \text{ і} \\
\frac{u}{1+u^2} &= xc.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

З (1.5) $u = \frac{y}{x}$, тоді (1.9) приймає вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{y/x}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = xc
\end{aligned}$$

або

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = cx.$$

Це і буде загальний інтеграл диференціального рівняння (1.4).

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' - \frac{2}{x}y = x \tag{1.10}$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння (1.10) має вигляд лінійного рівняння першого порядку

$$y' + p(x)y = f(x),$$

де $p(x)$ і $f(x)$ – задані функції, а саме в нашому випадку

$$p(x) = -\frac{2}{x}, f(x) = x.$$

Тому зробимо заміну

$$y = u(x) \cdot v(x) \tag{1.11}$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – дві невідомі функції від x . Надалі для спрощення записів не будемо вказувати аргумент.

З (1.11) маємо

$$y' = u'v + v'u.$$

Підставимо y і y' в диференціальне рівняння (1.10):

$$uv' + v'u - \frac{2}{x}uv = x.$$

Згрупуємо члени з v :

$$uv' + v\left(u' - \frac{2}{x}u\right) = x. \quad (1.12)$$

Підберемо функцію u таким чином, щоб співмножник u в дужках обертався в нуль, тобто $u' - \frac{2}{x}u = 0$. Це рівняння з розподіленими змінними. Його розв'язок $u = cx^2$.

Оберемо один з розв'язків, наприклад $u = x^2$, тоді рівняння (1.12) приймає вигляд $x^2v' = x$, розділяємо змінні $x^2 \frac{dv}{dx} = x$, $dv = \frac{dx}{x}$, і інтегруємо

$$v = \ln|x| + c.$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (1.10) отримуємо у вигляді

$$y = x^2(\ln|x| + c).$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy' - y(2y \ln x - 1) = 0. \quad (1.13)$$

Розв'язання.

Щоб з'ясувати тип диференціального рівняння зробимо деякі перетворення. Поділимо обидві частини диференціального рівняння (1.13) на x :

$$y' - \frac{y}{x}(2y \ln x - 1) = 0.$$

Далі

$$y' + \frac{1}{x}y = 2 \frac{\ln x}{x} y^2. \quad (1.14)$$

Тепер легко побачити, що рівняння (1.14) представляє собою рівняння Бернуллі

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad (1.15)$$

де $n \in \mathbb{R}$ і $n \neq 0, n \neq 1$.

За таких обмежень на n рівняння (1.13) вже не є лінійним.

Існує метод зведення рівняння Бернуллі (1.15) до лінійного рівняння. Суть цього метода:

- обидві частини рівняння (1.15) домножити на y^{-n} :

$$y \cdot y^{-n} + p(x)y \cdot y^{-n} = q(x) \quad (1.16)$$

- виконати підстановку

$$y^{1-n} = z, \quad (1.17)$$

де z - невідома функція від x (далі аргумент у функції z не будемо вказувати);

- продиференціюємо обидві частини рівності (1.17):

$$(1-n)y^{-n}y' = z'$$

або

$$y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n};$$

(1.18)

- підставити (1.18) і (1.17) в рівняння (1.16), яке стане лінійним відносно функції z і інтегрується методом, який ми розглянули в прикладі 3;

- повернутися до шуканої функції за допомогою (1.17).

Повертаємось наразі до рівняння (1.14) і за описаною методикою зведемо це рівняння до лінійного. Обидві частини диференційного рівняння (1.14) помножимо на y^{-2} :

$$y^{-2} \cdot y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{2\ln x}{x} \quad (1.19)$$

Зробимо у цьому рівнянні підстановку

$$y^{-1} = z. \quad (1.20)$$

Продиференціюємо цю рівність ліворуч і праворуч та отримаємо

$$-y^{-2}y' = z'$$

або

$$y^{-2}y' = -z' \quad (1.21)$$

Підставляємо (1.20) і (1.21) в рівняння (1.19)

$$-z' + \frac{1}{x}z = \frac{2\ln x}{x}$$

або

$$z' - \frac{1}{x}z = -2 \frac{\ln x}{x} \quad (1.22)$$

Отримали рівняння (1.22), що є лінійним відносно функції z . Розв'язуємо його методом, що був розглянутий у прикладі 3. Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.22) має вигляд

$$z = cx + 2(\ln x + 1).$$

Для повернення до шуканої функції у скористаємось (1.20). Тоді

$$y^{-1} = cx + 2(\ln x + 1)$$

або

$$y = \frac{1}{cx + 2(\ln x + 1)}.$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння

$$y'' = xe^x, y(0) = 1, y'(0) = 2 \quad (1.23)$$

Розв'язання.

Диференціальне рівняння (1.23) відноситься до типу

$$F(x, y^{(n)}) = 0$$

і його записано у вигляді

$$y^{(n)} = f(x). \quad (1.24)$$

Для отримання загального розв'язку диференціального рівняння (1.24) потрібно n разів проінтегрувати функцію $f(x)$, враховуючи кожного разу сталу інтегрування.

Коли треба розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння порядку n , то треба знайти таке рівняння диференціального рівняння, щоб воно та його похідні до порядку $(n - 1)$ включно для заданого значення аргументу $x = x_0$ приймали б задані значення:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0 \dots y_{x_0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

де $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа, які називають початковими умовами.

Особливістю задачі Коші являється таке: шукана функція і її похідні задаються для одного і того ж значення незалежної змінної $x = x_0$.

Повернемося до заданого диференціального рівняння (1.23) і проінтегруємо його в перший раз:

$$y' = \int_0^x xe^x dx.$$

Знайдемо інтеграл:

$$I = \int_0^x xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = e^x dx \\ du = dx \quad v = e^x \end{array} \right| = xe^x - e^x + c_1,$$

або

$$y' = xe^x - e^x + c_1$$

(1.25*)

Проінтегруємо вдруге:

$$y = xe^x - 2e^x + c_1x + c_2 \quad (1.25)$$

Для знаходження сталих c_1 і c_2 використовуємо початкові умови із (1.23) і знайдений розв'язок (1.25):

$$y(0) = -2 + c_2, -2 + c_2 = 1, c_2 = 3.$$

Тепер продиференціюємо (1.25) (або з (1.25*))

$$y' = e^x + xe^x - 2e^x + c_1$$

$$y'(0) = 1 - 2 + c_1 = -1 + c_1, \quad c_1 - 1 = 2, \quad c_1 = 3$$

Таким чином, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = xe^x - 2e^x + 3x + 3.$$

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, y(1) = 0, y'(1) = 1. \quad (1.26)$$

Розв'язання.

Задане рівняння відноситься до типу

$$f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Його порядок можна зменшити на одиницю завдяки заміні

$$y' = z(x), \quad (1.27)$$

де $z(x)$ - нова невідома функція (надалі аргумент x не вказуємо).

Робимо в диференціальному рівнянні (1.26) заміну (1.27) і отримаємо однорідне диференціальне рівняння відносно нової невідомої функції z :

$$xz' = z \ln \frac{z}{x}$$

або

$$z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x}. \quad (1.28)$$

Розв'язування однорідного рівняння ми бачили в прикладі 2. Робимо в однорідному диференціальному рівнянні (1.28) заміну

$$z = xu \quad (1.29)$$

і диференціюємо

$$z' = u + u'x \quad (1.30)$$

Підставляємо (1.29) і (1.30) в рівняння (1.28):

$$u \ln u = u + u'x$$

$$u'x = u(\ln u - 1)$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

і інтегруємо:

$$\ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln c_1$$

Потенціюємо:

$$\ln u - 1 = xc_1$$

і знаходимо функцію u :

$$u = e^{xc_1+1}$$

З (1.29) маємо

$$z = xe^{xc_1+1}$$

Значить невідома функція z в (1.27) знайдена і повертаємося до функції y :

$$y' = xe^{xc_1+1}$$

Тоді

$$y = \int xe^{xc_1+1} dx$$

Інтеграл знаходимо, використовуючи інтегрування в частинах. Таким чином функція y приймає вигляд:

$$y = \frac{xe^{xc_1+1}}{c_1} - \frac{e^{xc_1+1}}{c_1^2} + c_2 \quad (1.31)$$

Для знаходження c_1 і c_2 скористаємося початковими умовами i (1.31):

$$y(1) = \frac{e^{c_1+1}}{c_1} - \frac{e^{c_1+1}}{c_1^2} + c_2 = e^{c_1+1} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1^2} \right) + c_2$$

$$y'(1) = e^{c_1+1}$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^{c_1+1} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1^2} \right) + c_2 = 0 \\ e^{c_1+1} = 1 \end{cases}$$

З другої умови:

$$e^{c_1+1} = e^0$$

$$c_1 + 1 = 0$$

$$c_1 = -1$$

Підставляємо $c_1 = -1$ у першу умову:

$$1 \cdot \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{1} \right) + c_2 = 0$$

$$c_2 = 0.$$

Таким чином, розв'язок задачі Коші з (1.31) має вигляд:

$$y = -e^{1-x}(x + 1).$$

Приклад 7. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$(1 + y^2)yy'' = (3y^2 - 1)y'^2.$$

Розв'язування.

В загальному випадку це рівняння має вигляд

$$f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Зниження його порядку на одиницю досягається завдяки підстановки

$$y' = P(y), \quad (1.32)$$

де $P(y)$ - нова невідома функція від y , а не від x .

Тому

$$y'' = [P(y)]'_x = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot P. \quad (1.33)$$

Заміна (1.32) і (1.33) зводить задане рівняння до вигляду

$$(1 + y^2)y \frac{dP}{dy} P = (3y^2 - 1)P^2.$$

Скорочуємо на P і тим самим губимо розв'язки рівняння $y=c$, хоча вони задовільняють рівняння:

$$(1 + y^2)y \frac{dP}{dy} = (3y^2 - 1)P.$$

Це рівняння з розподіленими змінними.

Тому

$$\frac{dP}{P} = \frac{(3y^2-1)}{y(1+y^2)} dy.$$

Інтегруємо ліворуч і праворуч:

$$\ln p + \ln c_1 = \int \frac{3y^2-1}{y(1+y^2)} dy.$$

Для обчислення інтеграла скористаємося методом невизначених коефіцієнтів інтегрування дробово-раціональних функцій (обчислення опускаємо):

$$\ln c_1 P = \ln \frac{(1 + y^2)^2}{y}$$
$$c_1 P = \frac{(1+y^2)^2}{y}.$$

Використовуючи (1.32), отримуємо:

$$c_1 y' = \frac{(1 + y^2)^2}{y}$$

або

$$\frac{c_1 dy}{dx} = \frac{(1+y^2)^2}{y},$$

звідки

$$\frac{dx}{c_1} = \frac{y dy}{(1+y^2)^2}.$$

Проінтегруємо ліворуч і праворуч:

$$\frac{x}{c_1} + c_2 = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 + 1)}{(y^2 + 1)^2}$$

або

$$\frac{x}{c_1} + c_2 = -\frac{1}{2(1+y^2)}$$

це буде загальний інтеграл заданого диференціального рівняння.

Приклад 8. Визначити загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \quad (1.33)$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння (1.33) відноситься до лінійних однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Їх загальний вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1.34)$$

Розв'язок диференціального рівняння (1.34) шукають у вигляді

$$y = e^{kx}$$

де k знаходиться характеристичного рівняння, яке є алгебраїчним рівнянням порядку n :

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (1.35)$$

Для диференціального рівняння (1.33) характеристичне рівняння (1.35) має вигляд:

$$k^2 + 4k + 5 = 0.$$

Це квадратне рівняння в якості двох коренів має комплексну спряжену пару $k_{1,2} = -2 \pm i$.

Згідно теорії, фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (1.33) буде складатися з двох часткових лінійно-незалежних розв'язків

$$y_1 = e^{-2x} \cos x \text{ і } y_2 = e^{-2x} \sin x.$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (1.33) приймає вигляд: $y = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x$.

Приклад 9. Визначити загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = \sin x. \quad (1.36)$$

Розв'язання.

Диференціальне рівняння (1.36) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням вищих порядків зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1.37)$$

Його загальний розв'язок представляє собою суму загального розв'язку відповідного йому однорідного диференціального рівняння (1.34) і будь-якого часткового його розв'язку y_r :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_r, \quad (1.38)$$

де y_1, y_2, \dots, y_n фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння (1.34).

Для неоднорідного диференціального рівняння (1.36) права частина має спеціальний вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} [P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x],$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - многочлени однієї або різних степенів, λ і $\beta \in R$; степені многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ однакові – перші, а $\lambda = 0, \beta = 1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння (аналогічно прикладу 8) буде мати вигляд: $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^x$.

Частковий розв'язок y_r можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Будемо його шукати у вигляді

$$y_r = A \cos x + B \sin x,$$

де многочлени A і B – з невизначеними коефіцієнтами (вони мають нульовий степінь, як і права частина рівняння). Знайдемо похідні:

$$y_r' = -A \sin x + B \cos x,$$

$$y_r'' = -A \cos x - B \sin x.$$

Підставимо y_r, y_r', y_r'' в рівняння (1.36) і приведемо подібні:

$$(5A - 7B) \cdot \cos x + (5B + 7A) \cdot \sin x = \sin x.$$

Тепер прирівняємо коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$ праворуч і ліворуч:

$$\begin{cases} 5A - 7B = 0 \\ 7A + 5B = 1 \end{cases}$$

З цієї системи: $A = \frac{7}{74}; B = \frac{5}{74}$.

Тому загальний розв'язок (1.38) набуває вигляду

$$y = c_1 e^{6x} + c_2 e^x + \frac{7}{74} \cos x + \frac{5}{74} \sin x.$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y = e^x \quad (1.39)$$

Розв'язання.

Знаходимо (аналогічно прикладу 8) загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}. \quad (1.40)$$

Якщо загальний розв'язок однорідного рівняння знайдено, то загальний розв'язок (1.39) можна знайти за допомогою квадратур методом варіації довільних сталих c_1 і c_2 в (1.40), який запропонував Лагранж. Будемо шукати y в вигляді:

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}.$$

Для визначення функцій $c_1(x)$ і $c_2(x)$ маємо систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = e^x \end{cases}$$

Звідки

$$c_1(x) = \frac{1}{2}x + \bar{c}_1$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{4}e^{2x} + \bar{c}_2$$

і загальний розв'язок диференціального рівняння (1.39) буде мати вигляд

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \bar{c}_1\right)e^x + \left(-\frac{1}{4}e^{2x} + \bar{c}_2\right)e^{-x}.$$

Приклад 12. Знайти розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases} \quad (1.41)$$

Розв'язання.

Це нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку, яка розв'язується методом зведення системи до однорідного диференціального рівняння вищого порядку. З першого рівняння системи (1.41) виражаємо y :

$$y = \frac{dx}{dt} + 7x \quad (1.42)$$

і диференціюємо цей вираз:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{7dx}{dt} \quad (1.43)$$

Підставляємо отриману похідну (1.43) і вираз для y (1.42) в друге рівняння системи (1.41):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{7dx}{dt} = -2x - 5\left(\frac{dx}{dt} + 7x\right)$$

або

$$x'' + 12x' + 37x = 0. \quad (1.44)$$

Ми отримали лінійне однорідне рівняння другого порядку. Його характеристичне рівняння $k^2 + 12k + 37 = 0$ має в якості коренів комплексну спряжену пару $k_{1,2} = -6 \pm i$. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (1.44) дає нам невідому функцію x :

$$x(t) = e^{-6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t). \quad (1.45)$$

Продиференціюємо функцію (1.45):

$$\frac{dx}{dt} = e^{-6t}[\cos t(-6c_1 + c_2) - \sin t(6c_2 + c_1)]. \quad (1.46)$$

Підставляємо тепер x з (1.45) і $\frac{dx}{dt}$ з (1.46) у вираз для невідомої функції y (1.43):

$$y(t) = e^{-6t}[(c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t].$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ: А.С.К., 2020. – 647 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика: Збірник задач: навч. посіб. / В.П. Дубовик та ін. – Київ: “Ігнатекс-Україна”, 2018. – 480 с.
3. Турчанінова Л.І. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – Київ : “Ліра-К”, 2021. - 348 с.
4. Турчанінова Л.І. Практикум з вищої математики: навч. посіб., видання друге, доп. і перер. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – Київ : Кондор, 2010. – 246 с.
5. Федоренко Н.Д.. Вища математика: методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань. / Н.Д. Федоренко, С.В. Білощицька, О.В. Доля. – Київ : КНУБА, 2018. – 94 с.
6. Доля О.В.. Вища математика: Модуль 1 (ЗМ 1, ЗМ 2). Лінійна алгебра та векторний аналіз. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних: методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт. – Київ : КНУБА, 2023. – 94 с.

Для нотаток

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2 (ЗМ 4) Диференціальні рівняння

Методичні вказівки
до виконання самостійних та індивідуальних робіт
для здобувачів ОПП першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
інженерних та природничих спеціальностей
всіх форм навчання КНУБА

Укладачі: **ДОЛЯ** Олена Вікторівна,
РЯБЧУН Юлія Володимирівна,
ТУРЧАНІНОВА Людмила Іванівна

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Підписано до друку 02.09.2025. Формат 60 × 84_{1/16}.

Ум. друк. арк. 1,63. Обл.-вид. арк. 1,75.

Електронний документ. Вид. № 95/III-25

Видавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р