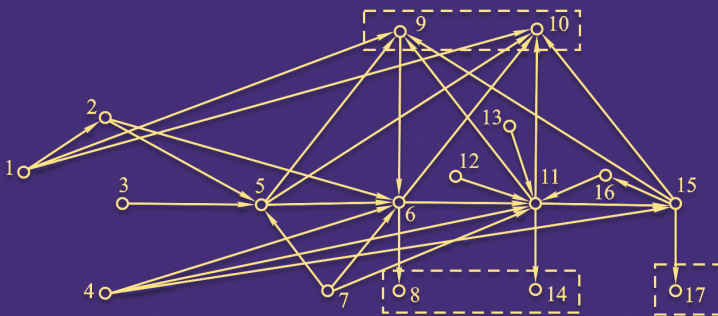


В. С. Волошин

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

в инженерных расчетах



Освіта України

В. С. ВОЛОШИН

ТЕОРИЯ ГРАФОВ В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

Учебное пособие

Киев
Освіта України
2016

УДК 519.17(075.8)

ББК 22.174.2я73

В 686

Волошин В. С.

В 686 Теория графов в инженерных расчетах : учебное пособие. –
Киев : Освита Украины, 2016. – 214 с., 49 рис., 27 табл.,
12 библ. назв.

ISBN 978-617-7241-83-5

Учебное пособие содержит методические материалы по теории графов в ее прикладном значении. Рассматриваются отдельные виды графопостроительных структур, позволяющие использовать эту теорию для математического моделирования широкого класса технических систем. Предлагается широкий выбор формализованных операций над графами, известных в литературе и полученных автором. Материал снабжен примерами использования математического аппарата для решения задач в области инженерии. Автор опирается на собственный опыт и опыт других исследователей в области применения теории графов в инженерных расчетах.

Пособие рассчитано на студентов технических вузов, изучающих прикладную математику, инженерно-технических работников, специализирующихся в системных исследованиях технических систем, может представлять интерес для специалистов в области логистики, информатики, экономики. Может быть полезно школьникам старших классов, интересующимся современными подходами к изучению сложных систем.

УДК 519.17(075.8)

ББК 22.174.2я73

© В. С. Волошин, 2016

ISBN 978-617-7241-83-5

© Изд-во «Освита Украины», 2016

Рецензенты:

- Г. Д. Коваленко – доктор физико-математических наук, профессор (Харьковский НИИ экологических проблем, г. Харьков)
- В. Г. Погребняк – доктор технических наук, профессор (Ивано-Франковский НТУ нефти и газа, г. Ивано-Франковск)
- В. П. Гранкин – доктор физико-математических наук, профессор (ГВУЗ «ПГТУ», г. Мариуполь)

Рекомендовано к печати на заседании ученого совета ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет» (протокол № 7 от 28.01.2016 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. Основные положения теории графов.....	10
2. Понятие неполного и дополненного к нему графа, смежные графы.....	40
3. Случайные графы.....	51
4. Операции над графами.....	56
4.1. Объединение двух графов.....	56
4.2. Пересечение двух графов.....	59
4.3. Разность двух графов.....	61
4.4. Произведение двух графов.....	64
4.5. Декартовое произведение графов.....	68
4.6. Декартовое произведение графов на полном объеме заданности исходных данных.....	71
4.7. Операции со случайными графами.....	81
4.8. Принцип φ -гомеоморфизма графовых структур.....	86
4.9. Метод исключения Гаусса применительно к опе- рациям над графами.....	92
4.10. Изоморфные преобразования графов.....	95
4.11. Метод S -скрещивания графов.....	99
4.12. Метод P -скрещивания графов.....	102
4.13. Хроматический полином графа.....	103
4.14. Алгоритм Дейкстры.....	109
5. Методика управления материальными потоками в производственных системах.....	124
6. Прикладные задачи современной инженерии.....	136
6.1. Графопостроительная модель потоков металла в металлургических переделах.....	137
6.2. Математическая модель движения серы в метал- лургических переделах.....	150
6.3. Задача оптимизации потоков серы в коксохими- ческом производстве.....	157

СОДЕРЖАНИЕ

6.4. Управление потоками серы в доменном производстве на основании свойств изоморфизма элементов графопостроительной модели	170
6.5. Графопостроительная модель поведения серы в мартеновском переделе	186
6.6. Отходообразование в технологии получения древесного угля	195
6.7. Преаксидентная диагностика технических систем на примере аварий в системах аммиачного охлаждения.....	205
7. Заключение	214

ВВЕДЕНИЕ

Основоположником теории графов принято считать российского математика швейцарского происхождения Леонарда Эйлера, который в 1747 году опубликовал свой доклад на заседании Санкт-Петербургской академии наук под названием «О проблеме кенигсбергских мостов». Город расположен на берегах реки, на двух островах. Ставилась задача: пройти по всем мостам Кенигсберга и вернуться в заданную точку за минимальный промежуток времени. В своей работе Л. Эйлер не просто решил эту задачу для мостов Кенигсберга, а представил общее решение для любого количества произвольно расположенных мостов.

После Эйлера эти исследования были благополучно забыты почти на столетие. И следующий раз к этому разделу математики вернулись из-за химии. Химики пришли к тому, что свойства веществ зависят не только от свойств отдельных элементов, но и от структуры их связей, а также их формул. Если при одной и той же формуле вещество проявляло подчас противоположные свойства, это зависело от того, какова была структура этой формулы. Такие вещества стали называть «химическими изомерами». Подобные исследования проводились при помощи формул графопостроения. И опять это не дало существенного толчка к развитию теории графов.

Следующий этап развития теории был связан с физикой электрических цепей. В частности, законы Кирхгофа, лежащие в основе теоретических основ электротехники, легко описываются обобщенными закономерностями распределения потоков в сетях графов и являются частью более общих сетевых законов распределения ресурсов.

Сегодня мы уже живем в сетевом мире. Нас окружает не только Интернет, системы дорог и маршруты движения самолетов, поездов, автомобилей. Мы пользуемся сетями телефонной связи, SKYPE-связью, знакомы с нейронными сетями, навигационными системами. Нас обслуживают сети товарных потоков, благодаря которым в магазинах каждое утро появляются

ВВЕДЕНИЕ

свежие продукты и другой необходимый товар. Благодаря сетевым графикам материальных потоков самого различного назначения, работают наши предприятия, в том числе и те, которые функционируют по непрерывному графику. Нас окружают сети электроэнергии и магистральных теплотрасс, водопроводные и канализационные сети, сети трансляционных станций. Мы каждый день погружаемся в информационные сети, которые с определенной системой отражают не только нашу профессиональную деятельность, но погружаются в наши семьи, в нашу личную жизнь, нравится это кому-то или нет. Мир во многом стал сетевым.

Люди в большей степени сейчас уже группируются не по национальному, территориальному или религиозному признакам, а по интересам, предпочтениям, профессиональным возможностям, принадлежности к специфическим группам (меньшинств). Это так называемые социальные сети, благодаря которым, по мнению многих ученых, уже сегодня стираются национальные или религиозные границы в мире. Сети, по-своему, структурируют даже семьи – незыблемые, казалось, ячейки общества. Глобальным образом расширяются границы общения с людьми, далеко не принадлежащими этой семье, которые привносят чужие обычаи, несвойственные этой семье, переиначивая семейные связи, изменяя функции родителей и детей в нескольких поколениях и роль семьи в обществе (хотя и происходит этот процесс весьма неторопливо, но он существует). Сети уже давно влияют на общество, с самых различных сторон.

Отсюда такой современный интерес к разделам математики, которые занимаются управлением сетями, в частности, к теории графов.

Теория графов относится к той части дискретной математики, которая взаимобразно связана с общей или теоретико-множественной топологией (геометрия размещения) – разделом, изучающим свойства пространства, при любых его деформациях, в частности, его непрерывность, связность, ориентируемость и т. д.

Еще ближе к предмету нашего изучения лежит область математики, имеющая название сетевая топология, как способ описания конфигурации иерархически взаимосвязанных сетевых устройств. С физической точки зрения, эта область описывает взаимное расположение узлов сети и связей между ними, вне зависимости от того, какой физический смысл имеют эти узлы. Кроме того, сетевая топология позволяет изучать векторность сигналов, проходящих через эту сеть, в частности, направление потоков информации, возможность не только составления балансов по отдельным физическим параметрам, но и управление обменными процессами внутри самой сети. В этом смысле, теория графов дает в руки исследователя весьма простой по наглядности и эффективный инструмент для подобных и других структурных изменений внутри сети.

Терминология теории графов до сих пор не имеет строгого определения. Поэтому, термины, которые применяются в данном учебном пособии, могут иметь паллиативный смысл. Ими можно пользоваться только в рамках поставленных конкретных задач, без выхода на более обобщенные теоретические определения. Тем не менее, автор принимает на себя ответственность за достоверность предлагаемой методологии в области прикладного применения.

Для специалистов по прикладным наукам математические методы имеют значение не сами по себе, а как действенный инструмент, позволяющий с максимальной точностью и достоверностью получать практические результаты в виде расчетов, подтверждающих правильность конкретных инженерных решений, которые являются результатом инженерного труда. Например, в не такие далекие времена в области гидрогазодинамики был сделан существенный прорыв в понимании процессов движения газов в динамических объектах с самыми разными параметрами сред. Исходным инструментарием в понимании таких процессов стали разделы математического анализа, позволившие при помощи создаваемых дифференциальных уравнений определять области решения подобных задач с учетом задаваемых граничных условий. Аналогичный результат полу-

ВВЕДЕНИЕ

чила информатика при использовании инструментов дискретной математики и алгебры логики.

Теория графов уже нашла применение в прикладных исследованиях в области логистики, экономики, химии (компьютерная химия), в информатике, схемотехнике. Этим не исчерпываются ее возможности. Автор имел возможности успешно использовать элементы преобразований графовых структур при моделировании конструкторских задач, задач в области управления материальными потоками, в обширном объеме решаемых технологических задач, в частности, при управлении бытовыми и промышленными отходами. Существует, на наш взгляд, явно недостаточно используемая область этой теории, относящаяся к формализованным операциям над графами, подобно тому, как это делается в алгебре, тригонометрии. Эта часть теории графов, как метода формализованного моделирования большого количества систем, явно не оценена в достаточной степени инженерами и практическими исследователями. Причина, на наш взгляд, состоит, во-первых, в неразработанности самой теории для прикладного применения, а, во-вторых, в отсутствии сколь-нибудь достоверной информации методического характера, способной оказывать помощь в инженерных расчетах.

Графопостроительная структура, имеющая образ бинарного отображения, собственную иллюстративную интерпретацию, должна сохранять свой физический смысл, в случае осуществления над ней некоторых строго обозначенных формальных преобразований. С тем, чтобы результирующий граф также не потерял своего физического или иного исходного смысла по сравнению с исходными графовыми структурами. Этим методом и посвящена данная работа.

Работа рассчитана на студентов в области прикладной математики и других технических наук, практических специалистов в области инженерии, научных работников, аспирантов, может быть полезна для всех, кто интересуется современными инженерными расчетами.

1. Основные положения теории графов

Предпочтение теории графов, в частности, для описания и моделирования материальных потоков, связанных с экономической деятельностью человека, связано, в первую очередь, с наглядностью отображения и простотой управления элементами структуры моделируемых систем языком бинарных отображений, которые лежат в основе теории графов.

В основе символики теории графов лежат положения о множествах.

Напомним основные условные обозначения из теории множеств.

X и Y – заданные множества.

$x \in X$ – множество X включает в себя элементы x .

$X = Y$ – условие совпадения элементов множеств X и Y .

$X \neq Y$ – множество X не совпадает с множеством Y .

$Z \subset X$ – условие принадлежности подмножества Z множеству X .

$Z \subseteq X$ – условие строгого содержания подмножества Z во множестве X ($Z \subset X$ и $Z \neq X$).

$X = \emptyset$ – пустое множество, для которого все $x_i = 0$.

Если между элементами двух множеств существует некоторое соответствие, то такие множества называются соответствующими, а само условие соответствия носит название отображения. Обозначим его символом L . Тогда условие

$$L: \{x_i\} \rightarrow \{y_j\} \quad (1.1)$$

означает, что каждому элементу (или его свойствам) исходного множества $X(x_i \in X)$ соответствует отображаемый элемент (или свойства) другого множества $Y(y_j \in Y)$ (рис. 1.1). В сущности, бинарное отображение представляет разновидность функции $y = f(x)$, в том случае, если параметры функции являются элементами соответствующих

множеств. Тогда можно принять, что в наших обозначениях $f \equiv L$, т. е. роль функции играют бинарные отображения.

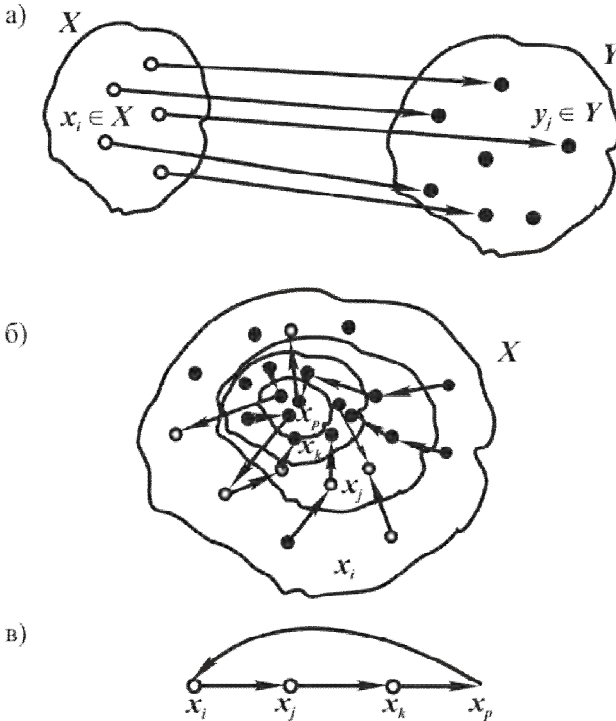


Рисунок 1.1 – Понятие графа как функции бинарного отображения

Графом $G (G^\circ, G')$ называют совокупность, состоящую из конечного непустого множества G° , которым описываются вершины графа, и множества G' неупорядоченных пар (x_i, x_j) различных элементов множества G° , каждая из которых есть ребро данного графа.

Математически граф G может быть представлен как пара множеств G° и G' , которые отражают суть вершины (x_i)

и ребра (x_i, x_{i+n}) , таким образом, чтобы выполнялось условие отображения

$$g : x_i \rightarrow x_{i+n}. \quad (1.2)$$

Таким образом, условием заданности графа является отображение L внутренних подмножеств или внешних множеств к исходному. При этом вершинами графа следует считать исходные и соответствующие им множества, а его ребрами – суть отображения между ними. Иными словами, под вершинами графа понимаются его структурированные компоненты, а под его ребрами – функции, которые выполняются для поддержания этой структуры. Направленность ребер подразумевает направленность функционального воздействия между двумя граничными вершинами графа. Это всего лишь одна из многих интерпретаций физического смысла графа, но она нам пригодится в дальнейших исследованиях.

По существу, граф – это некоторое множество точек на плоскости. Как таковыми они точками могут и не являться. Это, например, члены семьи, электронные детали, ячейки памяти, показатели комплексного состояния системы. Это некоторое абстрактное множество, имеющее свои элементы. Второе множество, свойственное графу, – это множество дуг. В качестве дуг выступают соединения вершин, в виде линий электропередач, дорог, связующих данные вершины. Эти два множества определяют понятие графа. Записывается это следующим образом:

$x_i \in G^{\circ}$ – множество вершин графа.

$(x_i, x_{i+j}) \in G'$ – множество ребер, дуг графа.

$\langle G^{\circ}, G' \rangle$ – общий вид записи модели графа в виде двух множеств.

Запись сопринадлежности вершин и дуг графа имеет вид

$$(x_i, x_{i+j}) \in G' \rightarrow x_i, x_{i+j} \in G^{\circ}.$$

Геометрически это начало и конец дуги, которая начинается в вершине x_i и заканчивается в вершине x_j . Дуге (x_i, x_j) можно сопоставить две вершины x_i и x_j (рис. 1.2, а):

$$(x_i, x_j) \leftrightarrow (x_i; x_j).$$

Может исходить несколько дуг из одной вершины в другую. Петля – это дуга, которая исходит и приходит в одну и ту же вершину (см. рис. 1.2, б). Граф может содержать кратные дуги (начинаются и заканчиваются в одной и той же вершине) (см. рис. 1.2, а).

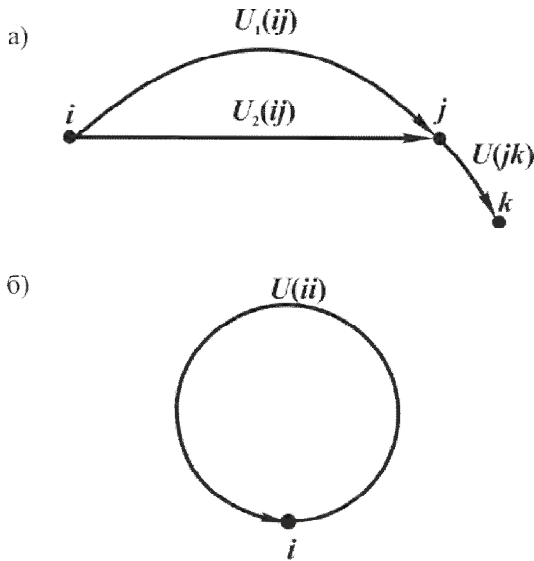


Рисунок 1.2 – Понятие графа как множества (а), петля графа (б)

Самый простой граф – это одна вершина и совсем без дуг. Например, фирма без связей. Или населенный пункт без дорог. Возникает задача: как оптимальным образом постро-

ить связи этой фирмы с партнерами? Как оптимальным образом построить дороги в этом городе? Или как оптимально соединить компьютеры в единую сеть?

Если $(x_i, x_j) \in G^o$, то x_i и x_j – смежные вершины, а ребро (x_i, x_j) носит название инцидентного вершинам x_i и x_j . Если два различных ребра (x_i, x_j) и (x_k, x_j) инцидентны одной вершине (в данном случае x_j), то они называются смежными.

Множество дуг, выходящих из вершины i , обозначим как $G_i'^{(-)}$ (рис. 1.3, а). Знак минус показывает, что из вершины x_i выходит множество дуг. Это значит, что

$$G_i'^{(-)} = \{(x_i, x_j) \in G' \setminus i = x_i\}.$$

Здесь i – конец дуги (x_i, x_j) , совпадающий с вершиной x_i .

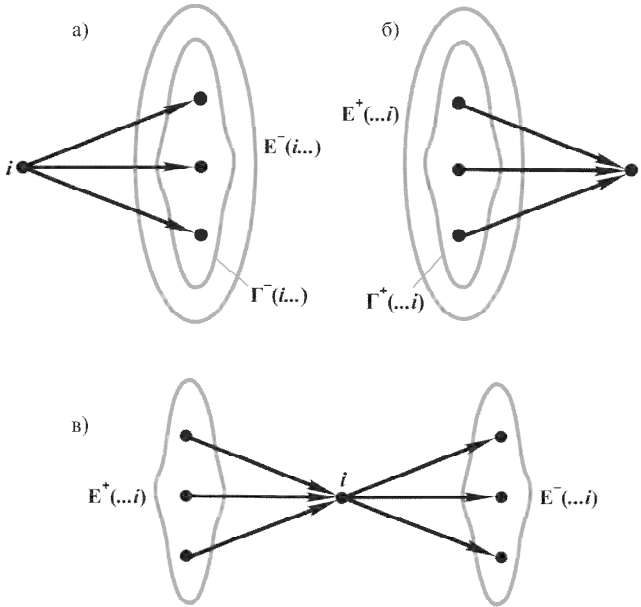
Множество дуг, которые входят в вершину x_j (рис. 1.3, б), обозначим как $G_i''^{(+)}$. Такое, что

$$G_i''^{(+)} = \{(x_i, x_j) \in G' \setminus j = x_j\}.$$

Вершины, которыми заканчиваются дуги на рис. 1.3, а, обозначим как $G_i^{o(-)}$. И соответственно $G_i^{o(+)}$ будет для вершин, исходящих для дуг (см. рис. 1.3, б). Любой набор подобных множеств определяет граф. Такое определение более удобно для компьютера, т. к. оно не привязано к геометрическому образу графа.

Если граф неориентированный – как быть тогда? На рис. 1.3, в построен граф с дугами из множества $G_i'^{(+)}$ и $G_i'^{(-)}$, такими, что $G_i'^{(+)} \cup G_i'^{(-)} = G_i'$. Это будет множество дуг, инцидентных вершине x_i . Таким образом, независимо от на-

правления дуг в графе они будут инцидентны вершине x_i . Это определение важно для вершины неориентированного графа.



а) дуги исходят из вершины i ; б) дуги входят в вершину i ;
в) дуги входят и выходят из вершины i

E и Γ – соответствующие множества вершин графов, которые принимают дуги ($-$) либо испускают дуги ($+$)

Рисунок 1.3 – К понятию ориентированного графа

Если вершина x_i соединена с графом только посредством одной дуги, то такая вершина является **висячей** (рис. 1.4, а). Для нее $\rho_{x_i} = 1$. Если $\rho_{x_i} = 0$, это значит, что никакая дуга не исходит и никакая дуга не входит в вершину x_i . Такая вершина называется **изолированной**.

Граф считается однородным степени k , если $\rho_{x_i} = k$ для каждой вершины $x_i \in G^0$. Однородный граф степени 1 (см. рис. 1.4, а) носит название паросочетание.

Граф степени 2 – однородный (рис. 1.4, б или рис. 1.2, а).

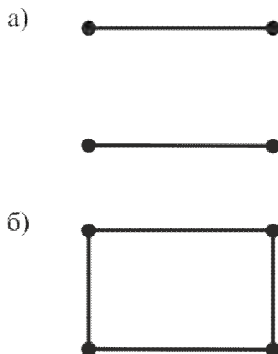


Рисунок 1.4 – Общий вид однородного графа степени 1 (а) и степени 2 (б)

Фактически вершины графа выполняют роль дискретного множества, на котором может быть задана некоторая функция. Ребра при этом являются отображениями, закономерностью, по которой точкам одного дискретного множества сопоставляются точки другого множества. В этом случае, граф имеет смысл функции между двумя дискретными множествами X и Y .

Отображения внутри одного множества могут задаваться и в том случае, если они являются его подмножествами, такими, между которыми существует бинарное соответствие. Например, для множества $X = \{x_i, x_j, x_k, x_p\}$, в котором $x_i \neq x_j \neq x_k \neq x_p$, связь отображения одних элементов через другие носит характер последовательности (см. рис. 1.1)

$$G_{x_i} = \{x_j\}; \quad G_{x_j} = \{x_k\}; \quad G_{x_k} = \{x_p\}. \quad (1.3)$$

В данном случае представляют интерес степенные отображения внутри одного и того же множества, а также обратные степенные отображения, записываемые следующим образом:

$$G_{x_i} = \{x_j\}; \quad (1.4)$$

$$G_{x_j}^2 = G(L_{x_i}) = \{x_k\}; \quad (1.5)$$

$$G_{x_k}^3 = G(G_{x_i}^2) = \{x_p\}; \quad (1.6)$$

$$L_{x_j}^{-1} = \{x_i / x_j \in L_{x_i}\}. \quad (1.7)$$

В последнем случае отображение L^{-1} является обратным отображением по отношению к отображению L , т. е. когда $\{x_i\}$ являются отображениями $\{x_j\}$.

Если существует условие, при котором $L_{x_p} = \{x_i\}$, то такое множество называется замкнутым и может описываться замкнутым графом (см. рис. 1.1, в).

Полный граф, если все его вершины связаны между собой дугами (рис. 1.5, а, б). В первом случае $\rho_{x_i} = 3$, во втором — $\rho_{x_i} = 4$.

Линия на графе (путь) — это совокупность вершин и дуг, последовательно продолжающих друг друга так, чтобы (рис. 1.6), например, $(x_2, x_3) = L(x_2; x_3)$ и в целом $(x_{i-1}, x_i) = L(x_{i-1}; x_i)$. Задачи поиска кратчайшего пути относятся к задачам линий, если заданы весовые функции дуг. Если $x_0 \equiv x_4$, то такой путь называется контуром.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

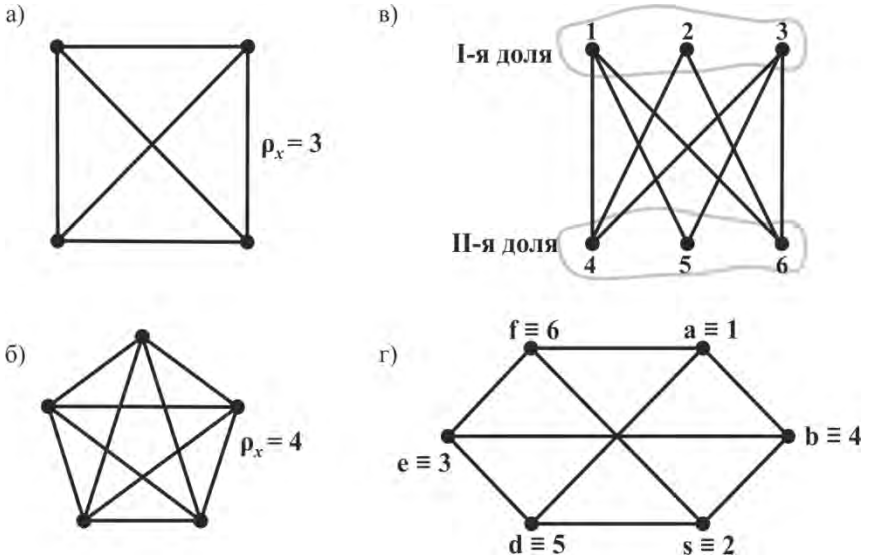


Рисунок 1.5 – Общий вид полного (а, б) и изоморфного (в, г) графов

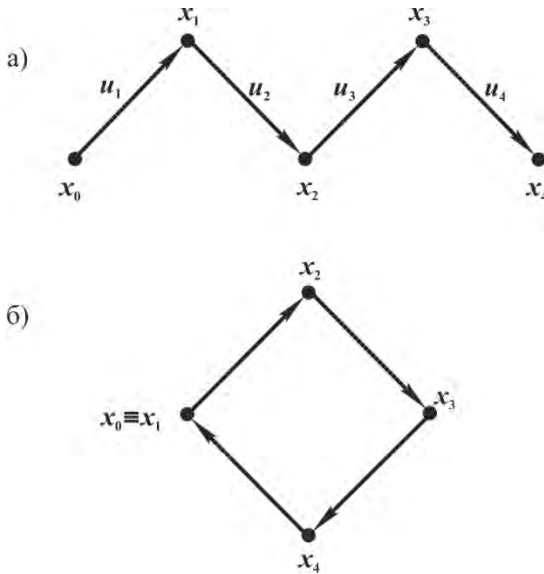


Рисунок 1.6 – Понятие линии и пути (а), а также контура (б) графа

В задаче о маршрутизации есть утверждение.

Утверждение. Если расстояние между точками X и Y является кратчайшим, то для любой точки Z , расположенной по этому маршруту, расстояние между точками X и Z , а также Y и Z также являются кратчайшими.

Доказательство приведем из обратного. Допустим, что расстояние XZ не кратчайшее. Есть более короткий маршрут \overline{XZ} . Но тогда и маршрут $XZ + ZY$ не является кратчайшим. Более коротким будет маршрут $\overline{XZ} + ZY$. Что противоречит условиям задачи. Аналогично, доказываем, что кратчайший маршрут из точки Z в точку Y . Значит, утверждение верно, что и требовалось доказать.

И в конце дадим краткое понятие принципа изоморфизма (одинаковости) графов. В дальнейшем мы еще подробно рассмотрим это замечательное качество графов. Итак.

Какие графы являются одинаковыми? Это так называемый двудольный или простой граф. Первая доля – это ориентация вершин – начало дуг, и вторая доля – окончание дуг. Между собой вершины этих долей не соединены. Это полный полудольный граф (рис. 1.5, в). Второй граф представлен на рис. 1.5, г. Эти графы одинаковые. Они по-разному изображены. Если рассмотреть их соответствующим образом, можно увидеть, что каждой дуге первого графа соответствует дуга другого графа. Такие графы называются **изоморфными**. Изоморфные графы – это те графы, которые сохраняют одинаковые дуги в полном объеме. Число дуг и число вершин у изоморфного графа должно совпадать. В данном случае $a \equiv 1; c \equiv 2; e \equiv 3; b \equiv 4; d \equiv 5; f \equiv 6$. Степени должны быть одинаковыми.

В качестве примера графопостроительной структуры приведем условное генеалогическое дерево родственных связей (рис. 1.7). Этот граф ориентирован от представителей старшего поколения к представителям младшего. Есть термин «предки вершины» для ориентированного графа. Если мы захотим построить фамильное генеалогическое дерево

(дерево рода), нам необходимо формировать дуги ориентированного графа только по направлению держателей фамилии субъекта этого дерева.

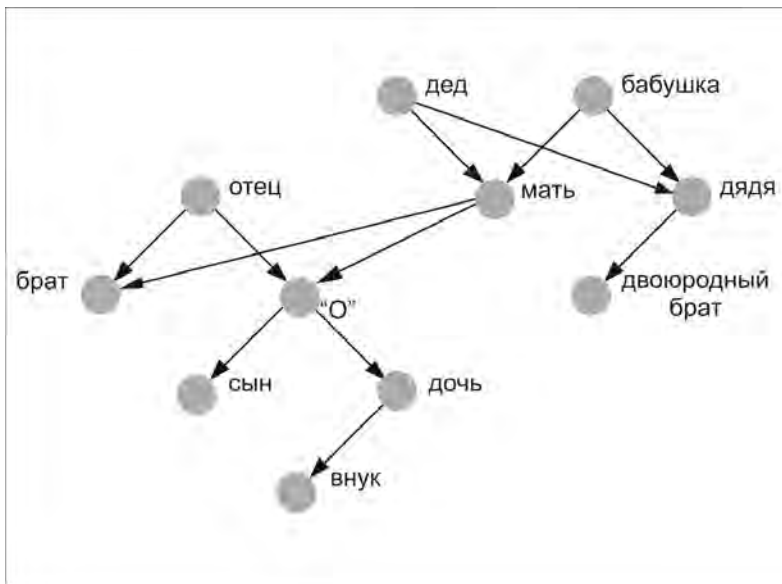


Рисунок 1.7 – Простое генеалогическое дерево

Попробуем решить простую шахматную задачу методом графопостроения. Вот ее условие.

«На шахматном поле размером $n \times n$ расставить n ферзей таким образом, чтобы ни один из них не попал под удар другого».

Возьмем случай $n = 4$. Очевидно, что ферзи, которые могут бить по горизонталям и вертикалям, и по диагоналям, могут иметь вариант расставления (рис. 1.8, а). Попарно соединим те клеточки поля, которые подпадают под бой каждого из ферзей. Предварительно, каждую клеточку поля обозначаем вершиной графа $G^o = \{1, 2, \dots, 16\}$ (рис. 1.8, б), а в

качестве ребер выступают «бьющие» функции фигуры. Такой граф представляет собой математическую модель, которую уже проще использовать в компьютерных расчетах. На первый взгляд, это сложнее для человека, которому проще видеть доску, каждую ее клеточку и размышлять. Но человек не компьютер, который легко подсчитывает формальные варианты. Графовую структуру в компьютер занести проще, и она более понятна компьютеру, который готов выдавать ВСЕ решения.

а)

1	2 ⊗	3	4
5	6	7	8 ⊗
9 ⊗	10	11	12
13	14	15 ⊗	16

б)

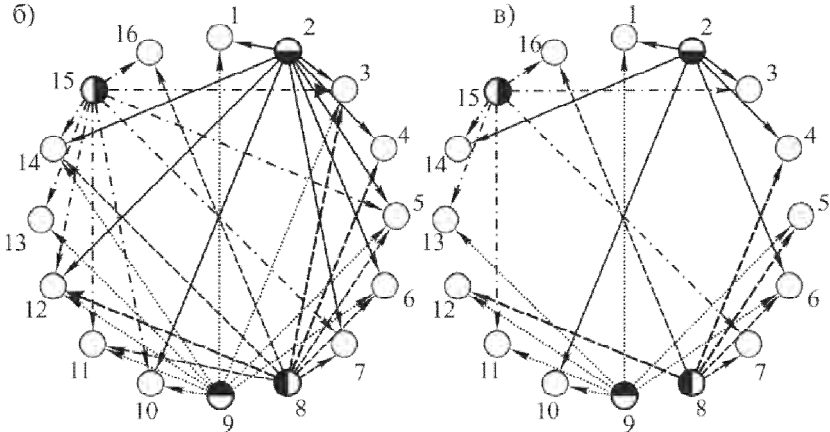


Рисунок 1.8 – Шахматная задача о ферзях (а), и ее графическое решение (б) и решение задачи о ладьях (в)

Для сравнения построим граф для той же задачи, при условии, что в качестве фигур используют лады, которые могут бить только по горизонталям и по вертикалям (рис. 1.8, в). Это менее загруженный граф, у которого функция инцидентности вершин меньше, чем в случае с ферзями. Подобным образом можно построить и вариант, когда на поле кроме ферзей есть еще, например, слоны. Таким образом, при помощи графа можно смоделировать любой шахматный этюд, решением которого будут, например, вершины, не пробиваемые при заданной расстановке фигур. Либо напротив, можно с помощью компьютера анализировать наиболее незащищенные поля в любой шахматной композиции.

Рассмотрим некоторые свойства графов и отдельные их структуры, понимание которых важно, если мы хотим воспользоваться этой теорией для объяснения физического смысла отходов как объекта управления.

Если ребра графа имеют строгую ориентированность от исходящей вершины к входящей, то такой граф называется ориентированным графом или орграфом. В этом случае, ребра орграфа следует называть дугами. Также вводятся понятия «цепи» как последовательности дуг и «цикла» – замкнутой цепи. Орграф несет более определенную функциональную нагрузку, связанную с его физическим смыслом. В данном случае этот смысл заключается в том, что функция ориентированного ребра-дуги состоит в изменении состояния графа от уровня исходящей для данной дуги вершины до уровня вершины, куда входит дуга.

С орграфом связано понятие мультиграфа. Под последним понимается граф, у которого, по крайней мере, две смежные вершины соединены более чем одним ребром. Мультиграф часто называют p -графом, где p – кратность ребер, т. е. наибольшее число ребер, соединяющих смежные вершины мультиграфа.

Подграф G_x графа $G (G^o, G')$ представляет собой граф, содержащий лишь часть вершин исходного графа (множество X) и инцидентные им ребра. Формула подграфа имеет вид

$$G_x = (X, G'_{x_i, x_j}) \quad (1.8)$$

$$X \subseteq G^o, \quad G'_{x_i, x_j} = (G') \cap X. \quad (1.9)$$

Понятие частичного графа G_Δ к исходному $G (G^o, G')$ связано с содержанием только части ребер исходного графа таким образом, что

$$G_\Delta = (G^o, \Delta), \quad \Delta \subseteq G'. \quad (1.10)$$

Важным свойством вершин и ребер графа является их смежность. Смежными называются вершины, которые принадлежат одному и тому же ребру. Под смежными ребрами понимают два ребра, имеющие одну вершину (выходящие из нее или входящие в нее).

Под свойством взаимной инцидентности вершин и ребер графа понимается такое их соответствие, когда ребро исходит из вершины или входит в нее. Общее число ребер, инцидентных вершине, носит название степени вершины.

Аналитически понятия смежности и инцидентности компонентов графа включают следующее. Вершины x_i и x_{i+j} являются смежными, если существует ребро, идущее от x_i к x_{i+j} . Дуга x_i, x_{i+j} является инцидентной вершине x_i , если она заходит или выходит из нее.

Дадим понятие степени вершин x_i графа G . Это число ребер, инцидентных вершине x_i , обозначается $\deg x_i$. Тогда под распределением графа понимается последовательность степеней его вершин. Вершина x_i является изолированной, если $\deg x_i = 0$. Вершина x_i называется концевой, если для нее $\deg x_i = 1$.

Допустим условие

$$r(i, j) = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

в котором

1 – если имеется ребро, соединяющее вершину i с вершиной j ;

0 – если такого ребра нет.

Тогда под матрицей смежности понимается квадратная матрица $R^n = [r(i, j)]$, размер которой равен $n \times n$.

Если принять, что в выражении

$$s(i, j) = \begin{cases} 1, \\ -1, \\ 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

где

1 – если ребро (x_i, x_j) исходит из вершины x_i ;

-1 – если ребро (x_i, x_j) входит в x_i ;

0 – если ребро (x_i, x_j) не смежно вершине x_i ,

тогда под матрицей инцидентности для ребер графа понимается матрица $S = [s(i, j)]$, ($i = 1(1)n, j = 1(1)m$) размера $n \times m$.

Важным условием наличия матрицы инцидентности является отсутствие петель у исходного графа.

Граф G называется связным, если любая пара его вершин соединена непрерывной цепью. Пусть $G^o(x)$ – множество, состоящее из некоторой вершины x_i и всех тех вершин, которые могут быть соединены с ней цепью. Тогда под компонентой связности графа подразумевается некоторый подграф, выраженный множеством типа $G^o(x)$. Число компонент связности отражает полноту структуры графа.

Существенное значение для понимания свойств графов отводится понятиям вершинной связности и реберной связ-

ности. Под вершинной связностью $\psi(G)$ графа G понимается наименьшее число вершин, удаление которых (вместе с инцидентными им ребрами) делает этот граф несвязным. Под реберной связностью $\xi(G)$ для графа G следует понимать наименьшее количество ребер, удаление которых приводит к образованию несвязного графа.

Важным для нас свойством графа является его изоморфизм по отношению к другому графу. Два графа считаются изоморфными, если между множествами их вершин существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Иными словами, под изоморфизмом двух графов понимается такая их структура, при которой соблюдается равенство числа их вершин, ребер, число компонент связности, а также последовательность степеней вершин в убывающем порядке. Если у графов эти показатели отличаются, то эти графы нельзя считать изоморфными.

Под инвариантом изоморфизма графа понимается числовая характеристика графа, остающаяся неизменной при его изоморфных преобразованиях, т. е. таких преобразованиях, при которых происходят переименования его вершин. Таким образом, считается, что инвариант графа – это его функция. Поэтому инвариант представляют в виде полинома, каждый член которого суть переменные коэффициенты вершин заданного графа. Для графа G (G^o , G') обозначим такой полином как $I(G^o, G')$. Для того чтобы определить наличие I -полинома для конкретного графа, необходимо иметь расчетное значение I -полинома при его коэффициентах, соответствующих данному графу. Если выбрать некоторое подмножество S из всех возможных вариантов переименования вершин графа, то говорят об инвариантах данного S -преобразования, которое называется S -изоморфизмом графа [1].

Понятия инварианта и S -изоморфизма являются важными для многих формализованных управляющих действий

над структурой графа, если изменяются весовые коэффициенты вершин графа.

С целью придания физического смысла составляющим графа, его вершинам и ребрам присваивают весовые коэффициенты, причем последовательность весовых коэффициентов вершин имеет графическую интерпретацию в виде табулированной функции или заданного функционального ряда, а весовые коэффициенты ребер графа могут иметь самую разнообразную конфигурацию, от непрерывной до стохастической функции.

Понятие эксцентриситета, центра тяжести и радиуса графа [2].

Рассмотрим произвольный неориентированный граф, состоящий из пяти вершин, соединенных в произвольной форме ребрами (рис. 1.9). Если весовые функции ребер не указаны, они принимаются за единицу. Степень вершины ребра – это количество ребер, подходящих к этой вершине (инцидентны к данной вершине). Степень вершины еще называют инцидентностью. Обозначается deg или d_i . В нашем случае $d_a = 2; d_b = 2; d_c = 3; d_d = 2; d_e = 3$. Сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер.

Эксцентриситет вершины – это расстояние до максимально удаленной вершины по кратчайшему к ней маршруту. Центр тяжести графа – это вершина с минимальным эксцентриситетом. Радиус графа – это минимальный эксцентриситет. Поясним это на нашем примере, если граф не взвешенный.

Вычислим эксцентриситеты для всех вершин невзвешенного графа (рис. 1.9, б). Квадратная матрица (диагонали – нули), в которой члены – это минимальное число ребер от вершины к вершине. Эксцентриситет (ε) определяется как максимум чисел в строке. В нашем случае, везде $\varepsilon = 2$. Это простой случай для невзвешенного графа.

Рассмотрим этот же граф, когда каждому ребру присваивается некоторый вес (число), как на рис. 1.9, а.

Квадратная матрица инцидентности будет иметь аналогичную матрицу с другим содержанием (рис. 1.9, в). Здесь уже эксцентриситеты для разных вершин будут отличаться.

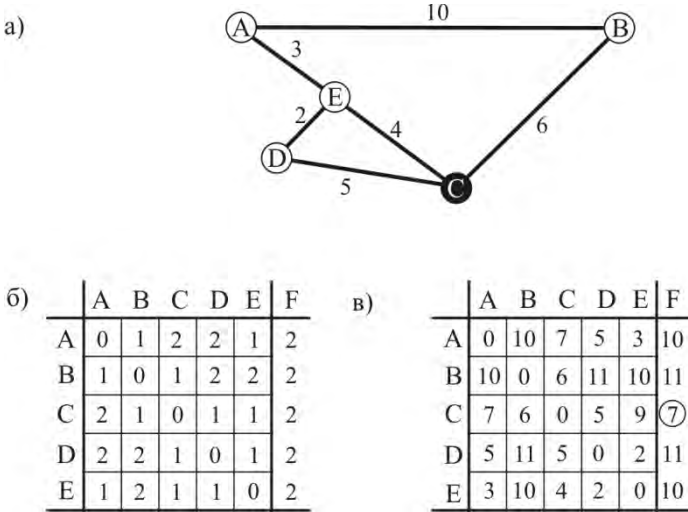


Рисунок 1.9 – Понятие эксцентриситета, центра вершин и радиуса графа (обозначения по тексту)

Тогда $\varepsilon_{\min} = 7$ – это не что иное, как радиус графа. Вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа, является центром тяжести графа. В нашем случае, центр тяжести графа расположен при вершине C. На периферии оказываются вершины, для которых $\varepsilon_{\max} = 11$. Это вершины: B и D.

Порядок графа – это его число вершин (n) и число ребер (m). У нас $n = 5$, $m = 6$.

Понятие центра графа имеет реальное приложение. Например, граф станций метро, когда вершины – это станции, а ребра – это направления пути либо в чистом виде (невзвешенный граф), либо расстояния, либо время в дороге. Станция – центр может принимать разные значения в зависимо-

сти от часа пик, от значимости станций для отдельного пассажира.

Если вершины – это города, где имеются филиалы некоторой компании, то центр тяжести такого графа должен указывать наиболее оптимальное расположение управляющего звена компании. Причем, в зависимости от весовых функций ребер взвешенного графа этот центр может смещаться от вершины к вершине (от города к городу), что делает управление более гибким, если его функции распределить определенным образом между филиалами в этих городах. Это понятие используется при решении многих логистических задач об оптимальном распределении товаров, их экономной и быстрой доставке и др.

Центр тяжести, центр скоростей... Это весьма загруженное понятие. Диаметр графа – это максимальное расстояние от центра графа до периферии. Для нашего графа диаметр равен 11.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. Построить граф, отвечающий отношению $x + y \leq 7$ на множестве вершин $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определить его свойства.

Решение. Допустим, что условие $x + y \leq 7$ мы примем как отношение вершин неориентированного графа в количестве, соответствующем нашему множеству (M). Тогда данное условие можно записать в удобной форме, как $x_i + x_{i+k} \leq 7$ на множестве заданных вершин $X = \{x_i, i = 1, 1, n, n = 6\} = M$. Условие $x_i + x_{i+k} \leq 7$ для графа с шестью вершинами дает, в том числе, и три петли, удовлетворяющие условию задачи (рис. 1.10).

ГЛАВА 1

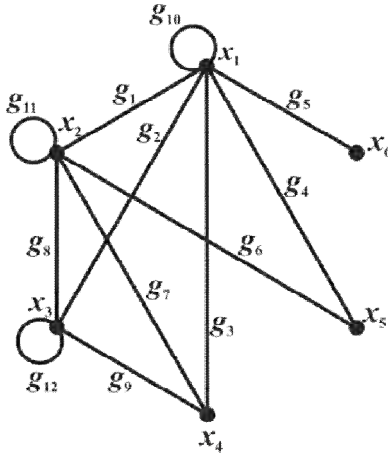


Рисунок 1.10 – Общий вид графа по условию $x_i + x_{i+n} \leq 7$

Построим матрицу смежности (вершин) полученного графа.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1	1	0
x_3	1	1	1	1	0	0
x_4	1	1	1	0	0	0
x_5	1	1	0	0	0	0
x_6	1	0	0	0	0	0

В матрице смежности каждый элемент $C_{i,j} = 1$ обозначает число ребер, исходящих из вершины x_i в вершину x_j . Для неориентированного графа эта матрица симметричная.

Матрицу инцидентности (ребер и вершин) данного графа представим следующим образом:

ТЕОРИЯ ГРАФОВ В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
x_1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
x_2	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
x_3	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
x_4	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Условие элементов этой матрицы $I_{i,j} = 1$ соответствует инцидентности вершины x_i и ребра g_i . В противном случае $I_{i,j} = 0$. Для анализа свойств полученного графа нам понадобится матрица расстояний, которую построим из следующих соображений: каждый элемент $S_{i,j}$ соответствует кратчайшему пути из вершины x_i в вершину x_j . Для упрощения примем, что весовые функции всех ребер $g_i = 1$. Ибо в противном случае, для матрицы расстояний следует подсчитывать минимальное расстояние с учетом каждого g_i .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	1	1	1
x_2	1	0	1	1	1	2
x_3	1	1	0	1	2	2
x_4	1	1	1	0	2	2
x_5	1	1	2	2	0	2
x_6	1	2	2	2	2	0

Рассмотрим свойства полученного графа (см. рис. 1.10).

1. Порядок графа – это число его вершин и ребер. Для нашего графа $N = 6$, $M = 12$.

2. Вектор удаленности определяется из условия, что каждая его компонента есть не что иное, как максимальное расстояние от вершины x_i до любой другой вершины, и записывается как $d_i = \max_{x_j \in X} \{d(x_i, x_j)\}$. Таким образом, подсчитаем вектор удаленности для графа (см. рис. 1.10) как $d = (1, 2, 2, 2, 2, 2)$.

3. Центр искомого графа находим как вершину x_i , которой соответствует наименьшая удаленность. В данном случае центр графа – это вершина x_1 , для которой $(1 = d_1 < d_j, j = 2, \dots, 6)$. Все остальные вершины являются периферийными, так как им соответствует большая удаленность $(d_j = 2, j = 2, \dots, 6)$.

4. Радиус графа по определению – это удаленность от центра, т. е. от вершины x_1 . $R(G) = 1$. Соответственно, диаметр графа $R(G) = 2$.

Из самого определения графа вытекает, что теория графов может служить в качестве математической модели для любой системы, в которой содержатся бинарные отображения. Например, теория графов используется в различных областях прикладной математики и техники: «сетевые системы» в транспорте, «сети и графики» в экономических исследованиях, «сети» в электротехнике, «молекулярные структуры» в химии, «распределительные сети» в городском хозяйстве, в теории передачи сообщений, исследовании операций, конструировании САПР и др. Все это дало мощный толчок к развитию теории графов.

Попробуем решить несколько простейших задач с помощью теории графов. Чаще всего, решение подобных задач сводится к составлению модели изучаемой системы, вербализации этой модели и приданию ей вида, удобного для

формализованных вычислений. Под формализованными вычислениями следует понимать возможность программирования задачи в виде полученной математической модели с последующим ее обчислением на компьютере, либо использование достаточно богатого инструментария операций над графами, которому будут посвящены следующие главы.

Итак.

1. Старая задача о волке, козе и капусте. Их необходимо перевезти с одного берега на другой, если в лодке можно везти только один объект. Дополнительное условие: вместе вне лодки они находиться не могут – волк съест козу, коза съест капусту. Но волк не ест капусту.

Дополнительное условие запишем в матричном виде:

В	Ко	Ка
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Решение с помощью теории графов.

Здесь мы впервые дадим понятие морфологической таблицы для записи графа. В морфологической таблице всем вершинам и ребрам (в данном случае мы будем иметь дело с ориентированным графом) присваиваются собственные функции или состояния. Такая таблица дает четкое представление об одной замечательной особенности графа. При помощи этой системы можно моделировать любые объекты, если вершинам графа присваивать состояние системы в виде изменяющихся параметров этой системы. А в виде ребер представлять управляющие действия (функции), совершаемые системой или над системой, которые последовательно изменяют ее состояние от вершины к вершине.

Таблица 1.1 – Морфологическая таблица графа решения задачи о волке, козе и капусте (жирным шрифтом выделены необходимые действия и допустимые состояния, (-) – обозначены вредные действия)

Вершина	Описание состояния вершины	Ребро	Описание операции ребра
1	Волк, коза и капуста находятся на одном берегу реки	Ка(-)	Перевозка капусты
2	На одном берегу остаются волк и коза. На другом – капуста	В(-)	Перевозка волка
3	На одном берегу остаются коза и капуста. На другом – коза	Ко	Перевозка козы
4 ≡ 6	На одном берегу остаются волк и капуста. На другом – коза	Ко(-)	Возвращение козы
5	На одном берегу остаются волк, коза и капуста	0	Перевозчик возвращается пустой (петля)
6 ≡ 4	На одном берегу остаются волк и капуста. На другом – коза	В(-)	Перевозка волка
7	На одном берегу остается капуста. На другом – волк и коза	Ко	Перевозка козы
8	На одном берегу остается волк. На другом – коза и капуста	Ка(-)	Возвращение капусты

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4
9	На одном берегу остаются волк и капуста. На другом – коза	Ко	Возвращение козы
10	На одном берегу остаются волк и коза. На другом – капуста	Ко(-)	Перевозка козы
11	На другом берегу остаются коза и капуста	В	Перевозка волка
12≡13	На одном берегу остается коза. На другом – волк и капуста	0	Перевозчик возвращается пустой (петля)
13≡12	На одном берегу остается коза. На другом – волк и капуста	Ко	Перевозка козы
14	На другом берегу остаются волк, коза и капуста		

Подобными морфологическими таблицами удобно пользоваться при формализации графов и переводе их в компьютерные программы.

На рис. 1.11 представлен результирующий граф, отражающий действия перевозчика (его управление) и состояние системы с учетом граничных условий, выраженных в матрице.

Выделен путь графа по вершинам $1 \rightarrow 4 \equiv 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \equiv 13 \rightarrow 14$, дающий необходимое решение.

Подобное решение легко можно программировать и решать при помощи этой программы более сложные задачи подобного вида.

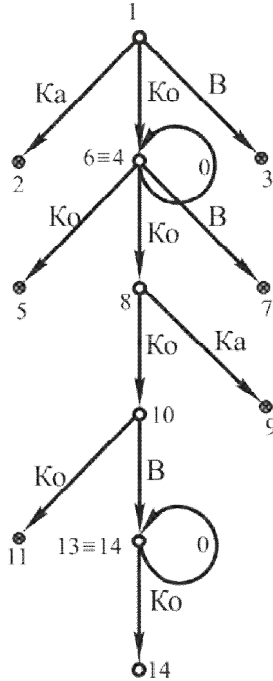


Рисунок 1.11 – Графопостроительная модель задачи о волке, козе и капусте

2. Задача о переливах. «При помощи двух кружек емкостью 3 и 5 литров соответственно и емкости в 8 литров воды нужно разделить пополам воду из этой емкости».

Для решения задачи обозначим текущее количество воды в двух кружках через x_i и y_i . Запишем морфологическую таблицу, соотносящуюся с традиционным пошаговым решением этой задачи (табл. 1.2).

Для построения графа достаточно разместить его в сетке декартовых координат (OXY) (рис. 1.12). Таким образом, задача сводится к трем управляющим действиям: наполнению пустой посуды (ребро α_i), переливу из емкости в емкость (ребро β_i) и опустошению посуды (ребро γ_i).

Таблица 1.2 – Морфологическая таблица графа для задачи о «переливах»

Координаты вершины		Состояние вершин	Ребро	Функции ребер
x_i	y_i			
0	0	Начальное состояние системы	α_1	Наполним первую кружку до 3 литров воды
3	0	В первой кружке – 3 литра, во второй – 0	β_1	Перельем 3 литра воды во вторую кружку.
0	3	В первой кружке – 0 литров, во второй – 3	α_2	Наполним первую кружку до 3 литров воды
3	3	В двух кружках по 3 литра воды	β_2	Перельем из первой кружки во вторую 2 литра до ее полноты
1	5	В первой кружке – 1 литр, во второй – 5	γ_1	Опустошим вторую кружку
1	0	В первой кружке – 1 литр, во второй – 0	β_3	Перельем воду из первой кружки во вторую
0	1	В первой кружке – 0 литров, во второй – 1	α_3	Наполним первую кружку водой
3	1	В первой кружке – 3 литра, во второй – 1	β_4	Перельем из первой кружки воду во вторую
0	4	В первой кружке – 0, во второй – 4 литра	(β_5)	Перельем 4 литра в емкость
...	...	И т. д.		

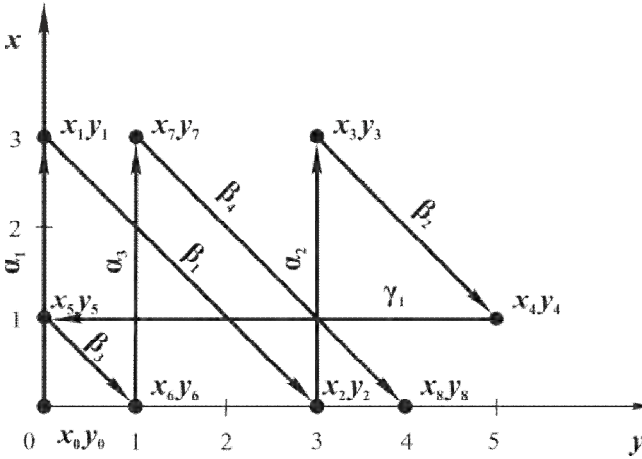


Рисунок 1.12 – Алгоритмический граф решения задачи о «переливах».

Такое решение удобно переводить в программный продукт и использовать для более сложных расчетов. Например, если в задаче на переливы действуют простые числа, как в нашей задаче, ее можно решить и умозрительно. Иное дело, когда в задаче присутствуют дробные числа или иные «неудобные» сочетания, например, исходные емкости на 135 и 254 литра, а базовая емкость – на 350 литров. Такую задачу уже умозрительно решить сложно. А при помощи графового алгоритма она решается в несколько этапов (!) легко. Предлагается решить эту задачу при помощи компьютера, предварительно составив программу.

Нужно отметить, что граф (см. рис. 1.12) отражает только один этап в решении задачи. Вторым этапом в последовательности получения вершин $x_0, y_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_8, y_8$ можно заполнить новую кружку своими 4-мя литрами воды и т. д.

По данной программе решается огромное количество задач, которые носят общее название «задачи о переливах».

Вопросы для самопроверки

1. Перечислить основные условные обозначения из теории множеств.

2. Что такое соответствующие множества?

3. Дать понятие бинарного отображения, пояснить его в виде формулы. Изобразить графически.

4. Дать определение графа. Формула описания графа. Графическое изображение графа.

5. Построить генеалогическое дерево Вашей фамилии заданной глубины проникновения n .

6. Сформулировать некоторый шахматный этюд для ферзя и двух пешек и построить его графовую модель. Варианты – ферзь, пешка и ладья; король, ферзь, две пешки; король, два слона, пешка, и др.

7. Что такое смежность и инцидентность у графа? Понятие смежных вершин и смежных ребер. Понятие взаимной инцидентности для ребер графа. Что такое степень вершины?

8. Дать понятие ребра, вершины, дуги графа. Отличие этих параметров.

9. Что такое подмножество?

10. Дать понятие замкнутого графа.

11. Чем определяется условие заданности графа?

12. Дать понятие ориентированного графа. Физический смысл орграфа.

13. Что такое «цепь» и «цикл» орграфа?

14. Дать понятие мультиграфа. Что такое кратность (p) графа?

15. Что такое подграф? Его смысл в теории множеств.

16. Понятие частичного графа. Его физический смысл.

17. Что такое изолированная вершина графа?

18. Дать понятие матрицы смежности графа. Привести примеры.

19. Дать понятие матрицы инцидентности графа. Привести примеры.

20. Что такое связный граф? Что такое компонента связности графа? Что отражает этот параметр? Дать понятие вершинной и реберной связности. Привести примеры.

21. Дать понятие изоморфизма графов. Инвариант изоморфизма. Понятие S -изоморфизма графа. Привести примеры.

22. Что такое весовые коэффициенты? Их графическая интерпретация.

23. Дать понятие обозначениям центра тяжести графа, его радиуса и эксцентриситета. Привести примеры.

24. Построить граф, отвечающий отношению $x + y \leq 7$ на множестве вершин $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определить его свойства.

Вариант	Условие отношения	Порядок множества
1	$x + y < 7$	$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2	$x - y = 1$	$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3	$x + y \leq 3$	$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
4	$x + y = 3$	$M = \{1, 2, 3, 4\}$
5	$x - y \leq 2$	$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
6	$x + y \geq 2$	$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Библиографический список к первой главе

1. Малов К. М. Об S -изоморфизме орграфов / К. М. Малов, Н. А. Бариева // Труды Московского энергетического института. – 1980. – Вып. 499. – С. 101–110.

2. Кирсанов М. Н. Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы. Пособие по дискретной математике для студентов университетов / М. Н. Кирсанов. – Г. : Физматлит, 2007. – 168 с.

2. Понятие неполного и дополненного к нему графа, смежные графы

Рассмотрим такое свойство графа, как степень его полноты.

Полным графом называется такой граф, в котором любая пара вершин соединена своим ребром. Самым простым примером полного графа является n -мерный многоугольник, у которого проведены все диагонали. Степень вершины, или количество ребер, выходящих из одной вершины такого полного графа, всегда равно $\deg(G^o) = (n-1)$, где n – количество вершин. Степень полноты графа определяет его инцидентные возможности, то есть уровень адекватности ребер и вершин, а также вершин между собой. Любой неполный граф может быть достроен до полного добавлением недостающих ребер (рис. 2.1). При этом полный граф содержит первоначальное количество вершин (n) исходного неполного графа, а количество ребер в полном графе по сравнению с исходным увеличивается до $m = (n-1)$. Критерием полноты графа может являться условие максимальности цикломатического числа, т. е.

$$\lambda(G) = m - n + r = (n-1)n - (n-1) + r = (n-1)^2 + r = \max. \quad (2.1)$$

В данном выражении $n = \text{const}$, поэтому для конкретного полного графа $\lambda(G) = f(r) = \max$ при $r = \max$, где r – степень связности графа. Поскольку цикломатическое число выражает число независимых циклов в графе, то выражение (2.1) отражает максимальное число замкнутых циклов, которые могут существовать в полном графе. Условие максимального цикломатического числа определяется максимальным числом компонент связности. Это означает, в первую очередь, максимализацию числа замкнутых циклов полного графа. Дополненный граф отражает те его функции,

которые способствуют изменению состояния системы в направлении к первоначальному.

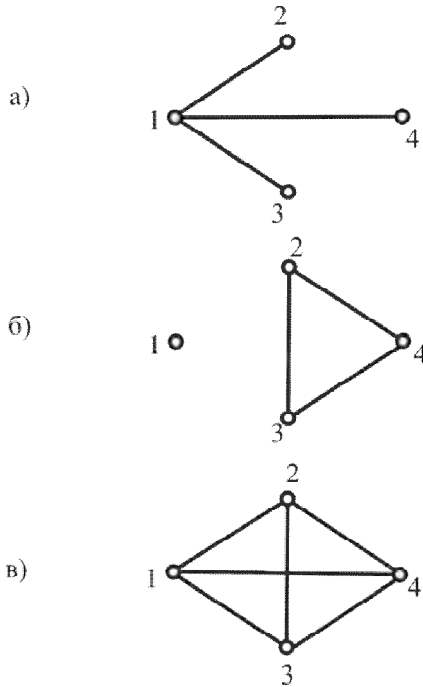


Рисунок 2.1 – Неполный (а), дополненный к полному (б) и полный (в) графы

Если принять, что вершины полного ориентированного графа отражают последовательность состояний моделируемой системы по некоторым параметрам $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а дуги полного графа – суть функции, благодаря которым состояние системы претерпевает заданные последовательные изменения, то любой цикл полного орграфа должен включать последовательность таких функций, которые позволяют заданной системе перейти в исходное состояние. Параметрически это означает $X^o(x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_0)$.

Если исходный неполный граф обозначить $G_0(G_0^o, G'_0)$, а полный граф к нему – как $G(G^o, G')$, то дополненный граф $g(g^o, g')$ к полному должен быть таким, чтобы его вершины $g^o \equiv G_0^o \equiv G^o$, а дуги $g' \in G'$, причем $g' \wedge G'_0 \equiv G'$. Функция дополненного графа заключается в изменении структуры исходной графообразующей композиции таким образом, что результирующий полный граф не имеет висячих вершин и дуг. Он содержит только замкнутые вершинно-дуговые циклы. Замкнутость циклов придает математическим моделям, построенным на графах, вполне определенный смысл, позволяет использовать балансовые уравнения для обработки таких моделей, в частности, на базе весовых коэффициентов и т. д.

Отсюда определяется и физический смысл дополненного графа. Он состоит в том, что число его вершин – суть контролируемые состояния системы, остаются неизменными (при этом могут изменяться весовые коэффициенты вершин таким образом, что выполняется обязательное условие $m_{x_o} \equiv m_{x_n}$), а дополнительные дуги $g' \in G'$, способствующие образованию замкнутых циклов, отражают те функции системы, которые приводят параметры системы к исходному состоянию так, что объединенная весовая функция вершин графа $m_{x_o} \equiv m_{x_n}$

$$\cup m_{g^o} \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Важным свойством полного графа является исключительная полнота функциональных связей между основными его компонентами (вершинами и ребрами), а также его однородность, исходящая из равенства степени всех вершин графа. Исключительным свойством полного графа является дос-

тижимость нулевого баланса суммарной весовой функции вершин x_i

$$\sum m(x_i) \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

а суммарный весовой коэффициент ребер, принадлежащих конкретной вершине (входящих и выходящих), должен отвечать условию

$$\sum m(x_i, x_j) = \max. \quad (2.4)$$

Определенный интерес, с точки зрения использования графа в качестве математической модели, представляет понятие смежного или двойственного графа.

Вначале рассмотрим следующие понятия.

Под плоским графом понимается такой граф, все ребра которого пересекаются только в вершинах.

Два графа считаются изоморфными, если структура их вершин и ребер взаимно сопоставимы, а отличия существуют лишь в графопостроении. Основным свойством изоморфности двух графов является их функциональная совместимость. Это свойство изоморфизма графов крайне важно для любых формализованных графопреобразований.

Гранью плоского графа является область, ограниченная ребрами и не содержащая внутри иных вершин и ребер. Число граней в графе определяется как $\lambda = 2 + g' - g^o$, где g' – число ребер, а g^o – число вершин графа. Под бесконечной гранью графа понимается неограниченная область плоскости, лежащая за пределами графа. Остальные грани графа являются конечными. Петля исходного графа, то есть область, ограниченная ребром, исходящим и входящим в одну

и ту же вершину, также выполняет функцию грани. Любая конечная грань орграфа представляет собой замкнутый цикл, в котором замкнутая последовательность вершин может иметь суммарную весовую функцию (отличную от нуля), входящую в состав другого подобного цикла своим ненулевым значением, таким, что

$$\Delta m^0(x_i) \in \sum m^0(x_j), \quad (2.5)$$

где $m^0(x_i)$ и $m^0(x_j)$ – весовые коэффициенты вершин, принадлежащие смежным граням графа.

Под смежными гранями понимаются две грани графа, имеющие, по крайней мере, одно общее ребро.

Построение смежного графа G^* к исходному графу G (рис. 2.2) включает следующую последовательность операций.

1. Фиксируется общее число граней исходного графа G , включая внешние грани.

2. Внутренним граням исходного графа G присваиваются свойства вершин смежного графа G^* .

3. Внешним граням исходного графа G присваивается свойство висячих вершин смежного графа G^* .

4. Вершины графа G^* соединяются ребром, если им соответствующие грани имеют общее ребро графа G . Если общих ребер, объединяющих две грани графа G , несколько, то соответствующие две смежные вершины графа G^* соединяются несколькими ребрами.

Таким образом, смежный граф имеет число вершин, равное числу граней исходного графа, и равное с ним число ребер. Причем, степень любой вершины смежного графа равна числу ребер соответствующей грани исходного графа.

Если воспользоваться процедурой π -кратного построения смежного графа к исходному, то мы получим некоторую устойчивую структуру смежного графа, для которого дальнейшая $\pi+1$ процедура смежности будет давать граф $(G^*)^{\pi+1} \cong (G^*)^\pi$.

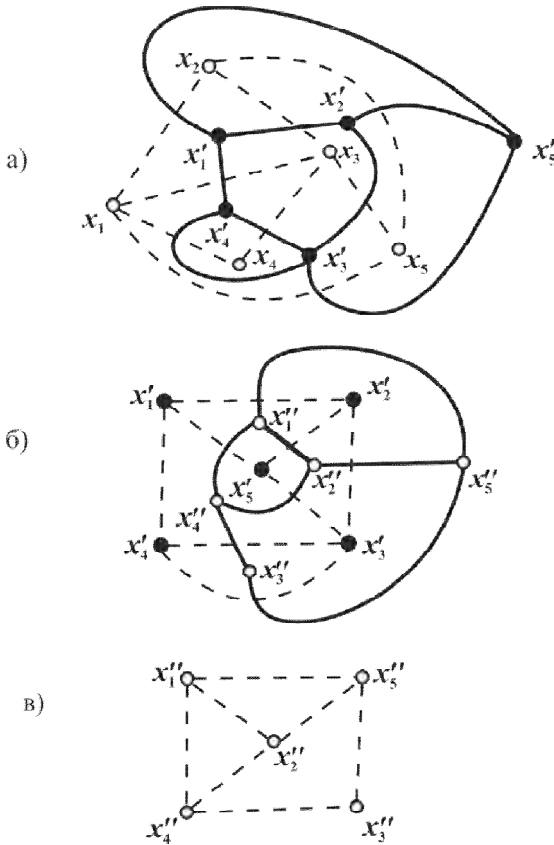


Рисунок 2.2 – Построение смежных графов

Такой граф (рис. 2.3) носит название предельно смежного графа и обладает рядом интересных свойств.

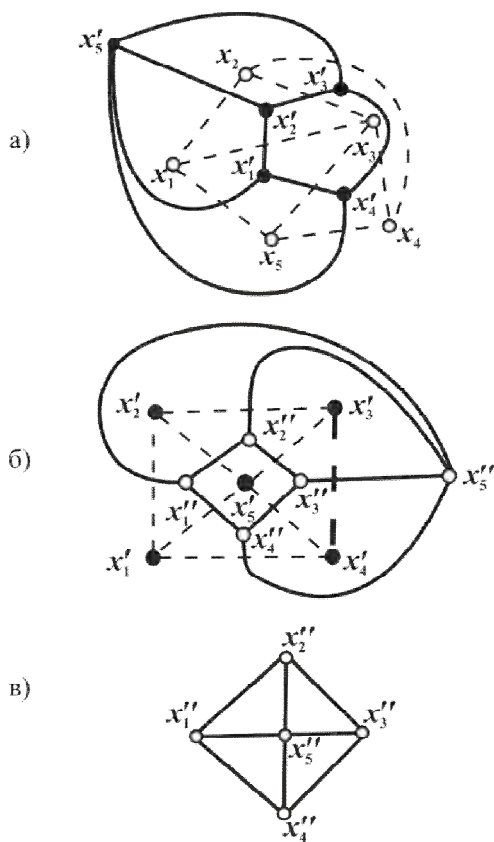


Рисунок 2.3 – Построение предельно смежных графов

1. Предельно смежный граф не имеет висячих вершин, если исходный граф не содержит петель на вершинах. Это означает, что всегда можно обеспечить формализованное управление висячей вершиной исходного графа за счет придания ему инцидентных ребер, принадлежащих смежному графу.

2. Если исходный граф имеет вершинные петли, то процедуру построения смежных графов следует повторять до исчезновения висячих вершин смежности (рис. 2.4).

3. Весовые функции вершин смежного графа представляют собой объединения весовых функций вершин, принадлежащих соответствующей грани исходного графа.

4. Весовые функции ребер смежного графа есть объединение весовых функций смежных ребер исходного графа, объединяющих грани, соответствующие инцидентным вершинам смежного графа.

Еще одно интересное свойство моделей, построенных на ориентированных графах, связано с удобством описания материальных потоков.

Для произвольной вершины g^0 множеством дуг, входящих в нее, будем считать $g_i^{(-)}$, а множество дуг, выходящих из этой вершины – $g_i^{(+)}$. С понятием потока в графообразующих моделях связана такая функция $f(g)$, которая удовлетворяет следующему условию:

$$0 \leq f(g) \leq C(g), \quad g \in G; \quad (2.6)$$

$$\sum_{g \in g_i^{(-)}} f(g) - \sum_{g \in g_i^{(+)}} f(g) = 0, \quad i \neq i_0, \quad i \neq j. \quad (2.7)$$

Здесь $C(g)$ – целое число, отнесенное к каждой дуге графа (пропускная способность дуги).

Функция $f(g)$ представляется количеством вещества (без указания его физического наполнения), которое протекает в единицу времени вдоль дуги g'_i от вершины g_{i-1}^0 к вершине g_i^0 . Согласно ранее данному определению, это ко-

личество вещества не должно превышать пропускной способности $C(g)$ дуги. Для графа, достроенного до полного, в любой вершине выполняется условие

$$\sum_{g \in g_i^{(-)}} f(g) = \sum_{g \in g_i^{(+)}} f(g). \quad (2.8)$$

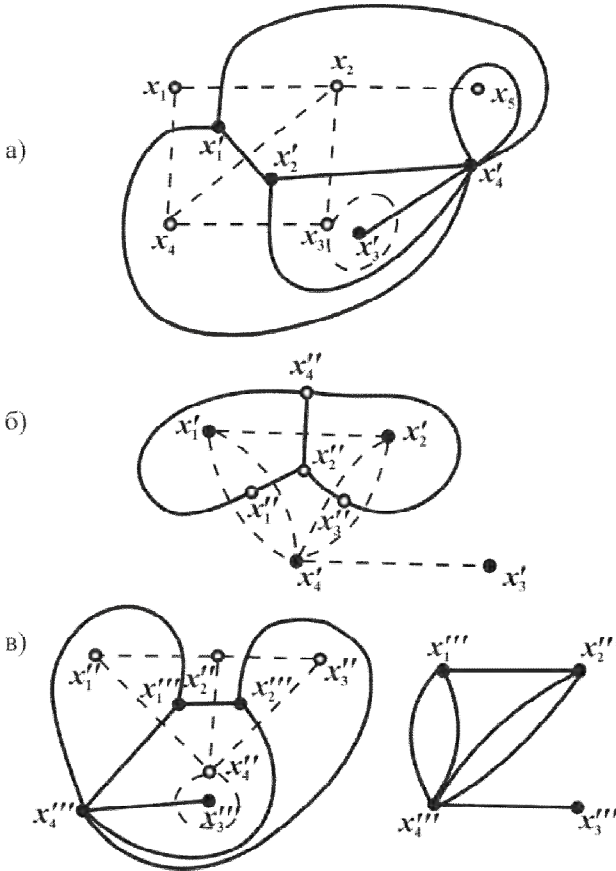


Рисунок 2.4 – Построение смежных двойственных графов с вершинными петлями

Для любой текущей вершины, включая вершину с параметрами $x_0 \in X$, это означает невозможность накопления в ней вещества.

В неполном графе обязательно существуют вершины, для которых не выполняется условие (2.8). Это означает, что для такой вершины существует только функция одного направления преобразования вещества. Например, для вершины g_i^o обозначим существование функции $(g')^{(+)}$ и отсутствие функции $(g')^{(-)}$. В общем случае условие $\sum_{g \in g_i^{(+)}} f(g) - \sum_{g \in g_i^{(-)}} f(g) > 0$ означает накопление таких веществ, которые, возможно, не нужны в дальнейших функциональных преобразованиях исследуемой модели. Такие накопления, например, в математических моделях отходообразующих процессов можно классифицировать как отходы данного производства.

Другой пример. Для вершины g_i^o обозначим отсутствие функции $(g')^{(+)}$ и наличие функции $(g')^{(-)}$. Условие $\sum_{g \in g_i^{(+)}} f(g) - \sum_{g \in g_i^{(-)}} f(g) < 0$ может означать, например, истощение тех компонентов материальной базы производства, которые определяют стратегию технологической обработки сырьевых материалов. Переработанное таким образом в готовую продукцию сырье (брак, некондиционные изделия и др.) может составлять известную часть отходов данного производства.

Еще один пример. Указанное выше условие является отходообразующим, и относится к ситуации, связанной с перераспределением материалов в потоке дуги g' таким образом, чтобы отход данного производства частично был включен в его собственную сырьевую базу. Тогда величина

$$\sum_{g \in g_i^{(+)}} f(g) - \sum_{g \in g_i^{(-)}} f(g) = -\Delta f(g)$$

ресурсы производства без накопления извне.

Подобные прикладные примеры иллюстрируют возможности графопостроительных моделей для изучения материальных потоков в любых технологических процессах.

Вопросы для самопроверки

1. Дать понятие степени полноты графа. Полный граф. Привести примеры полного графа. Критерий полноты графа.
2. Понятие неполного графа. Примеры. Понятие дополненного графа. В чем заключается функциональный смысл дополненного графа?
3. Что такое цикломатическое число? Максимальное цикломатическое число.
4. Основные свойства полного графа.
5. Понятие плоского графа. Основные свойства плоского графа.
6. Что такое смежные грани графа?
7. Порядок построения смежного графа. Графическая интерпретация.
8. Свойства смежного графа. Смежные двойственные графы.
9. Дать понятие предельно смежного графа. Его свойства.
10. Что такое пропускная способность дуги? Ее физический смысл.
11. Физический смысл висячих вершин графа с точки зрения весовых функций.
12. Привести собственные примеры, описывающие физический смысл неполного и дополненного к нему графа.

3. Случайные графы

Еще одной важной разновидностью графов являются случайные графы. Существует большой круг исследовательских задач, когда не существует вполне определенных параметров, по которым возможен контроль за достоверностью математической модели, построенной на графах. В этом случае следует вероятностное описание этих параметров. Примером служат комбинаторные задачи в теории случайных процессов, к которым можно отнести математические модели производственных процессов, построенные на графах, в основе которых лежат случайные отображения.

Из теории отображений следует, что любая числовая характеристика случайного графа может рассматриваться как случайная величина. И наоборот, любая случайная величина, присвоенная параметрам графа, делает его случайным. Когда вероятностная мера на совокупности возможных реализаций случайного графа может определяться как равновероятностное распределение, задача о распределении характеристик графа сводится к элементарной задаче перечисления [1]. И наоборот, всякая задача о перечислении может решаться при помощи случайных графовых моделей. Стандартные алгоритмы решения задач на перечисления, в равной степени, как и других задач комбинаторного качества, вне теории случайных графов оказываются весьма объемными, из них очень трудно извлечь необходимую количественную и качественную информацию. Поэтому применение в математических моделях случайных графов вида D_{np} (обозначения см. далее) является вполне обоснованным.

Пусть A_n – множество всех графов, имеющих n вершин. На этом множестве зададим некоторую вероятностную меру P и сопоставим ее каждому графу $G \in A_n$ в виде весовой

функции $P(G)$ таким образом, что $\sum_{i=1}^n P(G_i) = 1$. Тогда мно-

жество A_n с вероятностным обозначением его элементов –
 сущь отдельных графов, будет считаться случайным графом и
 обозначается следующим образом:

$$E = \begin{cases} G, \\ P(G), \end{cases} \quad (G \in A_n). \quad (3.1)$$

Разобьем множество A_n на сумму непересекающихся
 множеств $\alpha_l \neq 0$ графов, которые имеют l ребер:

$$A_n = \bigcup_{l=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha_l. \quad (3.2)$$

Для каждого графа $G \in \alpha_l$ с матрицей смежности
 $R(G) = \|r_{ij}\|$, где $0 \leq l_1 \leq (l = \sum_{i < j} r_{ij}) \leq l_2 \leq n(n-1)/2$, будет зада-
 на вероятность $P(G)$ таким образом, чтобы выполнялось
 условие

$$P(G) = \frac{\prod p_{ij}^{r_{ij}} (1-p_{ij})^{1-r_{ij}}}{\sum_{l=l_1}^{l_2} \sum_{\substack{\sum_{i < j} r_{ij} \leq l}} \prod p_{ij}^{r_{ij}} (1-p_{ij})^{1-r_{ij}}}. \quad (3.3)$$

Здесь p_{ij} – последовательная вероятность задания весо-
 вой функции каждого ij -го ребра на множестве графов G .

При этом для всех $G \notin \bigcup_{l=l_1}^{l_2} \alpha_l$ примем $P(G) = 0$.

Из формулы (3.3) следует, что при $l_1 = 0$ и
 $l_2 = n(n-1)/2$ знаменатель выражения (3.3) обратится в
 единицу и случайный граф будет иметь вид

$$E = \begin{cases} G, \\ P(G) = \prod_{i < j} p_{ij}^{r_{ij}} (1 - p_{ij})^{1 - r_{ij}}, \end{cases} \quad G \in A_n. \quad (3.4)$$

Это означает, что любая пара вершин i и j может быть соединена ребром с вероятностной функцией p_{ij} и не может соединяться с вероятностью $q_{ij} = 1 - p_{ij}$. Такой случайный граф, для которого $p_{ij} = p_{ji}$ и $p_{ii} = 0$, обозначим $D_n(\|p_{ij}\|)$.

Нас будет интересовать случайный граф вида A_{np} . При условии

$$P(G) = \begin{cases} 0 & \text{при } G \notin \bigcup_{l=l_1}^{l_2} r_l, \\ \frac{p^l q^{\lfloor n(n-1)/2 - l \rfloor}}{\sum p^l q^{\lfloor n(n-1)/2 - l \rfloor}} & \text{при } G \in r_l, \end{cases} \quad (3.5)$$

если $p_{ij} = p = 1 - q$, для всех $1 \leq (i \neq j) \leq n$ имеем частный случай, когда $l_1 = 0$ и $l_2 = n(n-1)/2$. Тогда граф, у которого каждая пара вершин независимо от других пар соединяется ребром с вероятностью p и не соединяется с вероятностью $q = 1 - p$, обозначим случайным графом вида D_{np} .

Сделаем еще одно обобщение для случайного графа. Если для связного графа G_{nk} с n вершинами и распределением $k = \{k_i\}$, $i = 1, 1, n$, где k_i — число ребер, инцидентных вершине i , случайным образом и независимо друг от друга уничтожить ребра с вероятностью q и не уничтожить ребра с вероятностью $p = 1 - q$, оставшиеся вершины вместе с оставшимися ребрами мы определим как случайный граф D_{nkp} на неполном объеме заданности вероятностных данных.

И в заключение дадим понятие m -компонентности случайного графа.

Рассмотрим подмножество $A'_n \in A_n$. Выделим в нем некоторое количество k непересекающихся между собой подмножеств $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_k \in A'_n$, которые составляют некоторую часть от подмножества A'_n . Их совокупность обозначается $C = (C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_k)$ и называется классами связных графов. А m -компонентность случайного графа, где $m = (m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_k)$ обозначается в том случае, если он имеет m_i компонент класса C_i ($i = 1, 1, k$). Если

$m = \left(\underbrace{0, \dots, 0, m, 0, \dots, 0}_k \right)$, то есть имеем один класс C_i связных

графов, то граф носит название m -компонентного с компонентами из класса C_i . А если еще класс C_i совпадает с множеством A'_n , то граф называется m -компонентным. При ус-

ловии $m = \left(\underbrace{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_k \right)$ имеем связный граф из класса

C_i , а при $C_i = A'_n$, т. е. когда классы множеств C_i полностью заполняют пространство множества A'_n , то, по определению, граф будет связным.

Компонентность случайного графа дает информацию о его структуре, что весьма немаловажно для формализованных преобразований структуры таких графов. Потому, что задача управления этими структурами становится практически невозможной, если учесть, что степень неопределенности физических характеристик такого графа налагается на случайность формализованных преобразований, которые можно осуществлять над структурой графа. Об этом мы будем говорить ниже. А пока скажем, что m -компонентность

для подмножества A'_n характеризует глубину проникновения формализованных преобразований, если такие осуществлялись над случайными графами, и поэтому дает информацию о его достоверности.

В целом, задачи, которые ставятся при использовании случайных графов, связаны с поиском точных и предельных распределений различных их характеристик, в частности, весовых функций, которые являются случайными величинами. Поиск точного распределения осуществляется методами комбинаторного анализа. Вероятностные подходы могут быть полезны именно на этапе получения асимптотических распределений рассматриваемых величин.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое случайный граф? Его физический смысл.
2. Отличительные характеристики случайного графа. Область применения в инженерных расчетах.
3. Что такое вероятностная мера в понятии случайного графа?
4. Вероятностные характеристики вершин и ребер случайного графа.
5. Обобщенные характеристики случайного графа на неполном объеме заданности исходных вероятностных данных.
6. Дать понятие класса связности графа.
7. Что такое m -компонентность случайного графа? Смысловая нагрузка понятия «компонентность случайного графа».
8. Применимо ли понятие «компонентности» для других видов графов?

Библиографический список к третьей главе

1. Харари Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – М. : Мир, 1987. – 328 с.

4. Операции над графами

Формализованные операции над графами осуществляются по правилам взаимодействия двух множеств. К ним относятся операции объединения, пересечения множеств, нахождения суммы, разности и произведения двух графов, возведение в степень, стягивание, сжатие и расширение графов, отдельные формы декартовых произведений двух графов. Рассмотрим некоторые из них, предварительно отметив, что нас интересует смысл этих формализованных преобразования с точки зрения их использования при моделировании материальных потоков в производственных системах, в том числе – потоков отходообразования.

4.1. Объединение двух графов

Эта операция подразумевает совмещение двух множеств, результатом которого будет новое множество, в котором будут совмещены элементы объединяемых множеств. Для двух графов $G(g^o, g')$ и $F(f^o, f')$ объединенный граф будет иметь вид $R(r^o, r')$, где вершины – r^o объединенного графа при условии $f'_i \notin g'$, а его ребра – $r' = g' \cup f'$ также при условии $f'_i \notin g'$. Таким образом, в объединенном графе результирующие ребра, исходящие из одной вершины (т. е. дублирующие ребра) не учитываются. Смысл объединения двух графов, с точки зрения использования этой операции при моделировании материальных потоков, заключается в том, что из объединенного графа исчезают совпадающие ребра – суть адекватные функции. При этом упрощается процесс управления потоками.

Приведем пример объединения двух графов (рис. 4.1).

Здесь вершины объединенного графа $r^o = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а ребра $r' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$.

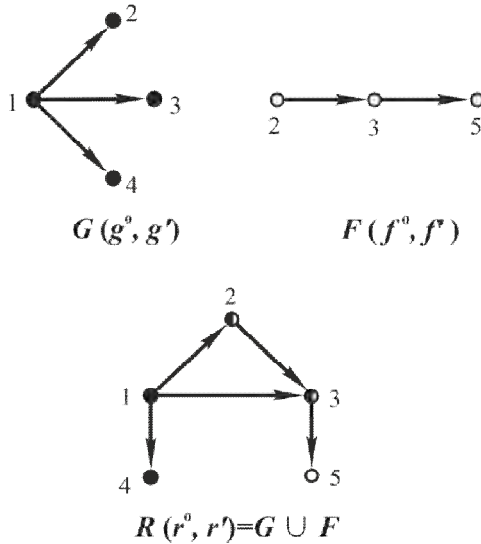


Рисунок 4.1 – Объединение двух графов

Для нас представляет интерес объединение двух графов, один из которых является неполным $G_0(g_0^o, g_0')$, а другой $G(g^o, g')$ – дополненный к нему (рис. 4.2). Объединенный орграф $G(G^o, G')$ будет не что иное, как полный граф, построенный на неполном исходном. При этом вершины объединенного графа строятся по принципу $G^o \equiv g_0^o$, а его ребра определены как $G' = g_0' \cup g'$.

С позиций управляемости материальными потоками в производственных системах, смысл объединения неполного и дополненного к нему графов состоит в том, что эта формализованная операция позволяет получить замкнутые цепи внутри графопостроения, а значит – заранее прогнозируемые замкнутые циклы материалопотоков.

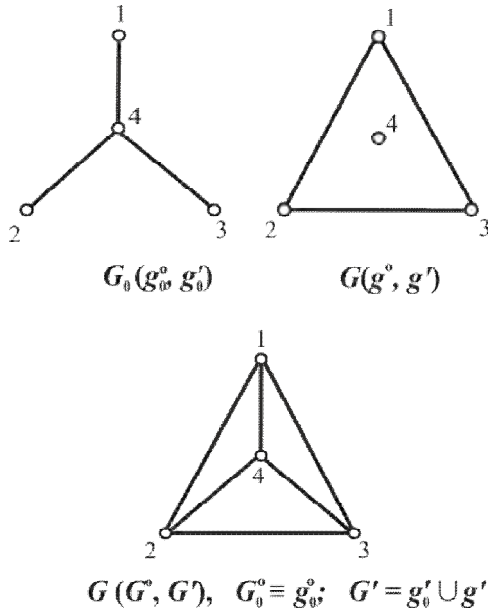


Рисунок 4.2 – Вариант объединения неполного графа и дополненного к нему

В прикладном плане, в свою очередь, как показано выше, замкнутые циклы в графопостроительных моделях материальных потоков производственных систем дают однозначные варианты развития систем в сторону минимизации материальных потоков, когда баланс интегральной весовой функции вершин графа – суть состояние системы и отвечает условию $\sum m(x_i) \rightarrow 0$, а для такого же параметра ребер, принадлежащих конкретной вершине, выполняется условие $\sum m(x_i, x_j) \rightarrow \max$.

4.2. Пересечение двух графов

Формализованная операция пересечения двух графов заключается в том, что в пересеченном графе остаются только общие для двух пересекаемых графов вершины и ребра. Иными словами, для двух пересекаемых графов $G(g^o, g')$ и $F(f^o, f')$ (рис. 4.3, а) результирующий граф

$$R(r^o, r') = G(g^o, g') \cap F(f^o, f') \quad (4.1)$$

будет таким, что его вершины $r^o \in \{g^o \cap f^o\}$, а ребра $r' \in \{g' \cap f'\}$. Если множество вершин двух графов не имеют пересечения, т. е. $\{g^o\} \cap \{f^o\} = \emptyset$ и наоборот, то такой пересеченный граф теряет смысл. В этом случае говорят, что такие графы не пересекаются (рис. 4.3, б).

Ребра результирующего графа суть отображения для каждой вершины графа $R(r^o, r')$ и получаются в результате пересечения отображений той же вершины исходных графов, т. е.

$$r' = \{g' \cap f'\}. \quad (4.2)$$

Операция пересечения относится к коммутативным. Ее смысл, применительно к управлению материалопотоками, сводится к тому, что таким образом выявляется та часть производственной системы, которая удовлетворяет условиям переработки материалопотоков, имеющих общие свойства, но принадлежащих различным производственным системам. Примером здесь могут служить любые процессы утилизации материалопотоков, принадлежащих различным производственным системам.

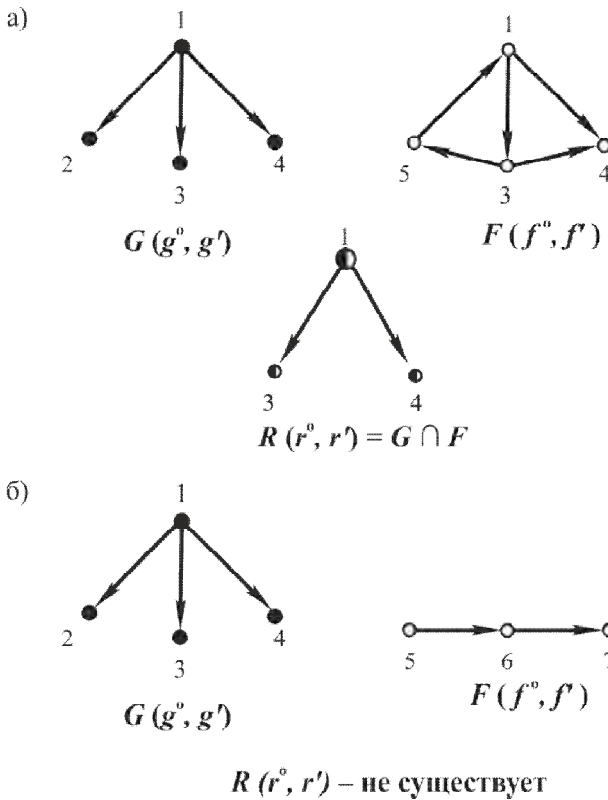


Рисунок 4.3 – Пересечение двух графов

Если выполнить операцию пересечения неполного и дополненного к нему графов (рис. 4.4), то в результате мы получим граф $G(G^0, G')$, состоящий только из вершин исходного неполного графа, т. е. $G^0 \equiv g_0^0$, а ребра его не существуют. В результате, если такой граф описывает динамику материальных потоков, подлежащих переработке в ходе некоторого производственного процесса, мы получаем абсолютно статичную неуправляемую систему.

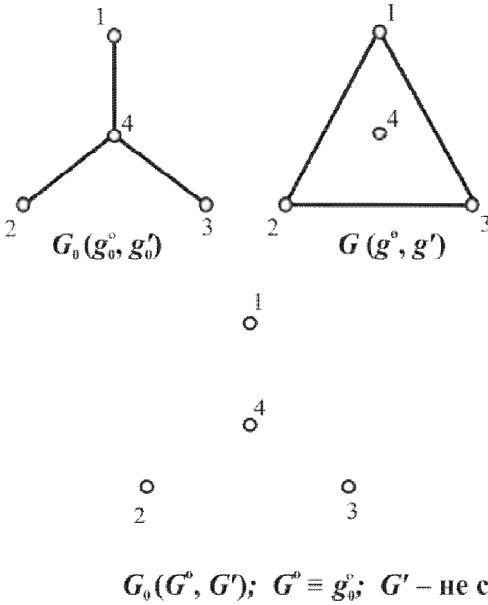


Рисунок 4.4 – Вариант операции пересечения неполного графа и дополненного графа

4.3. Разность двух графов

Вычитание графов позволяет осуществлять операцию демонтажа структуры графа, если вычитаемый граф имеет элементы – вершины или ребра, инцидентные уменьшаемому графу.

Общая формула вычитания двух графов записывается следующим образом

$$R(r^o, r') = G(g^o, g') \setminus F(f^o, f'). \quad (4.3)$$

Для совершения операции вычитания двух графов существует следующее правило. Сопоставляются уменьшаемый и вычитаемый графы таким образом, что в результи-

рующем графе остаются те вершины и те ребра уменьшаемого графа, которых нет у вычитаемого. Иными словами, для разности двух графов $G(g^o, g')$ и $F(f^o, f')$ имеем результирующий граф $R(r^o, r')$, в котором вершины

$$r^o = \{g^o\} \setminus \{f^o\}. \quad (4.4)$$

Отображения результирующего графа (суть его ребра) определяются как разность между множеством вершин исходного вычитаемого и их отображением рассматриваемой вершины в уменьшаемом, т. е.

$$r'_i = \{g_i^o\} \setminus \{f_i^o\}. \quad (4.5)$$

В качестве примера покажем эту операцию на графах (рис. 4.5). Исходный граф $G(g^o, g')$ имеет 4 замкнутые цепи, 9 вершин $g^o = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ и 12 ребер $g' = \{2,1; 1,4; 1,5; 1,6; 1,9; 3,2; 4,3; 3,5; 4,9; 6,7; 7,8; 8,3\}$. В структуре второго графа $F(f^o, f')$ совпадающие вершины $f^o = \{1, 2, 3, 6; 7, 8, 9\}$ и ребра $f' = \{2,1; 1,9; 1,6; 3,2; 6,7; 7,8; 8,3\}$. Операция вычитания сводится к получению результирующего графа $R(r^o, r')$, для которого множество вершин $r^o = \{4; 5; 9\}$, а множество ребер $r' = \{4, 9\}$.

Операция вычитания двух графов рассматривается с точки зрения управляемости материалопотоками, как упрощающая, которая исключает отдельные функции производственной системы, изменяя при этом весовые коэффициенты вершин и ребер результирующего графа. Форма этих изменений не всегда определима и в каждом случае находится в зависимости от физического смысла получаемых преобразований.

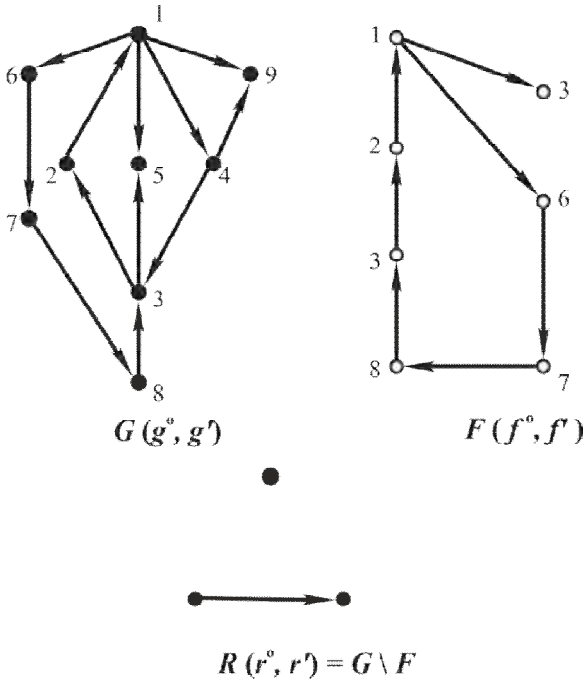


Рисунок 4.5 – Разность двух графов

Следует отметить, что вычитание дополненного графа из неполного не имеет смысла. В результате мы теряем структуру графа, исключая из него все вершины. Т. е. не имеем контролируемых состояний системы и ее составляющих. Действительно, для неполного графа $G(g^{\circ}, g')$ и дополненного к нему $F(f^{\circ}, f')$ имеем результирующий граф $R(r^{\circ}, r')$, в котором вершины отвечают условию пустого множества

$$r^{\circ} \equiv \{g^{\circ}\} \setminus \{f^{\circ}\} = 0 \quad \text{при} \quad g^{\circ} \equiv f^{\circ}.$$

4.4. Произведение двух графов

Выполнение операции умножения одного графа на другой соответствует взятию функции от функции. Только в качестве аргументов здесь выступают элементы дискретных множеств. С этих позиций в графе $G: X \rightarrow Y$ вершины можно представить в виде некоторого дискретного множества X , на котором задана функция. Ребра такого графа – суть отображения, т. е. закономерность, по которой каждому элементу множества X сопоставляется элемент множества Y .

Произведение двух графов имеет следующую математическую запись

$$R(r^{\circ}, r') = G(g^{\circ}, g') \cdot F(f^{\circ}, f'). \quad (4.6)$$

Алгоритм, по которому вычисляется произведение графов $G(g^{\circ}, g')$ и $F(f^{\circ}, f')$ в результирующий граф $R(r^{\circ}, r')$, имеет следующий вид.

1. Объединяются вершины графов таким образом, что $r^{\circ} = g^{\circ} \cup f^{\circ}$.

2. Каждый i -й элемент множества $\{g_i^{\circ}\}$ рассматривается на предмет инцидентности элементу $i+i'$ этого же графа.

3. Далее для множества $\{f_j^{\circ}\}$ ищется элемент $j = (i+i') + j''$, инцидентный элементу $j = i+i'$, также принадлежащему множеству $\{f_j^{\circ}\}$.

4. Если выполняется условие п. 3 алгоритма, то результирующий граф $R(r^{\circ}, r')$ получает ребро $(r_i^{\circ}, r_{(i+i')+j''}^{\circ}) \in r'$.

5. В противном случае рассматривается инцидентность i -й вершины графа $G(g^{\circ}, g')$ к следующей вершине $i+i'$ -го порядка (см. п. 2) и далее по алгоритму.

В целом это можно записать в следующем виде

$$r'_i = f'\{g'_i\}, \quad (4.7)$$

где $f'\{g'_i\}$ – отображение i -й вершины графа F для g'_i .

На рис. 4.6 представлены два графа $G(g^\circ, g')$ и $F(f^\circ, f')$, для которых вершины $\{1, 2, 3, 4\} \in g^\circ$, а $\{1, 2, 3, 4, 5\} \in f^\circ$. Ребра $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\} \in g'$, а $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\} \in f'$. Оба графа имеют общие вершины и ребра. Соответственно, имеются компоненты, принадлежащие только одному графу. Согласно алгоритму, изложенному выше, результирующий граф $R(r^\circ, r') = G \cdot F$ имеет вершинами множество $r^\circ = g^\circ \cup f^\circ$, такое, что $r^\circ = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а ребра описаны множеством $r' = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}$.

Произведение двух указанных графов дает результирующий граф, структурно и качественно отличающийся от исходных графов. Если в исходных графах имеются, по крайней мере, три висячие вершины $\{1, 4, 5\}$ и один простой замкнутый цикл $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, то результирующий граф содержит только одну висячую вершину $\{3\}$ и сложный цикл $\{(1, 4), (2, 4), (2, 5), (1, 5)\}$, в который вовлечены четыре вершины и столько же ребер. Это означает, что:

- возрастает управляемость структурой такого графа;
- уменьшается количество ребер, а значит, происходит унификация управляющих функций результирующего графа по сравнению с исходными их значениями;
- висячей становится узловая прежде вершина $\{3\}$, что определяет ее смысл как конечной вершины.

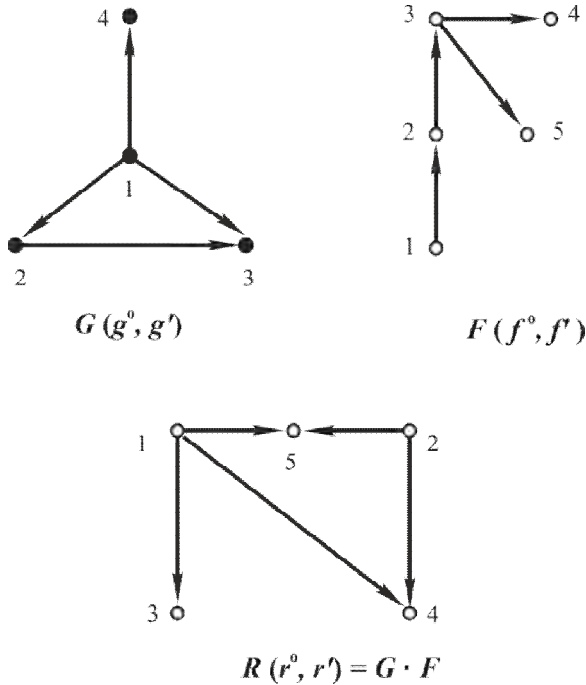


Рисунок 4.6 – Произведение двух графов

Вариант произведения двух графов, один из которых – неполный $G(g^o, g')$, а другой $F(f^o, f')$ – дополненный до полного, представлен на рис. 4.7. Исходный неполный граф содержит узловую $\{4\}$ и три висячие $\{1, 2, 3\}$ вершины. Дополненный граф имеет 11 простых замкнутых циклов (если вести пересчет на ориентированный граф). Результирующий граф $R(r^o, r') = G \cdot F$, в качестве неориентированного, имеет всего один простой замкнутый цикл $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ и одну изолированную вершину $\{4\}$. Очевидно, что управляемость результирующего графа существенно возрастает.

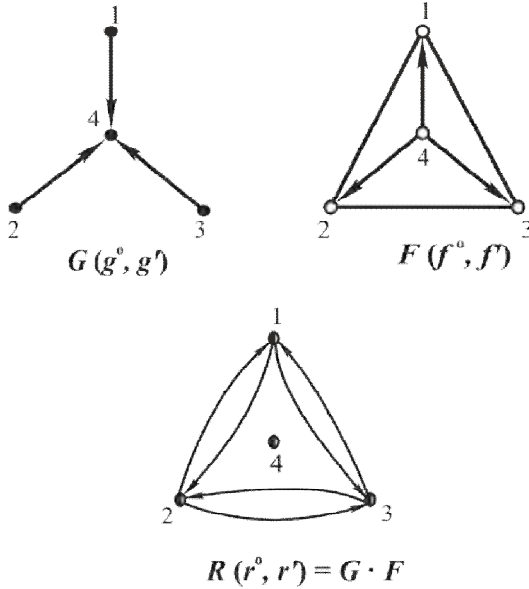


Рисунок 4.7 – Вариант произведения двух графов, один из которых, G – неполный, другой F – дополненный до полного

В последнем примере выражена основная идея, которая содержится в методологии формализованного управления структурами производственных систем на базе графопостроительных математических моделей. Она состоит в том, что существует реальная возможность изменять структуру производственной системы, включая материальные потоки всех видов и направлений, путем создания формализованных моделей и разработанного математического аппарата, а также их, опять-таки, формализованного преобразования.

Практика показывает, что не существует жесткого алгоритма, по которому можно было бы сразу получать более простые графовые структуры или находить упрощенные методы управления ими. Иными словами, результат, полученный на рис. 4.7, является интуитивным и, во многом, случайным. На практике требуется перебор вариантов операций,

которые необходимо осуществить с исходными графами, для того чтобы получить более простую или более управляемую результирующую структуру.

4.5. Декартовое произведение графов

Эта операция приобретает определенный интерес с точки зрения изменения физической сущности не только ребер, но и вершин результирующего графа. Это одна из немногих формализованных операций над графами, в результате которой существенным образом меняется не только структура, но и качественное состояние вершин результирующего графа. Следует отметить, что такие изменения также относятся к формализованным. Поэтому, их физический смысл иногда не имеет объяснения, в результате чего результирующий граф не подлежит вербализации. Исключение составляют те модели, для которых легко определимыми являются весовые коэффициенты вершин исходных графов.

Математическая запись декартового произведения двух графов имеет следующий вид:

$$R(r^0, r') = G(g^0, g') \otimes F(f^0, f'). \quad (4.8)$$

Общее правило, по которому осуществляется декартовое произведение двух графов, заключается в следующем.

Количество вершин результирующего графа определяется матричным произведением вершин двух исходных графов:

$$r^0 = g^0 \otimes f^0. \quad (4.9)$$

Здесь обозначаются такие новые вершины (i, j) , где $i \in g^0$, а $j \in f^0$, которые будут соответственны вершинам исходных графов. Иными словами, отображения каждой из вершин

результатирующего графа получаются посредством перебора многообразия возможных сочетаний каждого отображения одного исходного графа на элементах отображения второго исходного графа.

Для определения ребер результирующего графа находим инцидентность каждой вершине каждого из исходных графов. Одновременно инцидентные вершины для исходной составляют пару (i^*, j^*) , такую, что ей соответствующее результирующее ребро имеет вид $((i, j), (i^*, j^*))$. В этом случае, ребра результирующего графа находятся в сложной функциональной зависимости от функций ребер собственно исходных графов.

Отличительной особенностью результирующего графа, полученного посредством декартового произведения двух графов, является наличие матрицы вершин, часть из которых в результате декартового произведения остаются изолированными.

В качестве примера (рис. 4.8) рассмотрим два графа, один из которых является неполным $G(g^o, g')$, а другой – $F(f^o, f')$ – дополненным к нему. Матрица вершин на множестве $\{(i, j)\} \notin (g^o \cup f^o)$ содержит $3 \cdot 4 = 12$ вершин, каждая из которых качественно отличается от исходных множеств g^o и f^o .

Ребра на множестве указанных вершин образуются следующим образом.

Для вершины (g_4, f_1) :

- инцидентности $\{g_4\} = \{g_1\}$ и $\{f_1\} = \{f_3\}$ дают результирующее ребро $\{(g_4, f_1), (g_1, f_3)\}$;

- инцидентности $\{g_4\} = \{g_2\}$ и $\{f_1\} = \{f_3\}$ дают результирующее ребро $\{(g_4, f_1), (g_2, f_3)\}$;

- инцидентности $\{g_4\} = \{g_3\}$ и $\{f_1\} = \{f_3\}$ дают результирующее ребро $\{(g_4, f_1), (g_3, f_3)\}$.

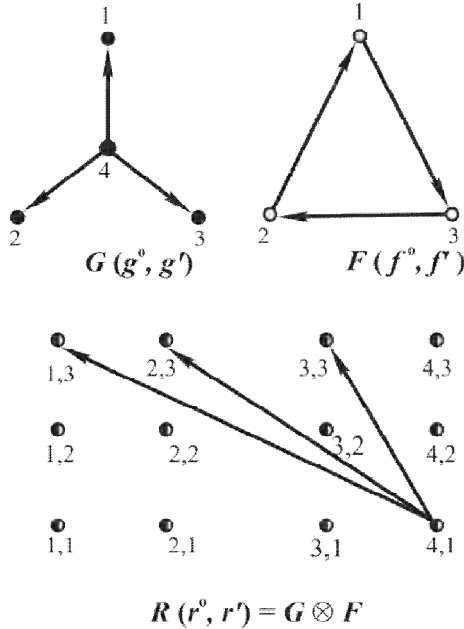


Рисунок 4.8 – Декартовое произведение двух графов

При этом восемь вершин из одиннадцати являются изолированными. Использование таких вершин с целью вербализации моделируемой производственной системы представляет некоторые трудности.

Результирующий граф в данном случае просто дублирует структуру исходного неполного графа с тем отличием, что содержит новое смысловое значение вершин и ребер, сохраняя структуру последних неизменной.

4.6. Декартовое произведение графов на полном объеме заданности исходных данных

Рассмотрим несколько иной механизм управления парой графов $G(G_{i-n}^o, G'_{i-1})$ и $\bar{G}(G_n^o, G'_n)$ с использованием операций декартового произведения, который подробно описан в нашей работе [1].

Особенностью классически сформулированного метода декартового произведения двух орграфов является композиционное изменение структуры вершин результирующего графа и сохранение неизменными фрагментов исходных композиций ребер. В конечном результате это расширяет возможности управления весовыми функциями вершин, однако, при этом весовые функции ребер результирующего графа изменяются слабо.

В работе [2] исследованы графы, структура которых строится по правилам декартового, кронекерова и полудекартово-кронекерова произведений и которые в известной мере лишены этого недостатка. Пусть в общем случае, даны два графа G_1 и G_2 , такие, что их вершины

$$G_1^o = \{a_{1i}\}^{\alpha_1^o} \text{ и } G_2 = \{a_{2j}\}^{\alpha_2^o}; \quad i = 1(1)\alpha_1^o; \quad j = 1(1)\alpha_2^o. \quad (4.10)$$

Тогда элементы множества

$$G^o = G_1 \times G_2 = \{a_{1i}, a_{1j}\}_{i=1, j=2}^{\alpha_1^o, \alpha_2^o} \quad (4.11)$$

являются вершинами некоторого результирующего графа G , для которого ребрами являются множества

$$G' = A_1 \vee A_2 \vee A_3. \quad (4.12)$$

Матрица вершин результирующего графа G имеет размерность $\alpha_1^0 \times \alpha_2^0$ и ранг $m = \alpha_1^0 + \alpha_2^0$, в котором для каждого $k \in m, (k = 1(1)m)$ выполняется $k = i + j - 1$.

В выражении (4.12) по данным [2]

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i}, a_{2j'})] / (a_{1i}, a_{1i'}) \in G_1; \\ &\quad i = 1(1)\alpha_1^0; j, j' = 1(1)\alpha_2^0\} \\ A_2 &= \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i}, a_{2j'})] / (a_{2j}, a_{2j'}) \in G_2; \\ &\quad i = 1(1)\alpha_1^0; j, j' = 1(1)\alpha_2^0\} \\ A_3 &= \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i'}, a_{2j'})] / (a_{1i}, a_{1i'}) \in G_1 \wedge (a_{2j}, a_{2j'}) \in G_2'; \\ &\quad i, i' = 1(1)\alpha_1^0; j, j' = 1(1)\alpha_2^0\} \end{aligned} \right\} (4.13)$$

Тогда очевидно, что граф G с множеством вершин по (4.11) называется:

1) декартовым произведением графов G_1 и G_2 , если выполняется условие $G' = A_1 + A_2$;

2) кронекеровым (тензорным) произведением, если выполняется условие $G' = A_3$;

3) полудекротово-кронекеровым произведением графа G_1 на граф G_2 (или графа G_2 на граф G_1), если выполняется условие $G' = A_1 + A_2$ (или $G' = A_2 + A_3$).

Крайне важной при этом является следующая лемма, показанная в [2].

ЛЕММА: Если H_1 и H_2 – частные графы графов G_1 и G_2 соответственно, то граф $H = H_1 \circ H_2$ является частным графом графа $G = G_1 \circ G_2$.

Это позволяет применить принцип суперпозиции при синтезировании сложных графовых структур, в частности, путем разбиения их на более простые, удобные для последующего анализа. Следует учитывать, что выражение (4.12)

характеризуется неполным объемом заданности на исходных графах. Это значительно сужает возможности управления структурой ребер результирующего графа.

В общем случае, как указывалось выше, неполному орграфу $G_i(G_i^o, G_i')$ соответствует некоторый дополнительный орграф $G_i(G_i^o, G_i')$, содержащий вершины исходного графа и ребра полного фактор-графа $\wedge G$, построенного на этих вершинах без ребер исходного орграфа. То есть $\wedge G_i' = \wedge G \setminus G_i'$. При этом наблюдается условие о том, что полный фактор-граф, построенный на вершинах исходного, также является ориентированным, в котором каждая пара вершин соединена в точности одним ориентированным ребром.

Нами показан метод определения декартового произведения двух графов на полном объеме заданности исходных данных [1].

Для исходных графов G_1 и G_2 с вершинами $G_1^o \{a_{1i}\}_{i=1}^{\alpha_1^o}$ и $G_2^o \{a_{2j}\}_{j=1}^{\alpha_2^o}$, имеющих некоторые дополнительные графы $\wedge G_1(G_1, \wedge G_1')$ и $\wedge G(G, \wedge G)$, полная заданность на декартовом произведении записывается следующим образом. Вершинами результирующего графа следует считать множество

$$G^o = \{a_{1i}, a_{2j}\}; i = 1(1)\alpha_1^o; j = 1(1)\alpha_2^o, \quad (4.14)$$

а множество ребер его

$$G' = A_1 \vee A_2 \vee A_3, \quad (4.15)$$

для которых учитываются ребра $\wedge G_1'$ и $\wedge G_2'$ дополнительных орграфов, построенных на исходных.

В этом случае схема основных множеств ребер для описания результирующего орграфа G может быть записана следующим образом:

1 – перемножаются ребра орграфа G_1 на вершины орграфа G_2 :

$$A_1 = \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i'}, a_{2j})] / (a_{1i}, a_{1i'}) \in G'_1; \quad (4.16)$$

$$i, i' = 1(1)\alpha_1^0; \quad j = 1(1)\alpha_2^0\},$$

то есть
$$A_1 = \sum_{i=1}^{|\alpha_2^0|} (G_{1i}); \quad (4.17)$$

2 – перемножаются вершины орграфа G_1 на ребра орграфа G_2 :

$$A_2 = \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i}, a_{2j'})] / (a_{2j}, a_{2j'}) \in G'_2; \quad (4.18)$$

$$i = 1(1)\alpha_1^0; \quad j, j' = 1(1)\alpha_2^0\},$$

то есть
$$A_2 = \sum_{j=1}^{|\alpha_1^0|} (G_{2j}); \quad (4.19)$$

3 – перемножаются ребра орграфа G_1 на ребра орграфа G_2 :

$$A_3 = \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i'}, a_{2j'})] / (a_{1i}, a_{1i'}) \in \wedge G'_1 \wedge (a_{2j}, a_{2j'}) \in \wedge G'_2; \quad (4.20)$$

$$i, i' = 1(1)\alpha_1^0; \quad j, j' = 1(1)\alpha_2^0\},$$

то есть
$$A_3 = G_1 \circ G_2; \quad (4.21)$$

4 – перемножаются ребра орграфа G_1 на ребра орграфа $\wedge G_2$:

$$A_4 = \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i'}, a_{2j'})] / (a_{1i}, a_{1i'}) \in \wedge G'_1 \wedge (a_{2j}, a_{2j'}) \in \wedge G'_2; \\ i, i' = 1(1)\alpha_1^0; j, j' = 1(1)\alpha_2^0\}, \quad (4.22)$$

то есть $A_4 = G_1 \circ \wedge G_2.$ (4.23)

Здесь $\wedge G_2$ – дополненный граф к графу G_2 до полного;

5 – перемножаются ребра орграфа $\wedge G_1$ на ребра орграфа G_2 :

$$A_5 = \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i'}, a_{2j'})] / (a_{1i}, a_{1i'}) \in \wedge G'_1 \wedge (a_{2j}, a_{2j'}) \in G'_2; \\ i, i' = 1(1)\alpha_1^0; j, j' = 1(1)\alpha_2^0\}, \quad (4.24)$$

то есть $A_5 = \wedge G_1 \circ G_2.$ (4.25)

Здесь $\wedge G_1$ – дополненный граф к графу G_1 до полного;

6 – перемножаются ребра орграфа $\wedge G_1$ на ребра орграфа $\wedge G_2$:

$$A_6 = \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i'}, a_{2j'})] / (a_{1i}, a_{1i'}) \in \wedge G'_1 \wedge (a_{2j}, a_{2j'}) \in G_2; \\ i, i' = 1(1)\alpha_1^0; j, j' = 1(1)\alpha_2^0\}, \quad (4.26)$$

то есть $A_6 = \wedge G_1 \circ \wedge G_2;$ (4.27)

7 – перемножаются вершины орграфа G_1 на ребра орграфа $\wedge G_2$:

$$A_7 = \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i'}, a_{2j'})] / (a_{2i}, a_{2j'}) \in \wedge G'_2; \\ i = 1(1)\alpha_1^0; j, j' = 1(1)\alpha_2^0\}, \quad (4.28)$$

то есть $A_7 = \sum_{j=1}^{|\alpha_1^0|} (\bar{G}_{2j});$ (4.29)

8 – перемножаются ребра орграфа $\wedge G_1$ на вершины орграфа G_2 :

$$A_8 = \{[(a_{1i}, a_{2j})(a_{1i'}, a_{2j'})] / (a_{1i}, a_{1i'}) \in \wedge G_1';$$

$$i, i' = 1(1)\alpha_1^0; j = 1(1)\alpha_2^0\}, \quad (4.30)$$

то есть

$$A_8 = \sum_{i=1}^{|\alpha_2^0|} (\bar{G}_{1i}). \quad (4.31)$$

Произвольный орграф $G (G^0, G')$ может быть представлен матрицей смежности $A \times A$, для которой выполняется условие

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (A_i, A_j) \in G, \\ 0, & \text{если } (A_i, A_j) \notin G. \end{cases} \quad (4.32)$$

При построении дополнительного орграфа элементы данной матрицы будут иметь вид

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (A_i, A_j) \notin G, \\ 0, & \text{если } (A_i, A_j) \in G. \end{cases} \quad (4.33)$$

В такой записи ориентированные графы легко поддаются программированию. Блок-схема алгоритма расчета декартового произведения на полном объеме заданности представлена на рис. 4.9. Здесь обозначения: NV1 – число вершин первого графа – сомножителя; NR1 – число ребер первого графа; NV2 – число вершин второго графа – сомножителя; NR2 – число ребер второго графа; A(I) – массив вершин первого графа; B(I) – массив вершин второго графа; R1(I) – массив ребер первого графа; R2(I) – массив ребер второго графа. Индексом «Д» обозначены соответствующие элементы дополнительных графов.

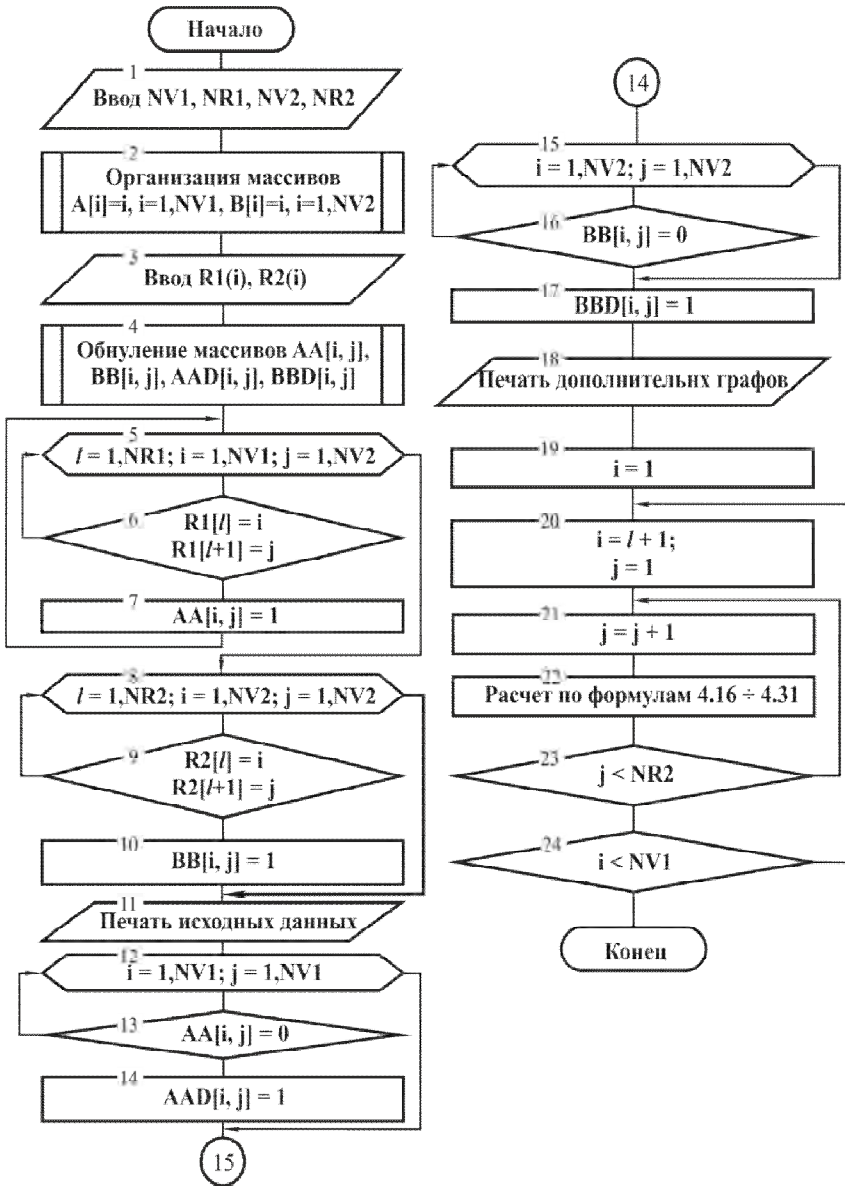


Рисунок 4.9 – Блок-схема алгоритма расчета декартового произведения на полном объеме заданности

Операторы (20)–(26) повторяются восемь раз в соответствии с числом вариантов перебора декартовых произведений на полном объеме заданности, причем оператор (24) включает расчет и распечатку результатов по уравнениям (4.16) – (4.31) последовательно.

Пример групп синтезированных простейших графовых структур по предложенному выше алгоритму представлен на рис. 4.10.

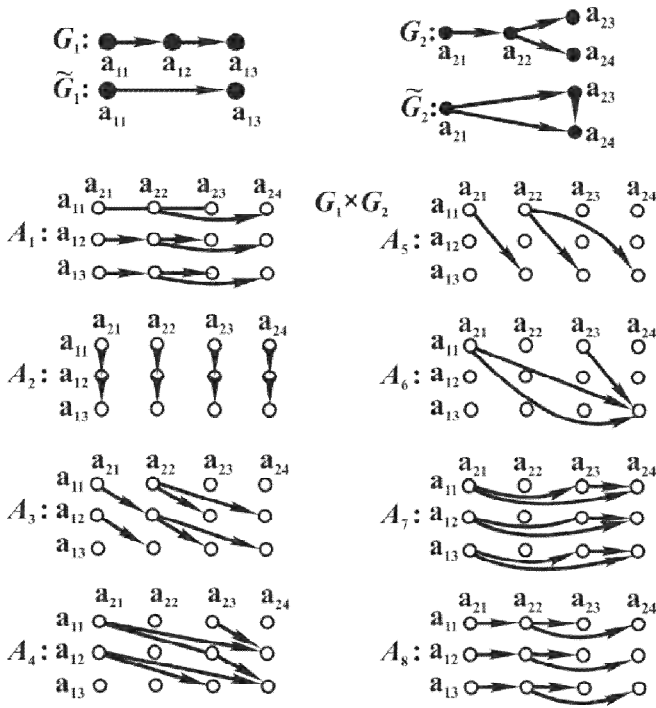


Рисунок 4.10 – Исходные графовые структуры и построенные по принципу декартового произведения на полном объеме заданности

Рассуждения, аналогичные [2], позволяют сформулировать, кроме указанных ранее видов произведений, несколько других, например:

- сильнодекартовое произведение орграфов G_1 и G_2 на вершинах $a_1^0, a_2^0; \{a_{1i}, a_{2i}\} \ i = 1, j = 1$, если результирующий орграф содержит вершины $G' = A_1 + A_2 + A_3$. Обозначается $G_1 * G_2$;

- лексикографическое (композиция) произведение орграфов G_1 и G_2 на тех же вершинах, если результирующий орграф содержит вершины $G' = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Обозначается $G_1(G_2)$.

Определенный интерес, с точки зрения синтезирования структур производственных систем, построенных на орграфах, представляют различные виды декартовых произведений графов самих на себя. То есть для графа $G (G^0, G')$ определяется $G \times G, G \circ G, G \cdot G, G \otimes G, G(G)$. В качестве примера исходных реберных структур представлено также произведение графа G на рис. 4.11.

Рассмотрим его подробнее. Исходный граф имеет вид

$$G = \{a_1, a_2, a_3, (a_1, a_2), (a_1, a_3)\}.$$

Дополнительный орграф

$$^{\wedge}G = \{a_1, a_2, a_3, (a_2, a_3)\}.$$

Матрица результирующего орграфа $G \times G$ имеет размерность 3×3 с рангом $m = 3 + 3 - 1 = 5$.

Результирующие ребра имеют следующую структуру (см. рис. 4.11):

$$A_1 = A_2 = |(a_1a_1)(a_1a_2) | (a_1a_1)(a_1a_3) | (a_2a_1)(a_2a_2) | (a_2a_1)(a_2a_3) | \\ (a_3a_1)(a_3a_2) | (a_3a_1)(a_3a_3) |;$$

$$A_3 = |(a_1a_1)(a_2a_2) | (a_1a_1)(a_2a_3) | (a_1a_1)(a_3a_2) | (a_1a_1)(a_3a_3) |;$$

$$A_4 = A_5 = |(a_1a_2)(a_2a_3) | (a_1a_2)(a_3a_3) |;$$

$$A_6 = |(a_2a_2)(a_3a_3) |;$$

$$A_7 = A_8 = |(a_1a_2)(a_1a_3) | (a_2a_2)(a_2a_3) | (a_3a_2)(a_3a_3) |.$$

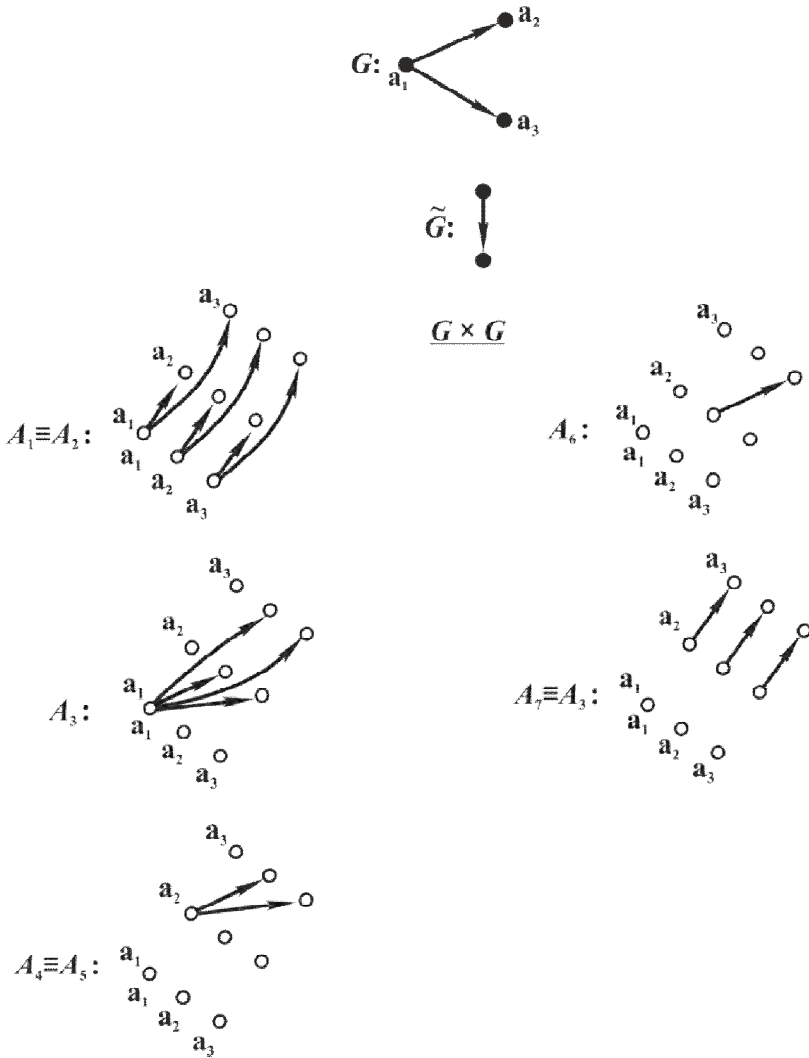


Рисунок 4.11 – Исходная и построенные по принципу декартового возведения в квадрат на полном объеме заданности графовые структуры

То есть такие операции над исходным графом позволяют упорядочивать его структуру, распараллеливать ребра,

переводить вершины из фиксированных состояний в нефиксированные и наоборот, и, в конечном результате, используя критериальные правила, представлять оптимальные формы тождественных графопостроений. В случае если модель представляет производственную систему с заданными ресурсопотоками отходаобразования, формализованные операции такого типа позволяют создавать принципиально новые потоки, тождественные существующим.

4.7. Операции со случайными графами

Математический аппарат преобразования случайных графов связан с изучением вероятностной структуры этих графопостроений посредством определения их вероятностных характеристик m -компонентности. Повторим еще раз, что под m -компонентностью следует понимать принадлежность компонент m_i из множества $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n)$ некоторому F_i , ($i = 1(1)n$) классу связности случайного графа D_{np} .

Рассмотрим случайный граф D_{np} , для которого существует вероятность $P_n^C(\bar{m})$ m -компонентности графа с компонентами заданных классов $C = (C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_k)$ для связных графов с числом вершин, не превышающим n . Тогда первая, вторая и третья производящие функции вероятности $P_n^C(\bar{m})$ описываются выражениями

$$F_{\bar{m}}^C(\alpha) = \sum_n P_n^C(\bar{m}) q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \prod_{i=1}^n \frac{[\bar{F}^{C_i}(\alpha)]^{m_i}}{m_i!}, \quad (4.34)$$

$$F_m^C(\alpha, \bar{\beta}) = \sum_n q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{\bar{m}} P_n^C(\bar{m}) \bar{\beta}^{\bar{m}} = \frac{1}{m!} \left[\sum_{i=1}^n \bar{F}(\alpha) \beta_i \right]^m, \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
 F^C(\alpha, \beta, \bar{\beta}) &= \sum_n q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} \sum_m \beta^m \sum_m P_n^C(\bar{m}) \bar{\beta}^{\bar{m}} = \\
 &= \exp[\beta \sum_{i=1}^n \bar{F}^{C_i}(\alpha) \beta_i],
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

где α – однозначный формальный аргумент для функции вероятностного распределения; β, β_i – формальные аргументы, образующие множество $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_n)$ и со-

отношение $\bar{\beta}^{\bar{m}} = \prod_{i=1}^n \beta_i^{m_i}$, для которого $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n)$, $m = \sum_{i=1}^n m_i$, а $\bar{F}^{C_i}(\alpha) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{l=r-1}^{r(r-1)/2} \alpha_{r,l}^{C_i} \left(\frac{P}{q}\right)^l \alpha^r$, где $\alpha_{r,l}^{C_i}$ – число графов класса C_i имеющих r вершин и l ребер.

Отсюда следуют выражения для:

- производящей функции вероятности $P_n^C(m)$ того, что исходный граф D_{np} состоит из m -компонент в том случае, если его компоненты входят в классы C_i , ($i=1(1)n$):

$$F_m^C(\alpha) = \sum_n P_n^C(m) q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \frac{1}{m!} \left[\sum_{i=1}^n \bar{F}^{C_i}(\alpha) \right]^m; \tag{4.37}$$

- производящей функции вероятности P_n^C того, что исходный граф D_{np} имеет компоненты в любом многообразии m_i , ($i=1(1)n$), которые обязательно входят в классы C_i , ($i=1(1)n$):

$$F^C(\alpha) = \sum_n P_n^C q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \exp\left[\sum_{i=1}^n \bar{F}^{C_i}(\alpha)\right]; \tag{4.38}$$

- производящей функции факториальных моментов $M(\mu_n^C)^{[S]}$ числа компонент исходного случайного графа D_{np} , для которого все m компонент являются элементами классов C_i , ($i = 1(1)n$):

$$\begin{aligned}
 F_S^C(\alpha) &= \sum_n M(\mu_n^C)^{[S]} P_n^C q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \\
 &= \left[\sum_{i=1}^n \bar{F}^{C_i}(\alpha) \right]^S \exp \left[\sum_{i=1}^n \bar{F}^{C_i}(\alpha) \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

(Здесь факториальный момент представлен выражением

$$M(\mu_n^C)^{[S]} = \sum_m m(m-1)(m-2)\dots(m-s+1) P_n^C(m) / P_n^C \tag{4.40}$$

- производящей функции числа компонент μ_n^C для исходного графа D_{np} при условии, что его компоненты включены в классы C_i ($i = 1(1)n$):

$$\begin{aligned}
 \varphi^C(\theta, \alpha) &= \sum_n \left[\sum_m \theta^m P_n^C(m) / P_n^C \right] P_n^C q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \\
 &= \exp \left[\theta \sum_{i=1}^n \bar{F}^{C_i}(\alpha) \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

(Здесь θ – формальный аргумент производящей функции);

- производящей функции числа компонент S_j^C исходного графа D_{np} , содержащих именно j вершин, в случае, если его компоненты являются элементами классов C_i , ($i = 1(1)n$):

$$\begin{aligned} \varphi_j^C(\theta, \alpha) &= \sum_n \left[\sum_{j=1}^m \frac{PS_j^C}{P_n^C} \right] P_n^C q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \\ &= \exp[(\theta-1) \sum_{i=1}^n P_j^{F_i}(1) q^{-j(j-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} + \sum_{i=1}^n \bar{F}^{C_i}(\alpha)]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Безусловно, выражения (4.37) – (4.42) удобно использовать для анализа структуры случайных графов, как методику асимптотического поведения показателей $P_n^C(m)$, P_n^C , $M(\mu_n^C)^{[S]}$, а также распределений μ_n^C и S_j^C , представлением их в виде последовательности следующих контурных интегралов:

$$P_n^C(m) = n! q^{n(n-1)/2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{F_m^C(\alpha)}{\alpha^{n-1}} d\alpha, \quad (4.43)$$

$$P_n^C = n! q^{n(n-1)/2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{F^C(\alpha)}{\alpha^{n-1}} d\alpha, \quad (4.44)$$

$$M(\mu_n^C)^{[S]} = \frac{n!}{P_n^C} q^{n(n-1)/2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_3} \frac{F_S^C(\theta, \alpha)}{\alpha^{n-1}} d\alpha, \quad (4.45)$$

$$z_{\mu_n^C}(\theta) = \sum_m \theta^m P_n^C(m) / P_n^C = \frac{n!}{P_n^C} q^{n(n-1)/2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_4} \frac{\varphi^C(\theta, \alpha)}{\alpha^{n-1}} d\alpha, \quad (4.46)$$

$$z_{n,j}^C(\theta) = \sum_{j=1}^m PS_j^C / P_n^C = \frac{n!}{P_n^C} q^{n(n-1)/2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_5} \frac{\varphi_j^C(\theta, \alpha)}{\alpha^{n-1}} d\alpha. \quad (4.47)$$

Здесь K_1, \dots, K_5 – замкнутые контуры в комплексной плоскости, охватывающие начало координат и проходящие внутри контура, в котором подынтегральная функция является аналитической.

Определенный интерес для прикладной теории случайных графов имеет конфигурация циклов, которые подлежат балансовому исчислению. Пусть $C_i = z \subset m$ – класс связности простых циклов. Из работы [3] известно, что для таких графовых структур существует соотношение

$$c_{r,r}^Z = \begin{cases} \frac{1}{2}(r-1)!, & \text{если } r \geq 3, \\ 0, & \text{если } 1 \leq r \leq 2. \end{cases} \quad (4.48)$$

Учитывая, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_n^{C_i}(m) q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \frac{1}{m!} [\bar{F}^{C_i}(\alpha)]^m, \quad (4.49)$$

а

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_n^{C_i} q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \exp[\bar{F}^{C_i}(\alpha)]^m, \quad (4.50)$$

из выражений (4.37) и (4.38), соответственно, имеем

$$\begin{aligned} F_m^C(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n^C(m) q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{2^m m!} \left[\ln\left(\frac{p\alpha}{q} - 1\right) - \frac{p\alpha}{q} - \frac{p^2 \alpha^2}{2q^2} \right]^m. \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
 F^C(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n^C q^{-n(n-1)/2} \frac{\alpha^n}{n!} = \\
 &= \exp\left\{0,5\left[\ln\left(\frac{p\alpha}{q} - 1\right) - \frac{p\alpha}{q} - \frac{p^2\alpha^2}{2q^2}\right]\right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.52}$$

Таким образом расчеты, осуществляемые на случайных графах, сводятся к определению вероятности m -компонентности той его структуры, которая определена классами связности, данными для исследования. Методы управления случайными графами не предусматривают формализованных изменений их структуры из-за наложения двух случайных факторов – случайных значений физических величин, характеризующих вершины и ребра графа, с одной стороны, и случайных процессов, сопутствующих формализованному графопостроению, если таковые имеются в операциях над графами. В результате анализа случайного графа на m -компонентность с требуемой степенью вероятности P_n^C определяется экстремум функции P_{nkp} . Как правило, необходимым условием для этого является требование, чтобы $p = p(n)$ была функцией, возрастающей с ростом n ($p'(n) > 0$).

4.8. Принцип φ -гомеоморфизма графовых структур

Весьма удобный аппарат управления структурой сложных графовых систем содержит метод φ -преобразований, подробно разработанный Н. П. Хоменко в трудах [4, 5].

В самых общих рассуждениях суть метода φ -преобразований заключается в «склеивании» соответствующих ребер, вершин и их композиций, при условии их гомеоморфности и передислокации остальных элементов исходного графа (графов).

Основным недостатком этого метода применительно к графосинтезным преобразованиям реальных ресурсопотоков и ресурсных каналов является отсутствие условий адекватности ϕ -преобразований для смежных иерархически связанных графовых структур, описывающих различные стороны моделируемого процесса. Адекватность таких преобразований может быть доказана обеспечением суперпозиционности и функциональной тождественности различных структур графов, синтезируемых по одинаковым алгоритмам с помощью этого метода.

Пусть дан граф $G(G^{\circ}, G')$, для которого $G^{\circ} = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_{20}\}$ – множество вершин (рис. 4.12), причем вершины a_7, a_{11}, a_{20} взаимно гомеоморфны, а $G' = \{(a_i, a_{i'})\}$ – множество ребер, причем гомеоморфными из них являются

$$\begin{aligned} & (a_4, a_5) \text{ и } (a_{10}, a_{12}); \\ & (a_5, a_6) \text{ и } (a_{13}, a_{14}); \\ & (a_7, a_8) \text{ и } (a_{16}, a_{17}). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Тогда граф $g(g^{\circ}, g')$, в котором «склеены» соответствующие гомеоморфные вершины и ребра, представляет собой ϕ -морфизм графа $G(G^{\circ}, G')$, т. е.

$$\phi: (G^{\circ}, G') \rightarrow (g^{\circ}, g'), \tag{4.54}$$

так, что $G^{\circ} \setminus G' = g^{\circ} \setminus g'$. При этом ребра (a_4, a_5) и (a_{10}, a_{12}) , (a_{13}, a_{14}) и (a_5, a_6) , (a_7, a_8) и (a_{16}, a_{17}) являются ϕ -гомеоморфизмами.

Важным для ϕ -преобразования графовых структур является понятие ϕ -морфизма, данное в работе [5].

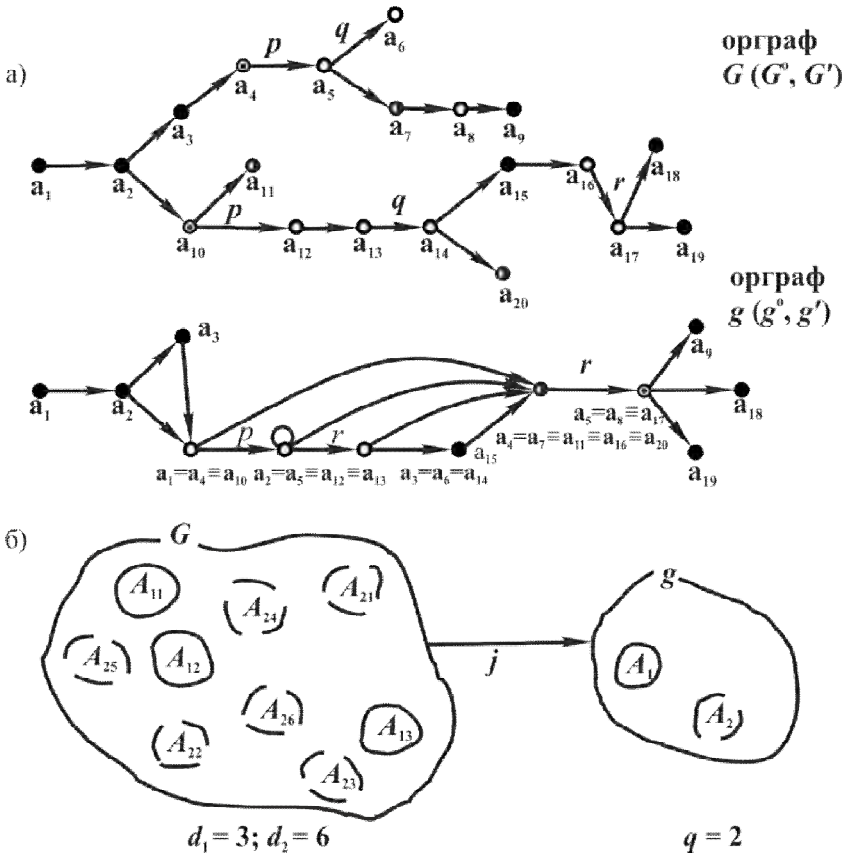


Рисунок 4.12 – Схема φ -преобразования графа (а) и его геометрическая интерпретация (б)

Определение. Морфизм $\varphi: X \rightarrow X$ называется φ -морфизмом, если существуют такие попарно неизоморфные подобъекты $(A_j, U_j) \wedge j = 1(1)q$ объекта X , для которого существует объединение $\bigcup_{j=1}^q A_j$ и расслоенные произведения

$(X \prod_x A_j, U_j, \varphi_j)$, а также попарно неизоморфные подобъекты (A_{ji}, U_{ji}) , $i = 1(1)d$ объекта $X \prod_x A_j$, $j = 1(1)^q$, для которых определены объединения $\bigcup_{i=1}^d A_{ji}$ и $\bigcup_{j=1}^q \bigcup_{i=1}^d A_{ji}$, причем $\bigcup_{j=1}^q A_j = X$; $\bigcup_{i=1}^d A_{ji} = X \prod_x A_j$; $\bigcup_{j=1}^q \bigcup_{i=1}^d A_{ji} = X$, а морфизмы $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ U_{ji}$, $i = 1(1)d$, $j = 1(1)^q$ являются изоморфизмами.

Возвратимся к примеру (см. рис. 4.12). В заданном графе G выделяется некоторая часть A , требующая преобразований. Получаем пару (G, A) , где A состоит из q (в данном случае $q = 2$) наборов

$$A = A_1 + A_2 \tag{4.55}$$

более мелких, но связанных гомеоморфностью составных компонент графа G

$$A_1 = A_{11} + A_{12} + A_{13} \tag{4.56}$$

$$A_2 = A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} + A_{25} + A_{26}. \tag{4.57}$$

Здесь A_1 – множество гомеоморфных вершин: $(A_{11} = a_7; A_{12} = a_{11}; A_{13} = a_{20})$;

A_2 – множество гомеоморфных ребер: $A_{21} = (a_4, a_5)$; $A_{22} = (a_5, a_6)$; $A_{23} = (a_7, a_8)$; $A_{24} = (a_{10}, a_{12})$; $A_{25} = (a_{13}, a_{14})$; $A_{26} = (a_{16}, a_{17})$.

Количество компонент в A_j обозначим через d_j . В данном случае $d_1 = 3$, $d_2 = 6$ (см. рис. 4.12). В результате «склеивания» соответствующих компонент исходного графа получаем $q = 2$ части A_j нового графа g и новую пару (g, A) , где $A = A_1 + A_2$. Таким образом, переход от пары (G, A) к паре

(g, A) посредством гомеоморфных объединений представляет собой типичное φ -преобразование

$$\varphi: (G, A) \rightarrow (g, A), \quad (4.58)$$

для которого

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_4, & \text{если } x \in A_1, \\ x' \in (a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_4, a_5), & \text{если } x \in A_2. \end{cases} \quad (4.59)$$

Далее, согласно определению 1 каждую из φ -гомеоморфных компонент A_{ji} набора A_j , $i = 1(1)d_j$, $j = 1(1)^q$ отображим гомеоморфно на A_j

$$\varphi_{ji} : A_{ji} \rightarrow A_j, \quad (4.60)$$

Отображение $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$ есть не что иное, как сумма

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^d \varphi_{ji} \quad \varphi\text{-гомеоморфизмов, и уже не является гомеоморфизмом.}$$

В данном случае отображения φ_1 и φ_2 соответственно объединяют компоненты $b_1 = b_2 = G$ и названы Н. П. Хоменко φ -базами отображений $\varphi_j, j = 1(1)^q$.

Для определения однозначности полученного в результате φ -преобразования графа предлагается следующая характеристика компонент связности исходного графа:

$$K_r^j = I\{A_{ji} / A_{ji} \in G_r\}, \quad r = 1(1)m, \quad (4.61)$$

где m – число исходных компонент графов.

В рассматриваемом случае (см. рис. 4.12) $m = 1$. Поэтому $K'_1 = 3$ обозначается в соответствии с числом гомеоморф-

ных вершин в исходном графе; $K'_2 = 6$ определяется по числу гомеоморфных ребер в исходном графе.

Логично предположить достижимость гомеоморфности для соответствующих компонент связности A_{ji} и B_{ji} графов, описывающих различные структуры одного и того же ресурсопотока. Например, для графов функциональной и временной структур в качестве гомеоморфизмов можно принимать отдельные группы ребер (для первой структуры), причем они же в качестве вершин являются гомеоморфизмами для временных структур. И в первом, и во втором случае эти гомеоморфные группы отражают общую сторону моделируемого процесса, например, порядок и иерархию прохождения материальных потоков для конкретного производства с соответствующими весовыми функциями. В этом случае φ -базы отображений φ_j и φ_j , принадлежащие этим графовым структурам, могут быть только адекватными друг другу, в силу неизменности принципа технологической совместимости между элементами и способами воздействия на них. В связи с этим сформулируем следующее утверждение.

Утверждение. Условием адекватности φ -преобразований для композиций совокупных графовых структур, имеющих общую элементную или функциональную базу, является постоянство суммарного коэффициента связности компонент исходных графов. Т. е.

$$\sum_{r=1}^m K_r^j \{A_{ji}\} = \text{const}, \quad j = 1(1)q, \quad i = 1(1)d_j. \quad (4.62)$$

Действительно, для двух совокупных графовых пар (g, A) и $(g, B) < m_p$, полученных в результате φ -преобразования, условие

$\sum_{r=1}^m K_r^j \{A_{ji}\} \neq \sum_{t=1}^p K_r^j \{B_{ji}\}$ означает различное число исходных гомеоморфизмов в графовых парах, подлежащих

φ -преобразованию. Это означает, что в какой-либо из графовых пар остается, по крайней мере, одна гомеоморфная компонента и, согласно изложенному выше определению, такое образование также является гомеоморфным. Иначе говоря – занижен объем притязаний на множестве исходных данных A_{ji} и B_{ji} , и φ -преобразование не достигнуто.

4.9. Метод исключения Гаусса применительно к операциям над графами

В том случае, когда исследуется явно несопоставимая взаимосвязь качественных и количественных характеристик совокупности ресурсопотоков отходообразования, ориентированный граф, как и любое другое бинарное отображение, удобно представить в матричной форме, конкретно – при помощи матриц инцидентности, характеризующих отношения между свойствами вершин и ребер. В общем случае, для графа $G (G^o, G')$: $G_0 \{a_i\}_{i=1}^{\alpha_1}$, $G \{a_i, a_{i'}\}_{i,i'=1}^{\alpha_1 \alpha_2}$ матрица $\alpha_1 \times \alpha_2$ ($\alpha_1 < \alpha_2$) является инцидентной, если выполняется условие:

$$U_{i,i'} = \begin{cases} 1, & (a_i, a_{i'}) \in \{a_i\}, \\ -1, & (a_i, a_{i'}) \in \{a_{i'}\}, \\ 0, & (a_i, a_{i'}) \notin \{a_i\} \{a_{i'}\}. \end{cases} \quad (4.63)$$

В самых общих рассуждениях, метод исключения Гаусса заключается в построчной компенсации элементов матрицы обнуления значимых ее членов, посредством композиционного преобразования остальных строк с вводом в них информации об обнуленных элементах. По существу, как показано в [6], один этап метода исключения Гаусса адекватен применению однократного приема метода Лагранжа приведения любой квадратичной формы к сумме квадратов ее элементов.

Пусть дана матрица

$$U(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i'}) = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \sum_{i'=1}^{\alpha_2} U_{ii'} \times \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_{i'}. \quad (4.64)$$

Метод Лагранжа состоит из двух приемов выделения независимых квадратов из заданной матричной формы.

1. Если при некотором k и $i = 1(1)\alpha_1$, $U_{kk} \neq 0$, то

$$U(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i'}) = \frac{(\sum_{i'=1}^{\alpha_2} U_{ki} \times \mathbf{a}_{i'})^2}{U_{kk}} + U_1(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i'}), \quad (4.65)$$

причем квадратичная форма U_1 уже не содержит элемент

$$U_1(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i'}) = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \sum_{i'=1}^{\alpha_2} \left[\frac{U_{ii'} - U_{ki} U_{ki'}}{U_{kk}} \right] \mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}. \quad (4.66)$$

2. Если при некоторых $k = 1(1)\alpha_1$ и $h = 1(1)\alpha_2$, $U_{kk} = U_{hh} = 0$ и $U_{kh} \neq 0$, то

$$U(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i'}) = \frac{[\sum_{i'=1}^{\alpha_2} (U_{ii'} + U_{hi}) \mathbf{a}_{i'}]^2}{2U_{kh}} - [\sum_{i'=1}^{\alpha_2} (U_{ii'} - U_{hi'}) \mathbf{a}_{i'}]^2 + U_2(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i'}), \quad (4.67)$$

причем квадратичная форма U_2 не содержит переменных \mathbf{a}_h и в явном виде задается выражением

$$U_2(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i'}) = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \sum_{i'=1}^{\alpha_2} \left[U_{ii'} - \frac{(U_{hi} U_{ki'} + U_{ki} U_{hi'})}{U_{kh}} \right] \mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}. \quad (4.68)$$

Теоретически, приемы (4.65) и (4.67) позволяют за конечное число шагов свести любую ненулевую матричную форму к сумме квадратов (4.66) и (4.68).

Специфика применения этого метода в графосинтезных преобразованиях заключается в необходимости подбора порядка и числа этих приемов с целью обеспечения оптимального результата по весовым функциям ребер и вершин графа, представленного исходной матрицей.

Весовые функции ребра $\{a_i, a_{i'}\}$ в матрице инцидентности определяются умножением элементов соответствующего ее столбца на эту весовую функцию, т. е. $U_{ii'} \cdot g(a_i, a_{i'})$, $i' = 1(1)\alpha_1$, а для вершин – построчное умножение $U_{ii'} \cdot g(a_{i'})$, $i' = 1(1)\alpha_2$.

В общем случае, выражения (4.66) и (4.68) представляют весовые функции отдельных элементов результирующего графа, полученного в результате синтезирования первоначальных графовых структур методом исключения Гаусса, и могут быть получены по информации об исходной системе присвоения весовых функций.

Известны применения графовых моделей в экономических и человеко-машинных системах с применением методов синтеза и анализа функциональных единиц [7, 8]. При этом методы синтеза и анализа в работе не являются строго аналитическими. Предлагаемая здесь методика выгодно отличается тем, что в ее основе лежат формализованные математические операции над символами графовых моделей, отображающих конкретные смысловые функции.

Подобный математический аппарат впервые применяется с целью оптимизации формализованных графовых структур.

4.10. Изоморфные преобразования графов

Изоморфизм графов дает в руки исследователя весьма надежный метод формализованных преобразований графопостроительных структур в математических моделях, которые в отличие от многих имеют четко выраженную количественную оценку в виде инвариантов изоморфизма.

Два графа G_1 и G_2 являются изоморфными в некоторой замкнутой области подстановок S , если существует такая подстановка $g \in S$, для которой переименование вершин графа G_1 в соответствии с этой подстановкой приводит к графу G_2 . Полином над конечным полем, соответствующий изоморфному графу, имеет вид

$$\pi_g(x, y) = \sum_a R_{k(a)}(C_{i(a), j(a)} x^{i(a)} y^{j(a)}). \quad (4.69)$$

При этом суммирование осуществляется по всем цикломатическим классам. Здесь $k(a)$ – число пар в классе a ; $(i(a), j(a))$ – средний представитель класса a ; коэффициенты $C_{i(a), j(a)}$ – принадлежат двоичному множеству Галуа $F(2^m)$, порядок которого составляет $k(a)$.

Если существует подстановка $g(x) \in S$, то в силу изоморфизма двух графов для всех $x, y \in X$ полином может быть записан как

$$\pi_2(x, y) = \pi_1(g(x), g(y)). \quad (4.70)$$

Такой изоморфизм носит название S -изоморфизма [9].

Общее правило таково. Любая подстановка n -го порядка является результатом суперпозиции двух базисных подстановок, одна из которых является циклической, а другая

состоит из двух рядом расположенных элементов цикла, оставляя при этом другие элементы без изменения.

Как указано выше, инвариант изоморфизма служит количественной характеристикой изоморфности двух графов, один из которых можно считать исходным, а второй – результирующим, полученным как следствие изоморфного преобразования графа.

Далее мы сошлемся на работу К. М. Малова [9], где подробно изложены алгоритмы расчета инварианта S -изоморфизма двух графов.

Обозначим полином над двоичным множеством $F(2^m)$, соответствующий орграфу с n вершинами ($n = 2^m - 1$) как $\pi(x, y)$. Пусть на элементарном поле θ существует функция

$$g_1(x) = \theta \cdot x, \quad (4.71)$$

которой соответствует циклическая подстановка

$$(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}). \quad (4.72)$$

Рассмотрим некоторое замкнутое подмножество S_1 всех подстановок изоморфизма, образованных суперпозициями подстановки $g_1(x)$, а именно,

$$S_1 : (1 \cdot x, \theta \cdot x, \theta^2 \cdot x, \dots, \theta^{n-1} \cdot x). \quad (4.73)$$

Тогда функции от коэффициентов полинома (4.69), соответствующего исходному графу G_1 в виде

$$C_{i(a), j(a)}^\lambda, \text{ где } (i + j)\lambda \equiv 0, \pmod{n-1}, \quad (4.74)$$

являются инвариантами S -изоморфизма.

А функции вида $C_{i_1, j_1}^\lambda C_{i_2, j_2}^\mu$ от коэффициентов полинома (4.69) являются инвариантами S -изоморфизма. Здесь числа λ и μ определяются из условия

$$(i_1 + j_1)\lambda + (i_2 + j_2)\mu \equiv 0, \pmod{n-1}. \quad (4.75)$$

Число $k(a)$ в формуле (4.69) определяется из условия

$$\begin{cases} k^{i_1+j_1} = C_{2, i_1, j_1} / C_{1, i_1, j_1}, \\ k^{i_2+j_2} = C_{2, i_2, j_2} / C_{1, i_2, j_2}, \\ \dots \\ k^{i_k+j_k} = C_{2, i_k, j_k} / C_{1, i_k, j_k}, \\ \dots \end{cases} \quad (4.76)$$

Каждое из этих уравнений разрешимо, так как равенство инвариантов

$$C_{2, i_k, j_k}^{\lambda_k} = C_{1, i_k, j_k}^{\lambda_k}, \quad (i_k + j_k)\lambda \equiv 0, \pmod{n} \quad (4.77)$$

предполагает, что

$$(C_{2, i_k, j_k} / C_{1, i_k, j_k})^{\lambda_k} = 1. \quad (4.78)$$

Решение системы (4.76) будет единственным, если выполнимо условие $(i_k + j_k) = 1$ для всех $k = \overline{1, K}$. Если же числа $(i_k + j_k)$ имеют общий делитель $\varphi \neq 1$, то число решений системы равно φ . В этом случае, вычисление инвариантов сводится к выбору любого значения k для построения и подстановки в функцию $g(x) = k \cdot x$. Такая подстановка приво-

дит к равенству $\pi_2(x, y) \equiv \pi_1(k \cdot x, k \cdot y)$. Иными словами, для всех остальных коэффициентов выполняется условие

$$C_{2,i,j} = C_{1,i,j} k^{i+j}. \quad (4.79)$$

Обратим внимание на структуру инварианта, который относится к S -изоморфному преобразованию. А именно:

$$I = \sum \varepsilon_{\lambda, \lambda, \dots, \lambda} C_{i,j}^{\lambda} C_{i,j}^{\lambda} \dots C_{i,j}^{\lambda}, \quad (4.80)$$

где $\varepsilon_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ – числовые коэффициенты полинома инварианта;

n – количество коэффициентов в полиноме.

При этом выполняется условие

$$\sum \lambda_k (i_k + j_k) \equiv 0, \pmod{n}. \quad (4.81)$$

Суммирование осуществляется по возможным $\lambda_i = 0, 1, \dots, (n-1)$. Например, при $n = 10$ имеем

$$I = \sum \varepsilon_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{410-1}} C_{i_1, j_1}^{\lambda_1} \dots C_{i_{39}, j_{39}}^{\lambda_{39}}, \quad (4.82)$$

где $\sum_{k=1}^{39} \lambda_k (i_k + j_k) \equiv 0 \pmod{15}$, а $\lambda_i = 0, 1, \dots, 9$.

В формализованных преобразованиях графов определенную роль играют методы управления структурой вершин исходного графа. При этом изменение интегральной весовой функции вершин результирующего графа позволяет решать минимаксные задачи, в частности, связанные с изменениями функций ребер результирующего графа. К таким методам относятся S -скрещивание и P -скрещивание изоморфных графов.

4.11. Метод S -скрещивания графов

В основе метода лежит возможность из множества инвариантов S_1 -изоморфизмов исходного графа выделять инварианты некоторого S_2 -изоморфизма ($S_2 \in S_1$) этого же графа. В результате получаем, что для любой пары графов, один из которых является исходным с полиномом $\pi_1(x, y) = \sum C_{1,i,j} x^i y^j$, а второй – результирующим $\pi_2(x, y) = \sum C_{2,i,j} x^i y^j$, имеет место равенство инвариантов S -изоморфизма

$$I(C_{1,i,j}) = I(C_{2,i,j}). \quad (4.83)$$

Коэффициенты графа $\pi_2(x, y)$, полученного из $\pi_1(x, y)$ выделением $S_2 \in S_1$ -изоморфизма, обозначим через $c_{i,j}$. Нетрудно установить, что

$$c_{2,i,j} = \pi_{1,i,j}(c_{\lambda,\mu}), \quad (4.84)$$

а необходимым и достаточным условием того, чтобы инвариант S -изоморфизма был результирующим, есть следующее:

$$I(\pi_{1,i,j}(c_{\lambda,\mu})) \equiv I(c_{1,i,j}). \quad (4.85)$$

Инвариант $I(c_{1,i,j})$ можно представить в виде равенства (4.80). Тогда тождественное уравнение (4.85) описывает систему уравнений относительно коэффициентов $\varepsilon_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$. Если ранг матрицы системы равен r , а число искоемых коэффициентов – k , то число независимых инвариантов при S -скрещивании равно $k-r$. В частности, если придать одному из свободных коэффициентов значение $k_{i=\text{const}} = 1$ и считать

остальные коэффициенты нулевыми, можно получить один из инвариантов полной системы $I_{\text{полн}}$.

В качестве примера рассмотрим исходный граф, записанный функцией только одной переменной. Для него

$$\pi_1(x, y = 0) = \pi_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{1,i} x^i \quad (4.86)$$

и число m единичных значений полинома $\pi_1(x)$ является равным инварианту S -изоморфизма, т. е.

$$m = I(c_{1,i}) = \sum \varepsilon_{i_0, i_n, \dots, i_{n-1}} C_0^{i_0} C_1^{i_1} \dots C_{n-1}^{i_{n-1}}, \quad (4.87)$$

где $n = 2^m - 1$, а коэффициенты полинома принимают значения из соответствующей области Галуа $F(2^m)$.

В общем, для исходного и результирующего изоморфных графов

$$\pi_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{1,i} x^i \quad \text{и} \quad \pi_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{2,i} x^i \quad (4.88)$$

справедливо соотношение $I(C_{1,i}) = I(C_{2,i})$. А инвариант (4.87) образует полную систему уравнений, т. е. он может

быть представлен в виде многочлена $\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i m^i$. Здесь коэффициенты φ_i обозначают соответствующие элементы из области Галуа $F(2^m)$.

Поэтому и число m может быть представлено в виде ряда

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \lambda_i. \quad (4.89)$$

Например, пусть $n = 12$. Представление исходного графа запишем как

$$\pi_1(x) = C_{1,0} + d_2(C_{1,1}x + C_{1,3}x^3 + C_{1,9}x^9) + d_4(C_{1,5}x^5 + C_{1,11}x^{11}),$$

где $C_{1,0} \in \{0,1\}$, $C_{1,1}, C_{1,3}, C_{1,9} \in d_2$, а $C_{1,5}, C_{1,11} \in d_4$, при $x \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ по условию задачи.

Тогда инвариант S -изоморфизма имеет вид

$$I(C_{1,i}) = \sum \varepsilon_{i_0, i_1, i_3, i_5, i_9, i_{11}} C_{1,0}^{i_0} C_{1,1}^{i_1} C_{1,3}^{i_3} C_{1,5}^{i_5} C_{1,9}^{i_9} C_{1,11}^{i_{11}}, \quad (4.90)$$

где $\varepsilon_{i_0, i_1, i_3, i_5, i_9, i_{11}} \in d_2$, $i_0, C_{1,0} \in d_0$, $i_1, i_3, i_9 \in d_2$, $i_5, i_{11} \in d_4$. Причем арифметическая сумма чисел $i_0, i_1, i_3, i_5, i_9, i_{11}$ сравнима с n , т. е.

$$0 + i_1 + 3i_3 + 5i_5 + 9i_9 + 11i_{11} \equiv 0 \pmod{12}.$$

Коэффициенты результирующего графа с представлением $\pi_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{2,i}x^i$ выразим через коэффициенты исходного графа следующим образом:

$$C_{2,0} = C_{1,0}; \quad C_{2,1} = C_{1,1} + 14\varepsilon; \quad C_{2,3} = C_{1,3} + 8\varepsilon;$$

$$C_{2,5} = C_{1,5} + 6\varepsilon; \quad C_{2,9} = C_{1,9} + 2\varepsilon; \quad C_{2,11} = C_{1,11} + 4\varepsilon.$$

Здесь коэффициент $\varepsilon = d_2(3C_{1,1} + 12C_{1,3} + 10C_{1,9}) + d_4(4C_{1,5} + 6C_{1,11})$. При S -скрещивании коэффициент $C_{2,0}$ сохраняет свое значение, равное $C_{1,0}$, следовательно, инвариант изоморфизма результирующего графа $I(C_{2,i}) = C_{1,0}$.

Задача решена.

4.12. Метод P -скрещивания графов

Суть метода состоит в том, что если существует некоторая подстановка $g(x)$, такая, что выполняется тождество $\pi_1(x, y) \equiv \pi_2(g(x), y)$, то следует считать, что граф, соответствующий полиному $\pi_2(\bar{x}, y)$, получен из графа, соответствующего полиному $\pi_1(x, y)$, посредством P -скрещивания. Здесь $\bar{x} \equiv g(x)$. Аналогично можно получить этим способом новую структуру графа с полиномом $\pi_2(x, \bar{y})$. В связи с этим различают варианты P_x -преобразования и P_y -преобразования.

Существует правило, согласно которому полином $I(C_{i,j})$ считается инвариантом P -изоморфизма, если он принимает одно и то же значение для всех P -изоморфных между собой графов. Очевидно, что если полином $I(C_{i,j})$ относится одновременно к инвариантам двух изоморфизмов (P_x - и P_y -соответственно), то он же является общим инвариантом изоморфизма графов с полиномами $\pi_2(\bar{x}, y)$, $\pi_2(x, \bar{y})$ и $\pi_2(\bar{x}, \bar{y})$ соответственно, т. к. его полином принимает одно и то же значение при любой подстановке $g(x)$.

Представляет интерес вариант, когда исходный граф является симметрическим, т. е. для него $\pi(x, y) = \pi(y, x)$. Такой граф можно представить полиномиально следующим образом:

$$\pi(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i(x)y^i. \quad (4.91)$$

А в силу симметричности его же можно записать в виде

$$\pi(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i(y)x^i. \quad (4.92)$$

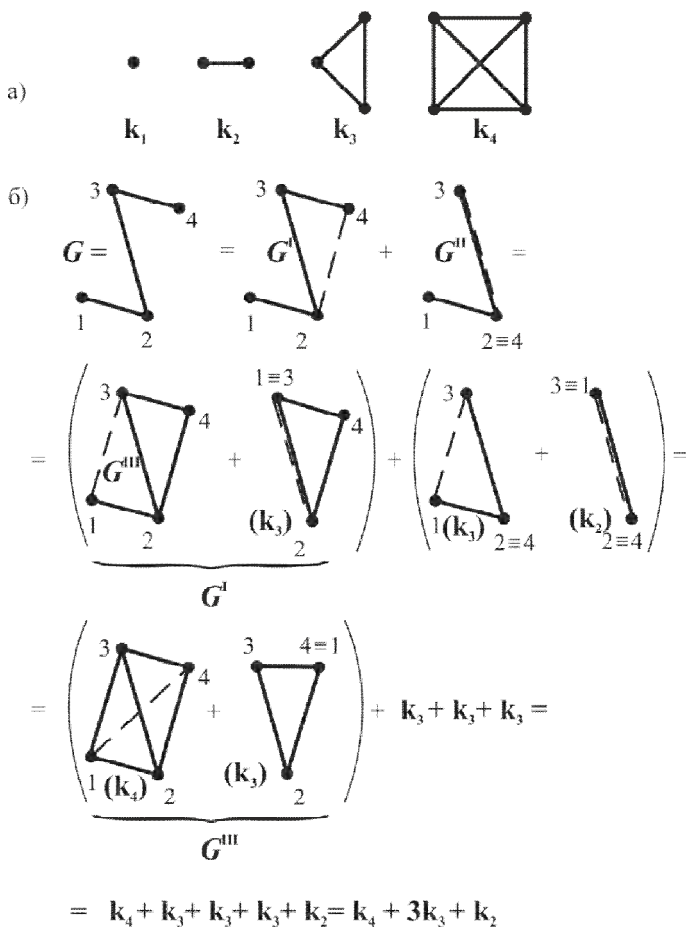
Поэтому $C_i(x) \equiv C_i(y)$. Для такого графа число единичных и двоичных значений каждой из функций $\pi(x)$, $\pi(y)$, $\pi(x, y)$, $\pi(y, x)$ в отдельности являются инвариантами изоморфизма, однако не все из них являются независимыми.

Симметрический граф удобно использовать при приведении результирующего графа к собственной исходной структуре с замкнутыми циклами, петлями и где отсутствуют висячие вершины. Если результирующий граф имеет симметрический вид, это позволяет судить о моделируемом процессе (в частности, если речь идет об отходообразовании) с позиций балансных или минимаксных отношений. Это означает возможность использования количественных методов анализа.

4.13. Хроматический полином графа

Задача о раскраске вершин графа. Состоит в том, чтобы вычислить число способов, при которых вершины графа могут быть правильно раскрашены в x цветов. Это и есть искомый полином $P(G, x)$ – это количество способов, которыми можно раскрасить граф G , если у нас число красок x . Правильность раскраски определяется показателем – две смежные вершины не должны иметь один цвет.

Хроматическую редукцию (понижение ранга графа) можно делать двояко – повышением ранга вершин до полного графа и понижением ранга вершин до пустого графа.



а) полный граф n -й степени; б) алгоритм управления

Рисунок 4.13 – Управление хроматическим графом методом повышения ранга вершин

1. Выполняем хроматическую редукцию методом повышения ранга вершин. Вначале определим ранг полного графа (рис. 4.13, а) k_i , где $i=1,1,\infty$.

Для управления хроматическим графом воспользуемся теоремой о ранжировании вершин графа, согласно которой полином $P(G, x)$, отражающий число вариантов раскраски графа G числом возможных цветов из имеющихся (заданных) x , представляется в виде суммы двух полиномов:

$$P(G, x) = P_1(G_1, x) + P_2(G_2, x), \quad (4.93)$$

где граф G_1 отличается от исходного графа G добавлением к последнему одной дуги, а граф G_2 отличается объединением (склеиванием) вершин, инцидентным добавленной дуге (рис. 4.13, б).

На первом этапе мы добавляем к начальному графу дугу (2, 4) и объединяем вершины 2 и 4 в соответствии с теоремой (4.93). Получаем промежуточные графы G^I и G^{II} . На втором этапе, работая с графом G^I , добавим к нему дугу (1, 3) и склеим вершины 1 и 3. Получим графы G^{III} и k_3 – полный граф. Работая подобным образом с графом G^{II} , добавляем к нему дугу (1, 3) и, склеивая вершины 1 и 3, получаем еще два полных графа k_3 и k_2 . На третьем этапе, работая с графом G^{III} , добавляем дугу (1, 4) и объединяем вершины 1 и 4, получаем еще два полных графа k_4 и k_3 . Таким образом, окончательное приведение исходного графа к сумме полных графов (см. 4.13, б) дает следующее уравнение:

$$G = k_4 + 3k_3 + k_2,$$

для которого, с учетом того, что хроматическое число полного графа рассчитывается как степенной факториал от числа заданных цветов (или состояний вершин графа, т. е. $k_i = x^{(i)} = x(x-1)(x-2) \dots (x-i)$). В этом случае возможное

число вариантов раскраски графа при наличии исходных x цветов можно определить как

$$P(G, x) = x(x-1)(x-2)(x-3) + 3x(x-1)(x-2) + x(x-1). \quad (4.94)$$

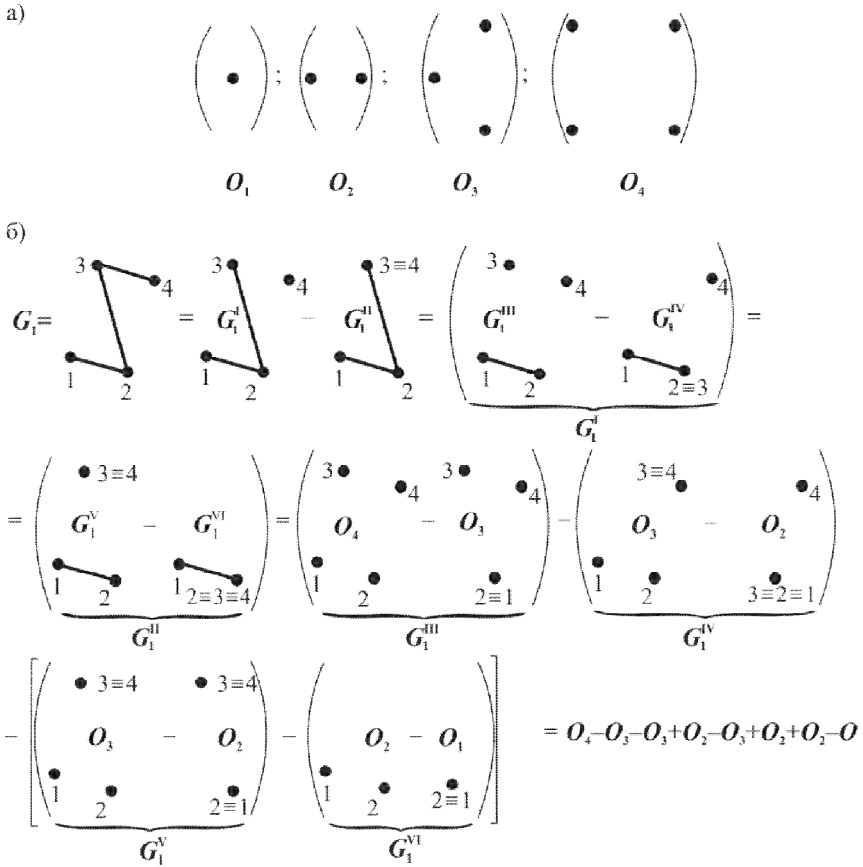
Допустим $x = 2$. Тогда расчетным путем получим $P(G, x) = 2$. Иными словами, если нам даны две краски, то граф G может быть раскрашен двумя равнозначными способами. Если $x = 3$, то исходный граф может быть раскрашен $P(G, x) = 24$ способами. И т. д.

2. Второй способ расчета может быть построен от обратного. Уравнение (4.93) запишем в тождественном виде:

$$P_1(G_1, x) \equiv P(G, x) - P_2(G_2, x). \quad (4.95)$$

Это означает, что на каждом последующем этапе от исходного графа G_1 отнимается одна дуга и от полученного графа вычитается граф, у которого склеиваются вершины, инцидентные отнятой дуге. Предварительно дадим понятие ранга пустых графов (рис. 4.14, а), как O_i , где $i = 1, 1, \infty$.

Алгоритм решения задачи следующий. На первом этапе (см. рис. 4.14, б) от исходного графа G_1 отнимаем дугу (3, 4) и склеиваем вершины 3 и 4. Получаем графы G_1^I и G_1^{II} . На втором этапе от графа G_1^I отнимаем дугу (2, 3) и склеиваем вершины 2 и 3. Получаем новую пару графов G_1^{III} и G_1^{IV} . Здесь же на графе G_1^{II} убираем ребро (2, 3) и склеиваем вершины (3 \equiv 4) и 2. Получаем новые графы G_1^V и G_1^{VI} . И на третьем этапе работаем с графами G_1^{III} , G_1^{IV} , G_1^V и G_1^{VI} , не забывая при этом о знаках сложения и вычитания между скобками (см. рис. 4.14, б). Вначале из графа G_1^{III} убираем дугу (1, 2) и склеиваем соответствующие вершины.



а) пустые графы; б) алгоритм управления

Рисунок 4.14 – Управление хроматическим графом методом понижения ранга вершин

Получаем пустые графы O_4 и O_3 . Из графа G_1^{IV} убираем дугу $(1, (2 \equiv 3))$ и склеим соответствующие вершины 1 и $2 \equiv 3$. Получим еще два пустых графа O_3 и O_2 . Соответствующие операции ликвидации дуг $(1, 2)$ и $((1, (2 \equiv 3 \equiv 4)))$

соответственно для графов G_1^V и G_1^{VI} и склеивание участвующих в этом вершин дают нам еще четыре пустых графа.

Еще раз запишем все пустые графы (см. рис. 4.14, б) следующим образом:

$$G_1 = O_4 - O_3 - O_3 + O_2 - O_3 + O_2 + O_2 - O_1 = O_4 - 3O_3 + 3O_2 - O_1.$$

Для пустых графов число вариантов раскраски определяется степенной зависимостью вида $O_i = x^i$, где $i = 1, 1, \infty$. Тогда формулу для расчета вариантов раскраски исходного графа, исходя из допустимого числа красок x , представим следующим образом:

$$P_1(G_1, x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x. \quad (4.96)$$

В целом уравнения (4.94) и (4.96), полученные этими двумя способами, тождественны и должны давать одинаковый результат. Например, при $x = 2$ имеем $P_1(G_1, 2) = 2$, а при $x = 3$ имеем $P_1(G_1, 3) = 81 - 81 + 27 - 3 = 24$. Таким образом, два алгоритма расчета вариантов раскраски исходного графа являются идентичными.

Следует отметить, что под раскраской графа может пониматься целый комплекс задач самого разного уровня, где вершины графа имеют некоторые параметры, с условием, чтобы смежные из них не были изоморфными. Например, технология обработки металла требует, чтобы после каждой операции параметры изделия изменялись в определенном направлении. Если такую операцию изобразить в виде графа, то можно решать задачу присвоения каждой последующей операции функции, отличной от предыдущей. Это фактически задача на раскраску графа.

4.14. Алгоритм Дейкстры

Дейкстра Эдсгер Виб (Dijkstra Edger Wybe, 1930 – 2002 гг.) родился в Роттердаме (Нидерланды). Известный ученый-программист, перу которого принадлежат разработки на многих компьютерных языках, например, широко известный в теории программирования Си++ и, в частности, алгоритм (1959 г.) поиска кратчайшего пути между вершинами произвольного графа. На основании алгоритма Дейкстры решены многие задачи в логистике. Он применяется для программирования широкого круга задач в топологии.

Алгоритм Дейкстры, общий вид блок-схемы которого приведен на рис. 4.15, состоит в присвоении временных меток (T^n) для вершин графа, которые потом на условиях минимума весовой функции P_{ij} соответствующих ребер (x_i, x_j) становятся постоянными.

Каждая новая метка вершины x_j определяется по формуле

$$T^n(x_j) = \min \{T^s(x_i)P_{ij} + T^{\text{const}}(x_i)\}, \quad (4.97)$$

где: $T^s(x_i)$ – старая временная метка вершины x_i ;

$T^{\text{const}}(x_i)$ – постоянная метка вершины x_i ;

P_{ij} – весовая функция ребра (x_i, x_j) .

Для реализации алгоритма необходимо выполнить два обязательных условия.

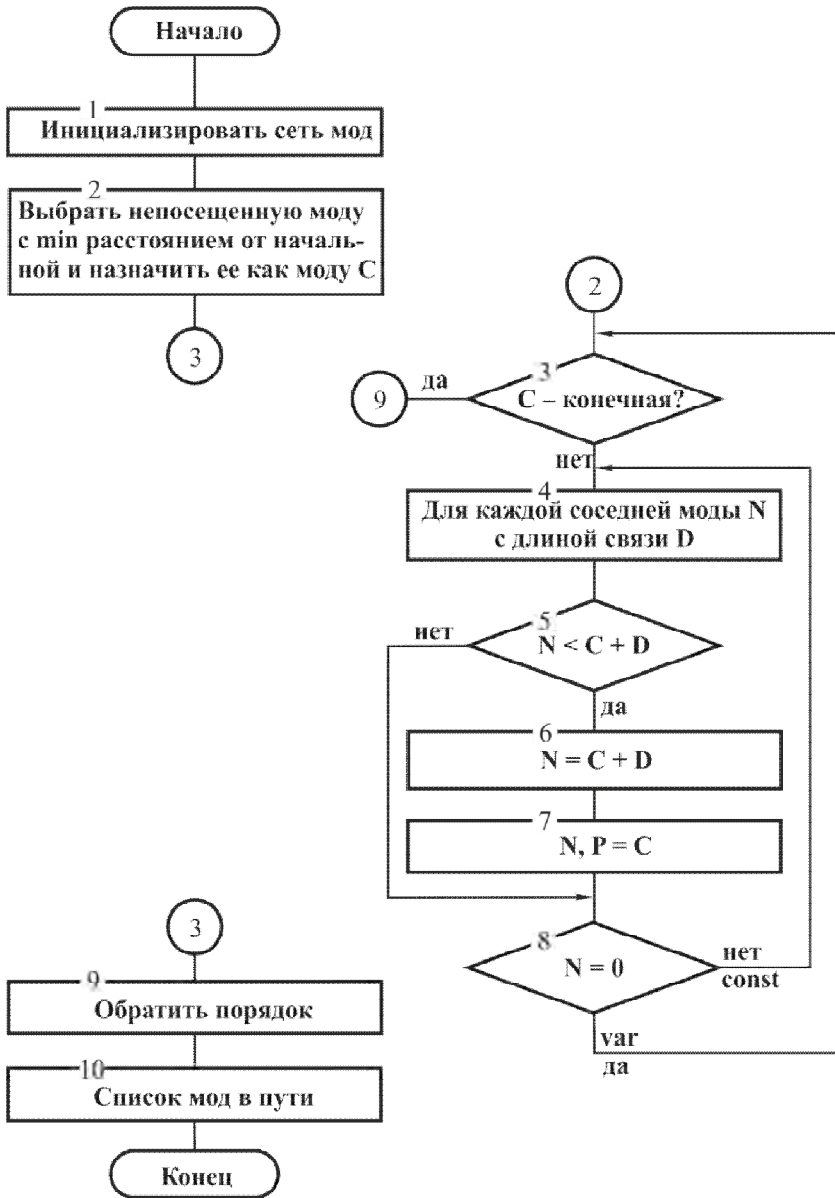


Рисунок 4.15. – Блок-схема алгоритма Дейкстры

Условие 1: только наименьшая из всех меток может становиться постоянной меткой. Пошаговые операции осуществляются до тех пор, пока все вершины не получают постоянные метки. При этом величина метки каждой последующей вершины определяется по формуле:

$$T^n(x_j) = T^{\text{const}}(x_i) + P_{ij}. \quad (4.98)$$

Т. е. каждая метка последующей вершины равна метке предыдущей постоянной вершины, сложенной с весовой функцией сопряженного к ним ребра.

Условие 2: расчетная метка вершины на данном шаге не может быть больше или равна метке этой же вершины на предыдущем шаге. Если это так, то этой вершине присваивается метка предыдущего шага.

Алгоритм Дейкстры применим к большому количеству типовых задач, в том числе к хроматическим. Нужно отметить, что подобный порядок расчета легко формализуется и программируется.

Рассмотрим это на нескольких примерах.

Задача 1. Найти кратчайший путь между вершинами. Имеется взвешенный ориентированный граф (рис. 4.16).

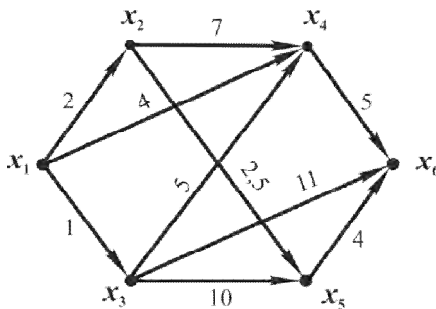


Рисунок 4.16 – Граф произвольной формы для расчета расстояний между вершинами по алгоритму Дейкстры

Подобный граф имеет свой исток (вершина x_1 , откуда начинается граф) и сток (вершина x_6 , куда сходятся последние ребра). Мы воспользуемся алгоритмом Дейкстры, который позволяет удобно найти расстояние от x_1 до остальных вершин. Порядок графа у нас равен 6 – это количество вершин, а размер графа равен 10 – это количество его ребер.

Задача сводится к присвоению постоянных меток вершинам графа, которым пока мы будем присваивать некоторые временные метки.

В упрощенном виде подробная последовательность реализации алгоритма следующая.

Выписываем все вершины графа в следующем виде:

$$[x_1] \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6$$

И далее пошагово.

Шаг 1:

$$\begin{array}{cccccc} [x_1] & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ [0] & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{array}$$

Вершину x_1 сразу назовем вершиной с начальной постоянной меткой (будем обозначать постоянные метки квадратными скобочками). Этой вершине присваиваем по умолчанию 0 (расстояние от вершины к ней же самой). Остальные метки обозначим бесконечностями по умолчанию (как недостижимые пока до вершины x_6).

Шаг 2:

$$\begin{array}{cccccc} [x_1] & x_2 & [x_3] & x_4 & x_5 & x_6 \\ [0] & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ [0] & 0 + 2 = 2 & 0 + 1 = [1] & 0 + 4 = 4 & \infty & \infty \\ & (2 < \infty) & & & & \end{array}$$

Ребра, исходящие из вершины x_1 с постоянной меткой, направлены к вершинам x_2, x_3 и x_4 . Далее следуем правилу определения расстояния между вершинами: к метке минимального расстояния к предыдущей постоянной вершине прибавляем расстояние до каждой последующей вершины. Например, до вершины x_2 сейчас временная метка равна $0 + 2 = 2$. Причем эту метку можно писать тогда и только тогда, когда она меньше, чем ее значение на предыдущем шаге (см. условие 2). У нас метка при x_2 на первом шаге равна ∞ , поэтому на следующем шаге пишем $2 < \infty$. Метку при x_1 на этом шаге просто снесем вниз (повторяем).

Из полученных числовых значений текущих меток выбираем минимальное на этом шаге. Оно и будет для нас новой меткой. В нашем случае это число «1», а статус постоянной присваиваем соответствующей вершине $[x_3]$. Это число («1») и будет минимальным расстоянием от вершины x_1 к вершине x_3 .

Шаг 3:

$[x_1]$	$[x_2]$	$[x_3]$	x_4	x_5	x_6
[0]	∞	∞	∞	∞	∞
[0]	2	[1]	4	∞	∞
[0]	[2]	[1]	$1 + 5 = 6$	$1 + 10 = 11$	$1 + 4 = 5$
			$(6 > 4)$	$(11 < \infty)$	$(5 < \infty)$

От следующей постоянной вершины x_3 можно попасть в вершины x_4, x_5, x_6 . Принцип присваивания последующих меток остается неизменным: к постоянной вершине со своей меткой добавляем весовую функцию ребра, соединяющего эту постоянную вершину с новой вершиной, и делаем эту

сумму новой меткой при этой вершине. Здесь метка «б» не проходит, так как она больше предыдущей метки «4». В остальных случаях это условие соблюдается. В последней строке опять ищем минимальную метку – «2». Она становится новой меткой, а вершина x_2 – постоянной.

Шаг 4:

$[x_1]$	$[x_2]$	$[x_3]$	$[x_4]$	x_5	x_6
[0]	∞	∞	∞	∞	∞
[0]	2	[1]	4	∞	∞
[0]	[2]	[1]	(4)	11	5
[0]	[2]	[1]	$2 + 7 = 9$	$2 + 2,5 = 4,5$	5
			$(9 > [4])$	$(4,5 < 11)$	

Теперь опорная вершина x_2 . Из нее можно попасть к вершинам x_4 и x_5 . Опять пользуемся правилом сложения метки последней постоянной вершины и веса ребра, связывающего эту вершину с последующей. Здесь новая сумма при вершине x_4 – $(2 + 7 = 9) > 4$. Поэтому по правилу (условие 2) записываем ее как предыдущую метку «4». Она и будет минимальной в новом ряду. А ее сопряженной вершине x_4 присваивается статус постоянной.

Шаг 5:

$[x_1]$	$[x_2]$	$[x_3]$	$[x_4]$	$[x_5]$	x_6
[0]	∞	∞	∞	∞	∞
[0]	2	[1]	4	∞	∞
[0]	[2]	[1]	(4)	11	5
[0]	[2]	[1]	[4]	4,5	5
[0]	[2]	[1]	[4]	[4,5]	$4 + 5 = 9$
					$(9 > 5)$

Теперь x_4 является последней постоянной вершиной. К ней примыкает только вершина x_6 . Новая сумма при вершине x_6 $4 + 5 = 9 > 5$. Поэтому при вершине x_6 оставляем предыдущую метку «5», как меньшую. Поскольку других ходов для вычислений нет, к остальным меткам сносим их верхние значения. Из двух значений меток («4,5» и «5») выбираем минимальную «4,5» и делаем ее вершину x_5 новой постоянной.

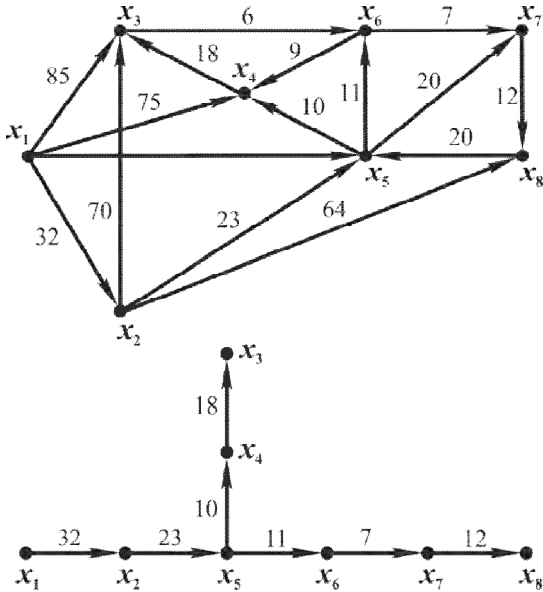
Шаг 6. Из постоянной вершины x_5 движение может быть только к вершине x_6 . По правилу суммирования получаем новую метку при вершине x_6 , равную $4,5 + 4 = 8 > 5$.

$[x_1]$	$[x_2]$	$[x_3]$	$[x_4]$	$[x_5]$	x_6
[0]	∞	∞	∞	∞	∞
[0]	2	[1]	4	∞	∞
[0]	[2]	[1]	(4)	11	5
[0]	[2]	[1]	[4]	4,5	5
[0]	[2]	[1]	[4]	[4,5]	5
[0]	[2]	[1]	[4]	[4,5]	$4,5 + 4 = 8$ ($8 > [5]$)

$[x_1]$	$[x_2]$	$[x_3]$	$[x_4]$	$[x_5]$	$[x_6]$
[0]	∞	∞	∞	∞	∞
[0]	2	[1]	4	∞	∞
[0]	[2]	[1]	(4)	11	5
[0]	[2]	[1]	[4]	4,5	5
[0]	[2]	[1]	[4]	[4,5]	5
[0]	[2]	[1]	[4]	[4,5]	[5]

Итог. Таким образом, мы получаем полную матрицу расстояний между постоянными вершинами исходного графа и кратчайшие расстояния между ними в виде постоянных меток. Так, например, кратчайшее расстояние между вершинами x_1 и x_6 равно 5. Но при этом нам известны все расстояния между вершинами графа.

Задача 2 (www.Matbuco.ru). Найти кратчайшие пути в орграфе (рис. 4.17) от первой вершины ко всем остальным, используя алгоритм Дейкстры. Построить дерево кратчайших путей.



а) исходный граф; б) дерево кратчайших путей

Рисунок 4.17 – Ориентированный взвешенный граф и кратчайшие пути в нем по алгоритму Дейкстры

Решение.

Шаг 1. Начальной вершине заранее присваиваем метку $T^{\text{const}}(x_1) = 0$. Остальным вершинам присваиваем метки (∞) , понимая их недостижимость на первом этапе (табл. 4.1)

Таблица 4.1

Шаги	Вершины								x_i	$T^{\text{const}}(x_i)$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	(0)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	x_1	(0)
2		(32)	85	75	57	∞	∞	∞	x_2	(32)
3			85	75	(55)	∞	∞	96	x_3	(55)
4			85	(65)		66	75	96	x_4	(65)
5			83			(66)	75	96	x_5	(66)
6			83				(73)	96	x_6	(73)
7			(83)					85	x_7	(83)
8								(85)	x_8	(85)

Шаг 2. Найдем для постоянной вершины x_1 сопряженные с ней x_2, x_3, x_4 . По указанным правилам определяем их метки: $T^n(x_2) = 0 + 32 = 32$; $T^n(x_3) = 0 + 85 = 85$; $T^n(x_4) = 0 + 75 = 75$. Минимальную вершину x_2 с постоянной меткой $T^n(x_2) = T^{\text{const}}(x_2) = 32$ в таблице 4.1 записываем в скобках.

Шаг 3. Определяем сопряженные вершины для новой постоянной вершины x_2 . Это x_3, x_5, x_8 . Рассчитаем их метки по формуле (4.98) и выберем минимальную. Это $T^n(x_3) = 32 + 70 = 102 > 85$ (принимаем старую вершину с меткой 85); $T^n(x_5) = 32 + 23 = 55$; $T^n(x_8) = 32 + 64 = 96$.

Выбираем вершину x_5 с минимальной меткой $T^n(x_5) = T^{\text{const}}(x_5) = 55$ и делаем ее следующей вершиной с постоянной меткой.

Шаг 4. Для постоянной вершины x_5 сопряженными будут вершины x_4 , x_6 и x_7 . Новые метки для этих вершин определяются как $T^n(x_4) = 55 + 10 = 65$; $T^n(x_6) = 55 + 11 = 66$; $T^n(x_7) = 55 + 20 = 75$. Присваиваем вершине x_4 постоянную метку $T^n(x_4) = T^{\text{const}}(x_4) = 65$, как минимальной из ряда по шагу 4.

Шаг 5. Опять ищем сопряженные вершины для новой постоянной вершины x_4 . Это единственная вершина x_3 для которой $T^n(x_3) = 65 + 18 = 83$. Все другие вершины на шаге 5 сносятся с шага 4. Из них минимальной по метке становится постоянная вершина x_6 с меткой $T^n(x_6) = T^{\text{const}}(x_6) = 66$.

Шаг 6. Определяем смежные вершины к последней из постоянных вершин – x_6 , а именно, x_4 и x_7 . Их временные метки: $T^n(x_4) = 66 + 9 = 75 > 65$ (значит, принимаем предыдущую метку) и $T^n(x_7) = 66 + 7 = 73$. Остается одна метка с вершиной x_7 , которую и выбираем как минимальную с $T^n(x_7) = T^{\text{const}}(x_7) = 73$.

Шаг 7. Для новой постоянной вершины x_7 сопряженной будет только вершина x_8 , у которой $T^n(x_8) = 73 + 12 = 85$. Из всех снесенных вершин на этом шаге минимальная метка принадлежит вершине x_3 , где $T^n(x_3) = T^{\text{const}}(x_3) = 83$. Эта вершина и будет постоянной.

Шаг 8. Для вершины x_3 сопряженной будет только вершина x_6 , которая уже имеет статус постоянной метки.

Поэтому берем оставшуюся вершину x_8 с временной меткой и присваиваем ей статус постоянной вершины с меткой $T^n(x_8) = T^{\text{const}}(x_8) = 85$.

Таким образом, в таблице 4.1 отражены кратчайшие пути между всеми постоянными вершинами исходного графа, полученные расчетным путем. По этим данным легко построить дерево кратчайших путей, состоящее из ребер (x_1, x_2) , (x_2, x_5) , (x_5, x_4) , (x_4, x_3) , (x_5, x_6) , (x_6, x_7) , (x_7, x_8) . Дерево обозначено на рис. 4.17, б.

Алгоритм Дейкстры легко сочетается с другими формализованными операциями над графами, в частности, с операциями над хроматическими графами. Исключение составляют графы с отрицательными и случайными весовыми функциями, где отсутствует принятая в расчете логика последовательности операций.

Вопросы для самопроверки

1. На чем основаны операции над графами? Перечислить известные операции над графами.
2. Что подразумевается под операцией объединения двух графов? Записать формулу объединения двух графов.
3. Привести примеры объединения двух графов. Начертить схему таких объединений.
4. Привести пример объединения неполного и дополненного до полного графов.
5. Дать понятие пересечения двух графов. Написать формулу пересечения двух графов. Привести примеры.
6. В чем заключается коммутативность операции пересечения двух графов?
7. В чем суть пересечения неполного и дополненного к нему графа? Показать физический смысл такой операции. Привести примеры.

8. Дать понятие разности (вычитания) двух графов. Привести примеры.
9. Записать общую формулу разности двух графов. Физический смысл операции вычитания графов.
10. Дать понятие произведения графов. Привести формулу произведения двух графов.
11. Представить алгоритм операции произведения двух графов.
12. В чем суть произведения неполного и дополненного до полного графов? Привести примеры.
13. Записать уравнение и привести геометрическую интерпретацию возведения графа в квадрат.
14. Дать представление о декартовом произведении двух графов. Записать алгоритм операции декартового произведения.
15. Привести примеры декартового произведения двух графов.
16. Дать определение декартового, кронекерового (тензорного) и полудекартово-кронекерового произведений двух графов.
17. Лемма о частности графов в декартовых произведениях.
18. Показать суть декартового произведения двух графов на полном объеме заданности исходных данных
19. Представить алгоритм декартового произведения двух графов на полном объеме заданности исходных данных и его геометрическую интерпретацию.
20. Привести примеры декартового произведения двух графов на полном объеме заданности исходных данных.
21. Пояснить физический смысл декартового произведения двух графов на полном объеме заданности исходных данных.
22. На чем основан принцип преобразования случайных графов?

23. Записать уравнения для анализа структур случайных графов в качестве управляющих.

24. Почему в случайных графах невозможно применение формализованных операций, как с простыми графами?

25. Дать понятие гомеоморфности графа.

26. Дать представление о ϕ -морфизме графа. Физический смысл ϕ -морфизма графов.

27. В чем заключается суть метода ϕ -преобразований графа?

28. В чем заключается роль суперпозициональности при операциях ϕ -преобразований орграфа?

29. Привести примеры ϕ -преобразований орграфов. Представить их геометрическую интерпретацию.

30. Записать условие адекватности для ϕ -преобразований графовых структур.

31. Привести примеры реализации метода исключения Гаусса. В чем суть этого метода?

32. Дать понятие висячей вершины графа.

33. Как определяются весовые функции в матрице инцидентности графа?

34. В чем суть изоморфных преобразований графов? Их физический смысл и геометрическая интерпретация.

35. Дать понятие изоморфности двух графов с позиций их преобразуемости. Написать формулу изоморфизма двух графов.

36. Что такое S -изоморфизм?

37. Дать понятие метода S -скрещивания двух графов. Привести пример реализации этого метода.

38. Дать понятие метода P -скрещивания двух графов. Назвать условия реализации этого метода.

39. В каком случае полином $I(C_{i,j})$ считается инвариантом P -изоморфизма?

40. Решить задачу о раскраске вершин графа.

41. Что такое хроматическая редукция графа?

42. Доказать теорему о ранжировании вершин графа.
43. Привести примеры хроматической редукции графа.
44. В чем заключается метод понижения ранга вершин графа? Привести его геометрическую интерпретацию.
45. Алгоритм Дейкстры. Его блок-схема. Для чего применяется?
46. Условие существования постоянной метки в алгоритме Дейкстры. Как определяется каждая последующая метка в алгоритме Дейкстры?
47. Решение задачи поиска кратчайшего пути между вершинами графа методом Дейкстры.

Библиографический список к четвертой главе

1. Волошин В. С. Методы управления ресурсопотоками в экологических циклах / В. С. Волошин, П. М. Семенченко. – Донецк : Донеччина, 1997. – 71 с.
2. Хоменко Н. П. Полудеклартово-кронекерovo произведение графов / Н. П. Хоменко, В. А. Кузьменко // Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе : тематич. сб. – Канев, 1974. – С. 373–381.
3. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника. – М. : Мир, 1981. – 323 с.
4. Хоменко Н. П. Метод-перетворення та деякі його застосування/ Н. П. Хоменко //φ-перетворення графів : тематич. сб. – К. : Вид. інститута математики АН УРСР, 1973. – С. 35–93.
5. Хоменко Н. П. Некоторые свойства φ-преобразований / Н. П. Хоменко, Н. В. Лысенко. – Киев : Препринт ин-та математики АН УССР, 1977. – 36 с.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
7. Джалилова З. А. Модели воспроизводства и обмена на графе / З. А. Джалилова // Математические модели экономической динамики. – Вильнюс, 1982. – С. 42–48.

8. Сергеева Л. И. Исследование свойств векторных задач на графах: разрешимость, сложность, вырожденность : автореф. канд. дисс. / Л. И. Сергеева. – Запорожье, 1996. – 24 с.

9. Малов К. М. Об S -изоморфизме орграфов / К. М. Малов, Н. А. Бариева // Труды Московского энергетического института. – 1980. – Вып. 499. – С. 101–110.

5. Методика управления материальными потоками в производственных системах

Методология управления структурными формами материальных потоков в производственных системах, независимо от их физического содержания, предусматривает логически обусловленное преобразование этих форм с целью прогнозирования их развития, оптимизации структуры либо достижения иных эффективных состояний.

При описании методологии мы будем придерживаться обобщенной терминологии, без лишней конкретизации, с тем, чтобы сделать ее более универсальной и доступной для понимания. Далее, в примерах решаемых задач, эта терминология будет конкретизирована в том направлении, в котором читателю были понятны логические построения, относящиеся к конкретному разделу методики.

Рассматриваемый метод заключается в формализации структуры производственной системы, включая собственно ресурсопотоки и формы воздействия на них, в виде совокупности графов, описывающих их отдельные сопоставляемые характеристические стороны, с целью последующего формального же изменения содержания результирующих графов посредством известных и новых методов графопреобразований. Полученное в результате многообразие новых формализованных структурных графопостроений, содержащих в своей основе характеристики первоначальных технологий и других форм воздействия на материальные потоки, подлежит логически-смысловому анализу и формированию оптимальных вариантов распределения, перемещения и других способов управления ресурсами.

Порядок синтезирования материальных потоков, описываемых в рамках производственных систем графами, включает следующие этапы.

1. Расчленение функции воздействия на ряд фундаментальных иерархически связанных подфункций.

2. Выбор структуры элементов для реализации этих подфункций.

3. Систематизация промежуточных значений $\{x_i\}$ состояний компонента a_k материального потока по их значимости.

4. Выбор способов формального изменения (синтезирования) функций структурных связей данного метода воздействия на поток.

5. Синтезирование новых графопостроительных форм, отражающих отдельные формализованные структурные связи в управляемой системе.

6. Логически-смысловой сопоставительный анализ полученных графовых форм с целью выделения оптимальных, функциональных и др. структур с точки зрения правил синтеза и технологической совместимости.

Следует различать промежуточные состояния отдельных компонентов материального потока, участвующего в технологическом процессе: фиксированные на p -м этапе синтеза; и нефиксируемые в графопостроении. При синтезировании графов существует возможность переводить параметры фиксированных промежуточных состояний в нефиксируемые. Например, для

$$\varphi_1 : a_{i-1} \rightarrow a_i \text{ и } \varphi_2 : a_i \rightarrow a_{i+1} , \quad (5.1)$$

с учетом нефиксируемости состояния a_i при производстве синтезированной функции трансформации ресурса получим

$$\varphi : a_{i-1} \rightarrow a_{i+1} . \quad (5.2)$$

При этом, необходимо, чтобы выполнялось условие непрерывности параметров x_i для a -го компонента

$$a_k \rightarrow \{x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{ki}, \dots, x_{kn}\}. \quad (5.3)$$

Отсюда следует одно из важнейших правил синтезирования оргграфов.

Утверждение 1. При синтезировании функций воздействия на материальные потоки на k -й стадии расчленения осуществим перевод фиксированных состояний компонентов в нефиксируемые, если соблюдается условие непрерывности параметров этих состояний в некотором интервале.

Действительно, если состояние компонентов a_i фиксировано для функций трансформации φ_1 и φ_2 в (5.1) и при синтезировании данного графопостроения мы нашли некоторую новую, оптимальную функцию φ , обеспечивающую переход (5.2), то изолированная вершина a_i результирующего графа может быть опущена из анализа, как нефиксируемая в новом технологическом процессе при условии (5.2).

Вторым правилом синтезирования является правило тождественности.

Утверждение 2. Функциональная структура синтезируемых графов на k -м этапе расчленения технологически тождественна функциональной структуре этих графов на $k+1$ -м этапе расчленения, т. е.

$$\varphi_i^k : \{x_i^k\} \rightarrow \{y_i^k\} \overset{T}{\infty} \varphi_i^{k+1} : \{x_i^{k+1}\} \rightarrow \{y_i^{k+1}\} \quad (5.4)$$

или, что равнозначно

$$F_q^{k-1} \rightarrow \{F_{q1}^{k-1}, F_{q2}^{k-1}, \dots, F_{qn}^{k-1}\} \overset{T}{\infty} f_q \rightarrow \{f_{q1}^k, f_{q2}^k, \dots, f_{qn}^k\}. \quad (5.5)$$

Любая конкретная функция трансформации некоторого ресурса может быть реализована при помощи различных технологически тождественных структур, в том числе синтезированных.

Правилами синтезирования устанавливаются также условия формирования новых функций трансформации материальных потоков в производственных системах, их совместимость, преемственность и сопоставительная эффективность существующих и синтезированных функций по заранее прогнозируемым или нормативным параметрам.

Утверждение 3. Исходная и конечная вершины синтезируемого графа на k -м этапе расчленения должны быть единственно фиксированными. Промежуточные вершины могут быть явно нефиксированными.

Для некоторого графа $G(G^0, G')$, описывающего систему в совокупности качественных и количественных характеристик технологического процесса и природной окружающей среды, весовые функции вершин $g(G^0)$ и дуг $g(G')$ определяются в зависимости от структуры модели, описывающей процесс и набор используемых функций. В общем случае, при последовательном расположении элементов искомого графа, весовые функции вершин и дуг могут быть определены как

$$g(G^0) = \max a_i, \quad i = 1(1)m, \quad (5.6)$$

$$g(G') = \sum_{i=1}^m (a_i a_{i'}), \quad i, i' = 1(1)m, \quad (5.7)$$

а при параллельном расположении

$$g(G^0) = \frac{a_i \times \max(a_{i'}, a_{i'+j})}{a_i + \max(a_{i'}, a_{i'+j})}, \quad i, i' = 1(1)m; j = 1(1)n \quad (5.8)$$

$$g(G') = \max(a_i, a_{i'}), \quad i, i' = 1(1)m. \quad (5.9)$$

Отсюда имеем следующие положения, определяющие степень достижения прогнозируемого уровня управляемости ресурсопотоками в рамках данной производственной системы.

1. Критерием эффективности синтезированной функциональной структуры является следующее:

1.1. Для характеристической функции $\varphi_a(G)$, соответствующей числу односторонних дуг в графе G , должно выполняться условие

$$\min_{G \in T} \varphi_a(G), \quad (5.10)$$

где $T \rightarrow \{G\}$ – множество допустимых графов (из рассматриваемых в системе).

1.2. Для характеристической функции $\varphi_a(G)$, соответствующей числу промежуточных нефиксированных вершин в графе G , должно выполняться условие

$$\min_{G \in T, a_i \in G} \varphi_{a_i}(G). \quad (5.11)$$

2. Критериями эффективности синтезированной временной структуры функций могут являться:

2.1. Минимальная сумма продолжительности отношений между элементами

$$\min \sum_{i=1}^n t_i. \quad (5.12)$$

2.2. Минимальные потери времени на несовмещение начала параллельных функций

$$\min \sum_{j=1}^m \tau_j. \quad (5.13)$$

2.3. Одновременное (параллельное) выполнение функций вместо последовательного, т. е. функционал

$$\Phi_{i-1} \cap \Phi_i \text{ вместо } \Phi_{i-1} \cdot \Phi_i. \quad (5.14)$$

3. Критериями эффективности синтезированной балансовой структуры функций графа являются следующие:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \text{const}, \quad (5.15)$$

$$\min \sum_{i=1}^n \varepsilon_i. \quad (5.16)$$

Утверждение 4 (правило совместимости). Способ воздействия Φ_i и состояние объекта a_i технологически совместимы

$$\Phi_i \overset{T}{\propto} a_i, \quad (5.17)$$

если технологические параметры $X = \{x_i\}$ состояния a_i могут быть получены из предыдущего состояния a_{i-1} при воздействии на объект по способу, описанному функцией Φ_i .

Действительно, если техническое обеспечение, определяющее способ воздействия на ресурс, не позволяет достичь

необходимого состояния этого ресурса a_i с заданными параметрами $X = \{x_i\}$, то такой способ не может быть приемлем для данного технологического процесса. В этом случае необходимы либо корректирующие функции (тогда совместимым следует считать способ воздействия на ресурс, объединяющий исходные и корректирующие функции), либо альтернативные способы, способствующие достижению поставленной цели.

Это правило следует применять на этапе логически-смыслового анализа полученных в результате синтезирования новых групповых структур.

Утверждение 5 (правило преемственности функций). Для производственной системы, состояние которой последовательно описывается параметрами $X^P = \{x_1^P, x_2^P, \dots, x_i^P, \dots\}$ и множество функций воздействий являются технологически преемственными Φ_i , если при реализации каждого из них уровень параметров состояния системы не снижается. Это записывается следующим образом:

$$\Phi_i : \{x_{i-1}\} \rightarrow \{x_i\} \xrightarrow{T} \Phi_i^T : \{x_{i-1}^T\} \rightarrow \{x_i^T\} \quad (5.18)$$

если при $x_{i-1} \Leftrightarrow x_{i-1}^T$, имеем $x_i \Leftrightarrow x_i^T$.

Это утверждение базируется на теории преобразования линейных графов и обосновывает фактическую возможность существования альтернативных методов реализации функций преобразования ресурсопотоков в рамках заданных состояний производственных систем, являясь предпосылкой для прогнозирования и создания перспективных в управлении систем. В следующей главе рассмотрим эти положения на конкретных примерах управления материальными потоками в производственных системах.

Вопросы для самопроверки

1. Какими правилами определяются возможности осуществления операций над графами?
2. Дать понятие объединения двух графов. Графическая интерпретация операции.
3. Привести формулу объединения двух графов.
4. Какие изменения претерпевают вершины и ребра объединяемых графов?
5. Привести примеры объединения двух графов.
6. Физический смысл операции «объединение двух графов».
7. Особенности объединения неполного и дополненного к нему графов.
8. Подлежат ли правилу объединения два случайных графа?
9. Правила выполнения операции по пересечению двух графов.
10. Привести формулу пересечения двух графов.
11. Что происходит с вершинами и ребрами двух графов при их пересечении?
12. Можно ли осуществить операцию пересечения двух изомерных графов?
13. Что происходит с пересеченным графом, если исходные графовые структуры не имеют вершины пересечения?
14. Коммутативный смысл операции пересечения двух графов.
15. Возможен ли случай пересечения неполного и дополненного к нему графов?
16. Дать понятие операции вычитания двух графов. Привести формулу вычитания.
17. Графическая интерпретация операции вычитания графов.

18. Правило вычитания графов.
19. Физический смысл операции вычитания графов.
20. Привести примеры вычитания двух графов.
21. Имеет ли смысл операция вычитания для дополненного и неполного графов?
22. В чем заключается операция перемножения двух графов?
23. Правило (алгоритм операции) перемножения двух графов.
24. Представить математическую запись операции перемножения двух графов. Графическая интерпретация операции перемножения двух графов.
25. Физический смысл операции умножения графов.
26. Вариант перемножения графов – неполного и дополненного к нему.
27. Дать понятие декартового произведения двух графов.
28. Физический смысл ребер и вершин результирующего графа при выполнении операции декартового произведения двух графов.
29. Правило (алгоритм операции) декартового произведения двух графов.
30. Графическая интерпретация декартового произведения двух графов.
31. Возможна ли операция декартового произведения для случая случайных графов, для случая неполного и дополненного к нему графов?
31. Роль изолированных вершин результирующего графа и их физический смысл.
32. Алгоритм декартового произведения двух графов, один из которых является неполным, а другой – дополненным к нему.

33. Как изменяется структура результирующего графа, построенного на базе операции декартового произведения неполного и дополненного к нему графов?

34. Дать понятие кронекероваго и полудекратово-кронекероваго произведения двух графов.

35. Записать формулы кронекероваго и полудекратово-кронекероваго произведений двух графов.

36. На основании чего применяется принцип суперпозициональности для декартовых произведений двух графов?

37. Что такое неполный объем заданности исходных данных при графопостроении?

38. Сформулировать правила (алгоритм) операции декартоваго произведения двух графов на неполном объеме заданности исходных данных.

39. Записать формулы графопреобразований для операции декартоваго произведения двух графов на неполном объеме заданности исходных данных.

40. Графическая интерпретация операции декартоваго произведения двух графов на неполном объеме заданности исходных данных.

41. Возможны ли операции декартоваго произведения двух графов на неполном объеме заданности исходных данных, если графы случайные, изомерные, неполные и др. ?

42. В чем заключается структурный анализ результирующих графопостроительных комбинаций при операции декартоваго произведения двух графов на неполном объеме заданности исходных данных?

43. Что такое сильнодекартоваго произведение двух графов?

44. Что такое операция лексикографического произведения двух графов?

45. Дать понятие операции декартоваго произведения графа самого на себя. Физический смысл этой операции. Яв-

ляется ли она аналогом операции возведения графа в степень?

46. Графическая интерпретация операции декартового произведения графа самого на себя.

47. Физический смысл операции декартового произведения графа самого на себя.

48. На чем основан математический аппарат операций со случайными графами?

49. Роль m -компонентности случайных графов при операциях над ними.

50. В чем заключается расчет по управлению структурами случайных графов?

51. В чем заключается суть метода φ -преобразований?

52. Дать понятие φ -морфизма.

53. Что такое условие взаимной гомеоморфности вершин и ребер графа?

54. Представить геометрическую интерпретацию метода φ -преобразований для графопостроительных структур.

55. Написать формулу для определения компонент связности исходного и результирующего графа. Пояснить ее значение.

56. Сформулировать условие адекватности φ -преобразований для композиций совокупных графовых структур, имеющих общую элементную или функциональную базу.

57. В чем заключается суть метода исключения Гаусса применительно к операциям над графами?

58. Что такое матрица инцидентности?

59. Как определяются весовые функции вершин и ребер в матрице инцидентности Гаусса?

60. В чем заключается условие изоморфности двух графов? Каким количественным показателем определяется изоморфность двух графов?

61. Что такое S -изоморфизм? Дать понятие S -изоморфному преобразованию графа.

62. В чем заключается метод S -скрещивания графов?

63. В чем заключается суть метода P -скрещивания графов?

64. В каких инженерных расчетах можно применять формализованные методы изменения графовых структур?

65. Изложить порядок синтезирования материальных потоков, описываемых графопостроительными моделями.

66. В чем заключается логически-смысловой сопоставительный анализ полученных графовых форм?

67. Что такое фиксируемые и нефиксируемые состояния компонентов графа? В чем заключаются условия непрерывности и фиксированности параметров состояния системы, описываемой при помощи графовых структур?

68. Сформулировать правило тождественности графопостроительных операций.

69. Какие критерии эффективности синтезируемых графовых структур Вам известны? Перечислить и записать эти условия.

70. Сформулировать правило совместимости для графопостроительных систем.

71. Сформулировать правило преемственности функции графопостроительной системы.

6. Прикладные задачи современной инженерии

Задачи, наиболее часто решаемые при помощи теории графов, традиционно относятся к областям логистики, экономики, менеджмента [1, 2, 3, 4]. При этом чаще всего используются сетевые модели, замкнутые или разомкнутые, «дерево связей», исходящее из понятия бинарного отображения в теории графов.

Существует множество задач из области инженерии, которые также находят свое решение при помощи методов теории графов. К ним, в первую очередь, относятся задачи распределения любых материальных потоков, в том числе, в технологиях поточной сборки, задачи оптимизации потребления конкретных материалов, исследования в области управления отходами и др. При помощи теории графов, как системы бинарных отображений, решается задача математического моделирования сложноструктурированных инженерных систем практически из любого технологического процесса. При этом, к сожалению, совершенно не используется механизм формализованных преобразований графопостроительных структур, который дает широкое поле для иерархически связанных структурных изменений исходных графов. Это направление, которому посвящено большое количество работ математиков [5, 6, 7, 8], которые остаются неизвестными в инженерных расчетах.

Для того чтобы сделать методы преобразования графов действенным инструментом для подобных инженерных расчетов, следует не только очертить круг решаемых задач и сформулировать методику, но поставить граничные условия

для таких задач, определить не только достаточность, но и необходимость применения тех или иных способов формализованного управления графовыми моделями.

Мы представим эти методы читателю с тем, чтобы он смог разобраться в этом несложном и достаточно удобном математическом аппарате и нашел для себя применение в инженерных расчетах.

6.1. Графопостроительная модель потоков металла в металлургических переделах

Вычленим из всех решаемых задач только те, которые будут иллюстрировать изложенные выше утверждения и постулаты.

На рис 6.1 в самом обобщенном виде представлена графопостроительная модель $G(G^0, G')$ материалопотоков железосодержащих компонентов, принимающих участие в металлургических переделах. Морфологическая схема, позволяющая читать такую модель, представлена в таблице 6.1.

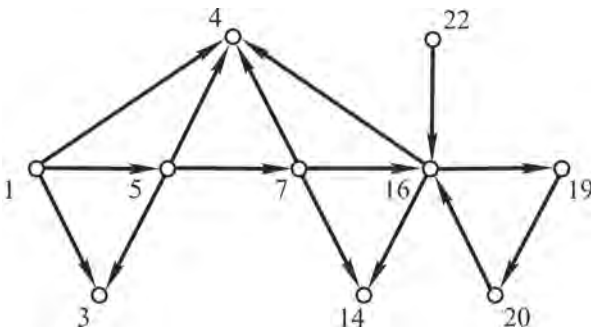


Рисунок 6.1 – Обобщенная модель движения железосодержащих компонентов в металлургическом производстве

Таблица 6.1 – Морфология обобщенной модели материалотоков железосодержащих компонентов в металлургии в виде графа $G (G^o, G')$

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание железа	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания железа в компонентах
1	2	3	4
1	Железорудное сырье	1, 2	Обогащение руды до готового агломерата
		1, 3	Образование железосодержащих «хвостов»
		1, 4	Пылеобразование
3	Железорудные «хвосты», шламы и др. отходы	–	–
4	Пыль железорудная	–	–
5	Агломерат	5, 3	Образование железосодержащих шламов и невозвратной мелочи
		5, 4	Пылеобразование
		5, 7	Производство чугуна
7	Чугун передельный	7, 4	Пылеобразование при производстве чугуна
		7, 14	Шлакообразование при производстве чугуна
		7, 16	Заливка чугуна в сталеплавильный агрегат

Продолжение таблицы 6.1

1	2	3	4
16	Жидкая сталь	16, 4	Пылеобразование при производстве стали
		16, 14	Шлакообразование в сталеплавильном процессе
		16, 19	Производство готового проката
14	Металлургические шлаки	–	–
19	Готовый прокат (товарная продукция)	19, 20	Получение металлообрези и окалины
20	Отходы прокатного производства	20, 16	Возврат металлосодержащих отходов в производство
22	Металлолом и ферросплавы	22, 16	Завалка в сталеплавильный агрегат

В качестве исходных контролируемых параметров системы примем множество $X = \{X^{\text{Fe}}, X^{\text{FeO}}, X^{\text{Fe}_2\text{O}_3 \vee \text{Fe}_3\text{O}_4}\}$. С точки зрения эффективности решения задач по исследованию материальных потоков, содержащих железо, выделим отдельные структуры параметров на следующем этапе расчленения модели. К ним отнесем:

- содержание железа в компонентах – жидкой, твердой и дисперсной фазах

$$X^{\text{Fe}} = \{[\text{Fe}]_1, [\text{Fe}]_2, [\text{Fe}]_3\};$$

- содержание окислов железа в этих фазах

$$X^{\text{FeO}} = \{[\text{FeO}]_1, [\text{FeO}]_2, [\text{FeO}]_3\}; \quad X^{\text{Fe}_2\text{O}_3 \vee \text{Fe}_3\text{O}_4} = \\ = \{[\text{Fe}_2\text{O}_3] \vee [\text{Fe}_3\text{O}_4]_1, [\text{Fe}_2\text{O}_3] \vee [\text{Fe}_3\text{O}_4]_2, [\text{Fe}_2\text{O}_3] \vee [\text{Fe}_3\text{O}_4]_3\}.$$

Если принять весовой коэффициент вершины, отражающей содержание железа в готовом прокате, за единицу, то остальные весовые коэффициенты вершин этого графа можно распределить следующим образом (табл. 6.2).

Таблица 6.2 – Весовые коэффициенты вершин орграфа $G (G^o, G')$

Номер вершины	Наименование параметра	Весовой коэффициент, $m / m\text{Fe}_{\text{пр}}$
1	Железорудный материал	1,258
3	Железорудные «хвосты», шламы и др. отходы	0,262
4	Пыль железорудная	0,042
5	Агломерат	0,954
7	Чугун передельный	0,697
14	Металлургические шлаки	0,014
16	Жидкая сталь	1,065
19	Готовый прокат (товарная продукция)	1,0
20	Отходы прокатного производства	0,062
22	Металлолом и ферросплавы	0,354

Очевидно, что значения параметров (в данном случае – весовых функций вершин орграфа $G (G^o, G')$) являются непрерывными.

Как показано выше, в соответствии с принципом суперпозиционности, функциональная модель $G(G^o, G')$ (см. рис. 6.1) может быть конкретизирована на любых интересующих нас участках. При этом параметры начальной и конечной вершин на участке разбиения должны оставаться неизменными.

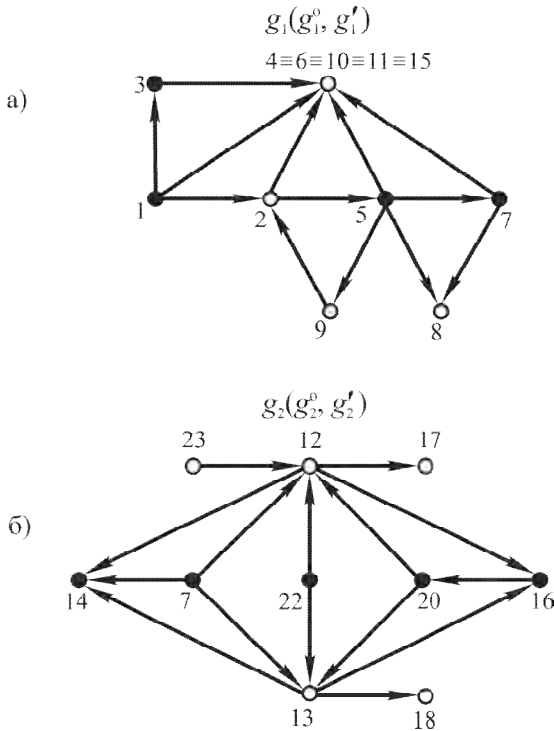


Рисунок 6.2 – Фрагменты подграфов моделей движения железосодержащих компонентов на участках «руда – чугун» (а) и «чугун – прокат» (б)

Согласно правилу перевода вершин графа из фиксированного в нефиксируемое состояние при условии непрерыв-

ности параметров в некотором интервале, мы можем судить о наличии нефиксированных вершин в данном орграфе. Например, на рис. 6.2, а представлена модель движения железосодержащих компонентов на участке «железная руда – чугун» в виде подграфа $g_1(g_1^{\circ}, g_1')$, исходного на вершинах «1–7» таким образом, чтобы весовые коэффициенты этих вершин были неизменными, т. е. $k_1 = \text{const}$ и $k_7 = \text{const}$. При этом сплошными точками отмечены фиксированные вершины исходного орграфа $G(G^{\circ}, G')$ и подграфа $g_1(g_1^{\circ}, g_1')$, а нефиксируемые в орграфе $G(G^{\circ}, G')$ вершины, принадлежащие только подграфу $g_1(g_1^{\circ}, g_1')$ – незачерненными точками. Весовые коэффициенты нефиксируемых вершин в силу непрерывности основного параметра вполне определимы и показаны в табл. 6.3. Попробуем составить морфологическую таблицу для модели такого подграфа (табл. 6.4).

Таблица 6.3 – Весовые коэффициенты нефиксированных вершин орграфа $g_1(g_1^{\circ}, g_1')$

Номер вершины	Наименование параметра	Весовой коэффициент, $m / m_{\text{Fe}_{\text{пр}}}$
4 \equiv 6 \equiv 10 \equiv \equiv 11 \equiv 15	Пыль металлургическая	0,144
2	Железорудный концентрат	1,149
8	Железосодержащий шлак	0,096
9	Агломерационная мелочь	0,054

В данном случае появляются новые дуги подграфа $g_1(g_1^o, g_1')$, которые конкретизируют те или иные особенности движения железосодержащих материалов в потоках, принимающих участие в металлургических переделах.

То же можно отнести и в случае построения подграфа $g_2(g_2^o, g_2')$, описывающего процессы движения железосодержащих материалов на участке «чугун – готовые слябы» вместе с известными их трансформациями в промежутке между состояниями, описываемыми вершинами «7» и «16».

Таблица 6.4 – Морфологическая модель подграфа $g_1(g_1^o, g_1')$

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание железа	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания железа в компонентах
1	2	3	4
1	Железорудное сырье	1, 2	Обогащение руды
		1, 3	Образование железосодержащих «хвостов»
		1, 4	Пылеобразование
2	Железорудный концентрат	2, 5	Агломерация
		2, 6	Пылеобразование
3	Железорудные «хвосты»	3, 11	Пыление «хвостов»
4	Пыль железорудная	–	–

Продолжение таблицы 6.4

1	2	3	4
5	Агломерат	5, 7	Производство чугуна
		5, 8	Образование железосодержащих шламов
		5, 9	Образование невозвратной мелочи
		5, 10	Пылеобразование
6	Пыль железорудного концентрата	–	–
7	Чугун передельный	7, 8	Образование железосодержащих шламов
		7, 15	Пылеобразование при производстве чугуна
8	Железосодержащие шламы	–	–
9	Агломерационная мелочь	9, 2	Возврат мелочи
10	Агломерационная пыль	–	–
11	Пыль вторичного пыления в хвостохранилищах	–	–
15	Доменная пыль	–	–

Функция дуги |7, 16| в данном случае становится более сложной и описывается совокупностью дуг:

$$g'_2 = \left\{ |7, 12|, |7, 13|, |7, 14|, |12, 14|, |12, 16|, |12, 17|, |13, 14|, |13, 16|, |13, 18|, |16, 20|, |20, 12|, |20, 13|, |22, 12|, |22, 13|, |23, 12| \right\}.$$

При этом, за каждой вновь образованной вершиной стоит ее промежуточный весовой коэффициент, причем, сохраняется баланс этих коэффициентов внутри подграфа. Мы не будем расшифровывать новый подграф $g_2(g_2^o, g_2^g)$, а вместо этого дадим расширенную таким образом модель движения железорудных материалов в виде орграфа $G_{06}(G_{06}^o, G_{06}^g) \equiv G(G^o, G^g) \cup g_1(g_1^o, g_1^g) \cup g_2(g_2^o, g_2^g) \cup \dots$.

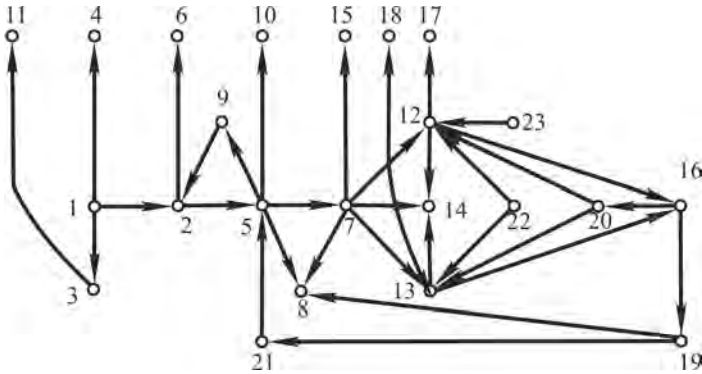


Рисунок 6.3 – Расширенная модель движения железосодержащих компонентов в металлургическом производстве

На рис. 6.3 представлена расширенная модель движения потоков материалов, участвующих в металлургических переделах и содержащих в своем составе железо и его компоненты (окислы, сплавы, композиты с различной структурой и др.). Обобщенные морфологические данные такой модели отражены в таблице 6.5.

Таблица 6.5 – Морфологическая модель движения железосодержащих компонентов в металлургических переделах по орграфу $G_{об} (G_{об}^o, G_{об}')$

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание железа	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания железа в компонентах
1	2	3	4
1	Железорудное сырье	1, 2	Обогащение руды
		1, 3	Образование железосодержащих «хвостов»
		1, 4	Пылеобразование
2	Железорудный концентрат	2, 5	Агломерация
		2, 6	Пылеобразование
3	Железорудные «хвосты»	3, 11	Пыление «хвостов»
4	Пыль железорудная	–	–
5	Агломерат	5, 7	Производство чугуна
		5, 8	Образование железосодержащих шламов
		5, 9	Образование невозвратной мелочи
		5, 10	Пылеобразование

Продолжение таблицы 6.5

1	2	3	4
6	Пыль железорудного концентрата	–	–
7	Чугун передельный	7, 8	Образование железосодержащих шламов
		7, 12	Заливка чугуна в мартеновскую печь
		7, 13	Заливка чугуна в конвертер
		7, 14	Шлакообразование при производстве чугуна
		7, 15	Пылеобразование при производстве чугуна
8	Железосодержащие шламы	–	–
9	Агломерационная мелочь	9, 2	Возврат мелочи
10	Агломерационная пыль	–	–
11	Пыль вторичного пыления в хвостохранилищах	–	–
12	Жидкая сталь (мартеновская)	12, 14	Шлакообразование в мартеновском процессе
		10, 16	Получение слябов

Продолжение таблицы 6.5

1	2	3	4
		10, 17	Образование пыли в мартеновском производстве
13	Жидкая конвертерная сталь	13, 14	Шлакообразование в конвертере
		13, 16	Получение слябов
		13, 18	Образование конвертерной пыли
14	Металлургические шлаки (по принадлежности)	–	–
15	Доменная пыль	–	–
16	Слябы	16, 19	Производство готового проката
		16, 20	Получение металлообрези
17	Мартеновская пыль	–	–
18	Конвертерная пыль	–	–
19	Готовый прокат (товарная продукция)	19, 8	Образование прокатного шлама
		19, 21	Образование прокатной окалины
20	Прокатная металлообрезь	20, 12	Добавка обрезки в мартеновскую печь

Продолжение таблицы 6.5

1	2	3	4
		20, 13	Добавка обрезки в конвертерную металлошихту
21	Прокатная окалина	20, 5	Возврат в аглошихту
22	Металлический лом	22, 12	Завалка в мартеновскую печь
		22, 13	Загрузка в конвертер
23	Ферросплавы	23, 12	Подача в мартеновскую ванну

В соответствии с правилом тождественности, получае-
мый результирующий оргграф имеет функциональную струк-
туру, тождественную исходной (см. рис. 6.1, 6.2 и 6.3).
Т. е.

$$G'|1, 5|:\{1\} \rightarrow \{5\} \overset{T}{\infty} g'|1, 5|:\{1\} \rightarrow \{5\} G'|1, 5|:\{1\} \rightarrow \{5\}$$

и при этом тождественными являются все
промежуточные состояния вершин

$|1, 5| \rightarrow \{1, 3, 4, 5\} \overset{T}{\infty} |1, 5| \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11\}$. Это означа-
ет, что любая из обозначенных последовательностей преоб-
разований железосодержащих компонентов дает некоторый
равнозначный результат, независимо от способов и траекто-
рии изменения этих компонентов.

6.2. Математическая модель движения серы в металлургических переделах

На рис. 6.4 представлены диаграммы, показывающие изменения содержания серы в основных компонентах сырьевой, производственной баз и базе отходов металлургических переделов, а также базовые функциональные связи, позволяющие получать эти изменения. Такая диаграмма дает общее представление о структуре математической графопостроительной модели потоков серы в металлургическом производстве и позволяет легко отследить функции, приводящие к этим изменениям.

Общая графопостроительная функциональная модель движения серы в металлургическом производстве (рис. 6.5 и табл. 6.6) близка по своей структуре к указанной диаграмме, но не повторяет ее. Пользуясь правилом гомеоморфности элементов модели, объединяются те вершины графа, которые отражают одни и те же компоненты. В частности, это относится к сырьевой базе, а именно компонентам – известняку, извести, коксу, окалине и др. Местоположение каждого элемента диаграммы на оси ординат показывает весовой коэффициент соответствующей вершины графа на рис. 6.5. Например, весовой коэффициент вершины (5) равен $m_S(5) = 0,035 - 0,040$ для различных условий производства. Весовые функции ребер графа, показывающие изменения содержания серы в данном компоненте, могут соответствовать коэффициенту активности серы при конкретных физико-химических реакциях. Например, активность серы в коксике при ее переходе в готовый агломерат соответствует весовому коэффициенту ребер $|2, 5|$ графа.

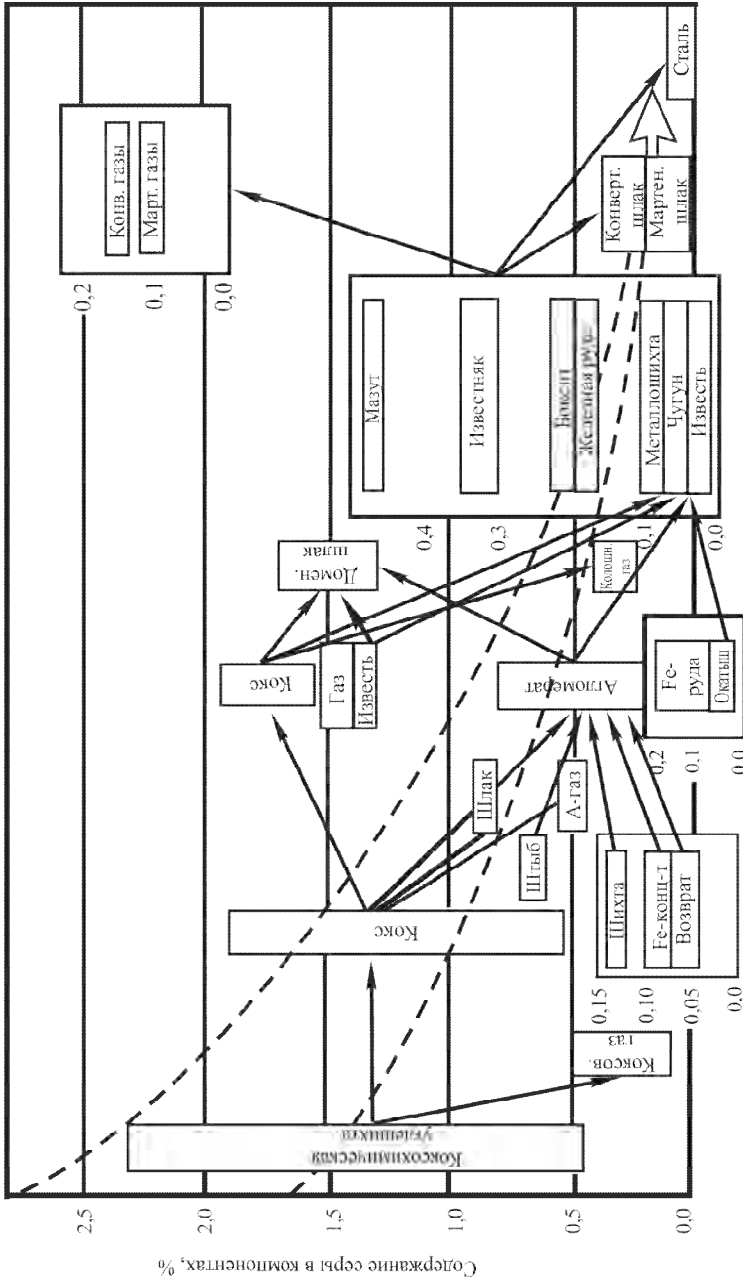


Рисунок 6.4 – Движение серы в материальных потоках металлургического производства

Обозначим его $k_S(2, 5)$. Для ребра $|4, 6|$ весовая функция $k_S(4, 6)$ определяется активностью серы по отношению к чугуноу, а для ребра $|7, 5|$ весовая функция $k_S(7, 5)$ – активностью серы при переходе ее из известняка в агломерат. И т. д.

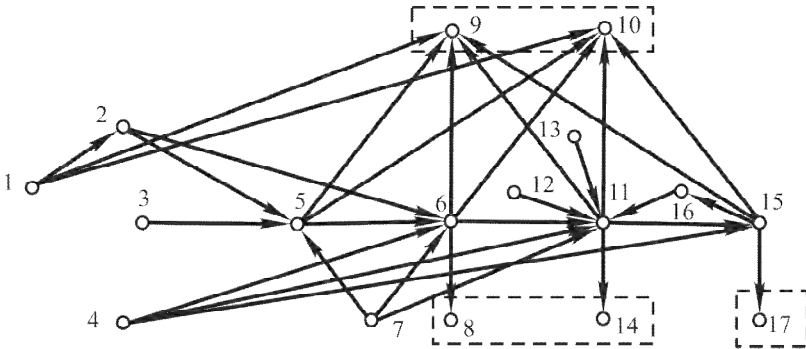


Рисунок 6.5 – Функциональная модель движения серы в металлургических переделах

Математическая модель, в отличие от диаграммы, оперирует с гомеоморфными компонентами и не может исключать какие-либо из них. Шлак – это совокупность компонентов сырьевой базы, которые обладают высокой степенью отторжения в данном металлургическом производстве.

Поэтому, с точки зрения математической графопостроительной модели сера в шлаке – доменном, мартеновском, конвертерном – является гомеоморфным компонентом и обозначается одной вершиной. Изменяется лишь весовой коэффициент этой вершины. Для доменного шлака, например, $m_S(7) = 1,09 \div 1,70$, для мартеновского шлака $m_S(13) = 0,105 \div 0,135$, для конвертерного – $m_S(13) = 0,20 \div 0,28$.

ГЛАВА 6

Таблица 6.6 – Идентификационная таблица для функциональной модели движения серы в металлургическом производстве

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание серы	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания серы в компонентах
1	2	3	4
1	Коксохимическая углешихта	1, 2	Коксование угольного пирога
		1, 9	Образование сероводорода в отходящем коксовом газе
		1, 10	Образование окислов серы в отходящем коксовом газе
2	Кокс	2, 5	Горение кокса на аглоленте
		2, 6	Горение кокса в доменной печи
3	Железная руда	3, 5	Восстановление железа из окислов на аглоленте
4	Топливо газообразное	4, 6	Горение природного газа в доменной печи
		4, 11	Горение природного газа в мартеновской печи
		4, 15	Горение природного газа в нагревательных колодцах и методических печах

Продолжение таблицы 6.6

1	2	3	4
5	Агломерат	5, 6	Восстановление железа из агломерата в доменной печи
		5, 9	Образование сероводорода в отходящих газах агломерационного производства
		5, 10	Образование окислов серы в отходящих газах агломерационного производства
6	Чугун переделный	6, 8	Шлакообразование в доменной печи
		6, 9	Образование сероводорода в отходящих газах доменного производства
		6, 10	Образование окислов серы в отходящих газах доменного пр-ва
		6, 11	Изготовление стали
7	Известь и известняк	7, 5	Изменение состава агломерата
		7, 6	Управление составом шлака доменной печи
		7, 11	Управление составом шлака сталеплавильного агрегата
8	Шлак доменный	–	
9	Сероводород отходящих газов	–	

Продолжение таблицы 6.6

1	2	3	4
10	Окислы серы в отходящих газах	–	
11	Сталь	11, 9	Образование сероводорода в отходящих газах сталеплавильного производства
		11, 10	Образование окислов серы в отходящих газах сталеплавильного производства
		11, 14	Образование сталеплавильного шлака
		11, 15	Изготовление проката
12	Мазут	12, 11	Горение мазута в мартеновской печи
13	Металлошихта	13, 11	Плавление металлошихты в сталеплавильном агрегате
14	Сталеплавильный шлак	–	
15	Прокатная заготовка	15, 9	Образование сероводорода в отходящих газах прокатного производства
		15, 10	Образование окислов серы в отходящих газах прокатного производства
		15, 16	Образование окалина

Продолжение таблицы 6.6

1	2	3	4
		15, 17	Образование обреза
16	Окалина	16, 11	Подача окалина в сталеплавильный агрегат
17	Обрезь прокатного производства	17, 13	Подача обреза в металлошихту

То же можно отнести и к сернистым газам. По крайней мере, окислы серы, сероводород и сероуглерод присутствуют в отходящих газах всех металлургических переделов – доменном, мартеновском, конвертерном, прокатном. Отличие составляют только соответствующие весовые коэффициенты. Например, вершина 9 (коэффициент по сероводороду) для доменного производства имеет $m_S(9) = 0,063 \div 0,093$, для мартеновского производства $m_S(9) = 0,10 \div 0,12$, для конвертерного – $m_S(9) = 0,14 \div 0,16$ и т. д.

Предложенная модель не может претендовать на абсолютную полноту информации о поведении серы в металлургии. Однако к ее достоинствам мы можем небезосновательно отнести способность к дополнительным знаниям в зависимости от поставленных задач. Следует отметить, что в каждой дуге полученного графа свернут некоторый функциональный подграф, отражающий изменение состояние системы от предыдущей вершины к последующей. Управление потоками серы в металлургическом производстве означает изменение структуры этих подграфов.

6.3. Задача оптимизации потоков серы в коксохимическом производстве

Мы рассмотрим эту часть модели и способы управления материальными потоками, содержащими серу. Например, дуга $|1, 2|$, отражающая движение серы в производстве кокса, при более глубоком рассмотрении может раскрываться в самостоятельную модель, описываемую подграфом (рис. 6.6) со своей морфологией (табл. 6.7). Такая модель дает возможность более глубокого изучения поведения серы, например, как отходообразующего компонента в производственной системе.

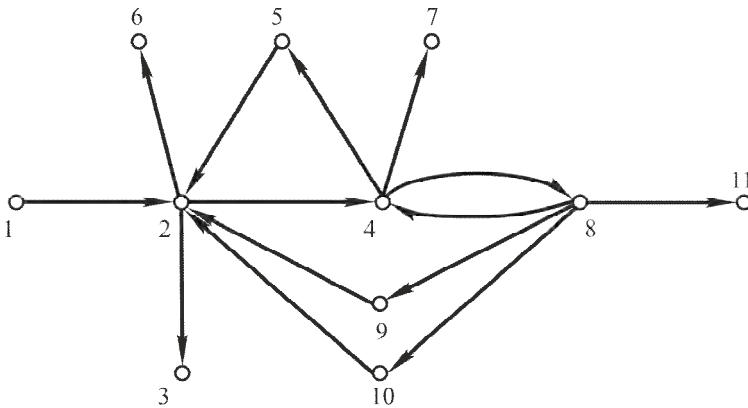


Рисунок 6.6 – Функциональный граф движения серы в коксохимическом производстве

Рассмотрим на рис. 6.5 ребро $|1, 9|$ – образование сероводорода в коксовом газе. Исходное содержание серы здесь может достигать 20 г/м^3 , что придает коксовому газу специфический запах. Еще в те времена, когда коксовый газ был технологическим сырьем и использовался для нагрева мартеновских печей, содержание серы в нем регламентировало

качество металла. В частности, при содержании серы в коксовом газе более $0,016 \text{ кг} / \text{м}^3$, она почти полностью переходила в металл, и ее концентрация там достигала $0,060 \%$.

Таблица 6.7 – Морфологическая таблица для функциональной модели движения серы в коксохимическом производстве

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание серы	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания серы в компонентах
1	2	3	4
1	Угольный концентрат	1, 2	Шихтоподготовка
2	Угольная шихта	2, 3	Пиролиз кокса
		2, 4	Образование коксового газа при пиролизе
		2, 6	Образование смолки при пиролизе
3	Готовый кокс	–	–
4	Коксовый газ	4, 5	Образование кислой смолки при переработке сульфидов
		4, 7	Получение $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$
		4, 8	Образование сероводорода
5	Кислая смолка	5, 6	Спекание смолки в шихте
6	Смола коксовая	–	–
7	$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$	–	–

Продолжение таблицы 6.7

1	2	3	4
8	H ₂ S	8, 4	Образование коксового газа после сероочистки
		8, 9	Образование автоклавной грязи
		8, 10	Образование отработанного раствора серы после сероочистки
		8, 11	Получение твердой серы

В настоящее время, когда коксовый газ не имеет чисто технологического значения (исключая функцию теплоносителя), его десульфурации стали уделять меньше внимания. Тем не менее, рассмотрим один из традиционных методов сероочистки этого газа. Он заключается в способности раствора соды поглощать сероводород с последующей регенерацией раствора. Функциональная графопостроительная модель изображена на рис. 6.7. Морфологическая таблица к ней представлена ниже (табл. 6.8).

Вакуум-содовый метод десульфурации состоит в том, что в смесительный скруббер подается водный раствор соды, в котором постепенно поглощается сероводород коксового газа. Затем смесь подается в тарельчатый регенератор, и при одновременном нагреве и вакуумировании происходит регенерация насыщенного сероводородом раствора. После охлаждения раствор соды вновь направляется в скруббер, а выделенный сероводород при участии дистиллированной воды переходит в кислотное состояние.

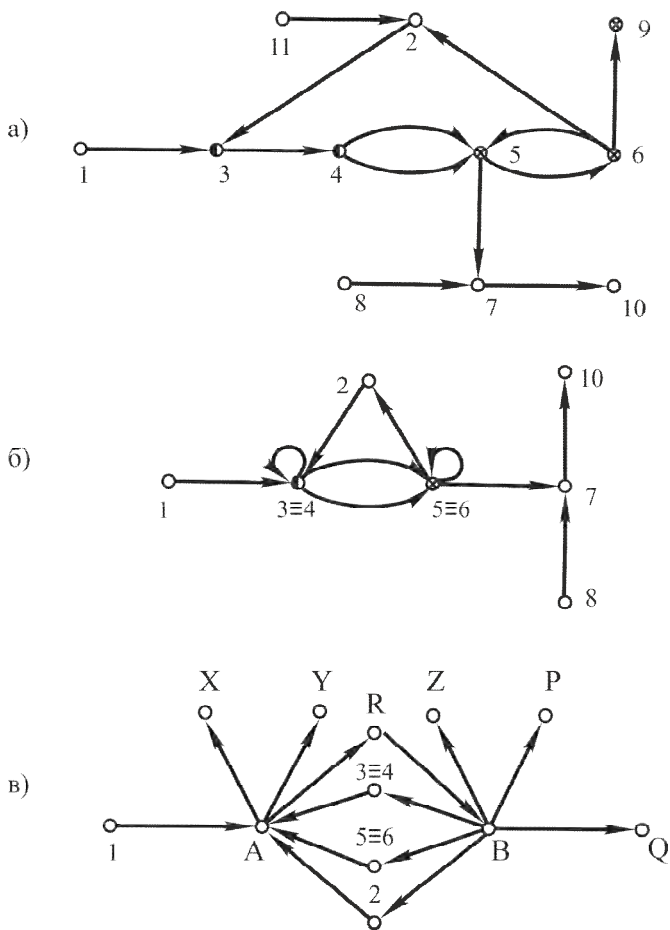


Рисунок 6.7 – Математическая модель сероудаления из коксового газа

Таблица 6.8 – Морфологическая таблица исходного орграфа десульфурации коксового газа

Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание серы	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания серы в компонентах
1	2	3	4
1	Сероводород в смеси коксового газа	1, 3	Подача в смесительный скруббер
2	Водный раствор соды	2, 3	Подача в смесительный скруббер
3	Водно-воздушная смесь	3, 4	Смешение коксового газа и водного раствора соды
4	Водно-воздушная смесь	4, 5	Охлаждение смеси
		4, 5	Вакуумирование смеси
5	Низкотемпературная смесь	4, 5	Разделение и регенерация смеси
		5, 7	Подача сероводорода в реактор для образования серной кислоты
6	Разделенная смесь	6, 2	Возврат раствора соды в скруббер
		6, 5	Нагрев разделенной смеси
		6, 9	Выделение очищенного коксового газа
7		7, 10	Образование серной кислоты контактным способом

Продолжение таблицы 6.8

1	2	3	4
8	Вода дистилли- рованная	8, 7	Подача воды в реактор
9	Очищенный коксовый газ	–	
10	Серная кислота	–	
11	Свежий раствор соды	11, 2	Подача свежего раство- ра для подпитки

После сероочистки содержание сероводорода в коксовом газе снижалось до 0,002–0,003 кг / м³, т. е. в 7–8 раз.

Обратим внимание на гомеоморфность вершин. К ним относятся вершины 3 и 4, а также пара вершин 5 и 6. Гомеоморфизм подтверждается адекватностью весовых коэффициентов и общим физическим смыслом, который заложен в этих элементах графа. Пользуясь принципом φ-гомеоморфизма Н. П. Хоменко, объединим эти пары вершин, придав каждой из пар следующие весовые коэффициенты:

$$m_S(3 \cup 4) = \frac{1}{2} \sqrt{m_S(3)m_S(4)},$$

$$m_S(5 \cup 6) = \frac{1}{2} \sqrt{m_S(5)m_S(6)}.$$

Дуги |3, 4| и |5, 6| становятся петлями, что свидетельствует о возможности создания замкнутого материалопотока по сере, по крайней мере, на этом этапе технологического процесса. Весовые функции этих дуг не претерпевают каких-либо изменений. Тогда результирующий орграф имеет вид, показанный на рис. 6.7, б.

Модель имеет три явно висячие вершины (1), (9) и (10). Если первая вершина имеет четко выраженный смысл сырьевой базы, а десятая относится к производству сопутствующей продукции (серной кислоты), то вершина (9) отражает

поток основных отходов в виде коксового газа. Воспользуемся операцией демонтажа Ваховского висячей вершины (9) на графе. При этом исключается дуга $|6, 9|$, а ее функция в неявном виде переносится на другие дуги, смежные с дугой (6) исходного графа. Весовой коэффициент демонтированной вершины объединяется с весовым коэффициентом предыдущей вершины (6) по принципу суперпозиции, т. е.

$$m_S(6') = m_S(6) \cup m_S(9)$$

при условии гомеоморфности, что доказывается их физическим смыслом.

Объединение дуг при стягивании вершин (3) и (4), а также (5) и (6) осуществляется в таком порядке:

- $|3, 4|$ – замыкается на общую вершину $(3) \equiv (4)$;

- $[|5, 6| \equiv |6, 5|] \cup |6, 9|$ – замыкается на общую вершину $(5) \equiv (6)$.

При этом весовая функция дуги $|3, 4|$ остается без изменения, а весовая функция объединенной дуги $[|5, 6| \equiv |6, 5|] \cup |6, 9|$ имеет вид

$$k_S(5 \equiv 6, 5 \equiv 6) = \frac{1}{2} \sqrt{k_S(5, 6)k_S(6, 5)} \cup k_S(6, 9).$$

Таким образом, можно считать, что весовая функция демонтированной дуги (6,9) переносится на совокупность дуг $|5, 6|$ и $|6, 5|$.

Морфологические данные результирующего орграфа, изображенного на рис. 6.7, б, представлены в таблице 6.9.

Попробуем вербализовать результаты полученной математической модели в соответствии с указанными выше принципами.

В настоящее время коксовый газ не имеет явно выраженного технологического назначения. При определенных

условиях, в частности, при соблюдении правил техники безопасности, этот газ может использоваться в качестве теплоносителя. Поэтому инженерным решением в данном случае является применение коксового газа для нагрева очищаемого водного раствора в специальном прямоточном реакторе. Это позволит снизить расход топлива, уменьшить выбросы газов в атмосферу.

Таблица 6.9 – Морфологическая таблица синтезированного орграфа десульфурации коксового газа

Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание серы	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания серы в компонентах
1	2	3	4
1	Сероводород в смеси коксового газа	1, 3	Подача в смесительный скруббер
2	Водный раствор соды	2, 3	Подача в смесительный скруббер
3 ≡ 4	Водно-воздушная смесь	3, 4	Смешение коксового газа и водного раствора соды
		3, 4 ∪ 5, 6	Охлаждение смеси
		3, 4 ∪ 5, 6	Вакуумирование смеси
5 ≡ 6	Низкотемпературная нагреваемая разделенная смесь	5, 6 ∪ 6, 5	Внутреннее разделение смеси с выделением сероводорода

Продолжение таблицы 6.9

1	2	3	4
		$ 5, 6 \cup 6, 5 $	Регенерация водного раствора соды
		$ 5, 6 \cup 6, 5 $	Нагрев очищенного водного раствора с участием коксового газа
		$ 5 \cup 6, 7 $	Подача сероводорода в реактор для образования серной кислоты
8	Вода дистиллированная	$ 8, 7 $	Подача воды в реактор
10	Серная кислота	–	

Вторым инженерным решением, которое может соответствовать новой структуре графа, а именно, объединение функций дуг $|3, 4| \cup |5, 6|$, является применение способа вакуумного охлаждения жидкости. Такие решения, в виде глубоких вакууматоров циклонного типа, известны из практики, и на них можно сослаться [9, 10]. При этом процесс охлаждения следует вести до температуры ($-110 \div -120 \text{ }^\circ\text{C}$), используя эффект разделения газа H_2S и жидкости за счет различных температур кристаллизации.

Иной способ управления потоками серы в коксохимическом производстве дает следующий алгоритм изменения модели графа (см. рис. 6.7, б).

1. Переименуем дуги результирующего графа следующим образом: $3 \equiv 4 \rightarrow A$; $5 \equiv 6 \rightarrow B$.

2. Объединим гомеоморфные вершины A и 7 . При этом остаются висячие вершины 8 и 10 .

3. Вычислим произведение подграфа $G[A, B, 2, |A, B|, |B, A|, |2, A|, |B, 2|, |A, A|, |B, B|]$ на себя. Общая формула произведения в данном случае имеет следующий вид:

$$R(r^{\circ}, r') = G(g^{\circ}, g') \times G(g^{\circ}, g'),$$

где $g^{\circ} \supset (A, B, 2)$,

$g' \supset [|A, B|, |B, A|, |2, A|, |B, 2|, |A, A|, |B, B|]$.

Объединенные вершины результирующего графа

$$r^{\circ} \equiv g^{\circ} \supset (A, B, 2).$$

Инцидентность вершин исходного графа по правилу $r'_i = f'\{g'_i\}$, где $f'\{g'_i\}$ – отображение i -й вершины графа F , для g'_i отыскивается следующим образом, помня, что $3 \equiv 4 \rightarrow A$; $5 \equiv 6 \rightarrow B$.

3.1. Вершина 5 инцидентна вершине 3 через вершину 4.

Т. е. $r'_{A,B} [|5, 4|, |4, 3|]$.

3.2. Вершина 5 инцидентна вершине 4 через вершину 3.

Т. е. $r'_{A,B} [|5, 3|, |3, 4|]$.

3.3. Вершина 6 инцидентна вершине 3 через вершину 4.

Т. е. $r'_{A,B} [|6, 4|, |4, 3|]$.

3.4. Вершина 6 инцидентна вершине 4 через вершину 3.

Т. е. $r'_{A,B} [|6, 4|, |4, 3|]$.

4. Замкнутые на себя дуги $(|A, A|)$ и $(|B, B|)$ могут быть развернуты своими висячими вершинами A и B .

Результирующий граф представлен на рис. 6.7, в. Морфологические данные вторично синтезированного графа представлены в таблице 6.10. В результирующем графе выделены буквенными обозначениями вершины с отсутствием

гомеоморфности по сравнению с исходными. Это относится к вершинам 3, 4, 7, 8, 10, а также трансформированным вершинам $3 \equiv 4$ и $5 \equiv 6$. Эти вершины обозначим буквенными выражениями X, Y, Z, P, Q , а также A, B , соответственно. Такие обозначения носят формализованный характер, поскольку не несут в себе дополнительной информации о функциональном назначении этих вершин и соответствующих дуг. Иными словами, гомеоморфизм между отдельными вершинами исходного и результирующего графов не подтверждается.

Таблица 6.10 – Морфологическая таблица вторично синтезированного орграфа десульфурации коксового газа

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание серы	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания серы в компонентах
1	2	3	4
1	Сера угольного концентрата	$ 1, A $	Получение шихты
A	Сера коксовой шихты	$ A, X $	Пиролиз шихты
		$ A, Y $	Производство коксовой смолы
		$ A, R $	Выделение коксового газа в коксовом пироге
R	Газовая сера коксового пирога	$ R, B $	Извлечение коксового газа
B	Сера коксового газа	$ B, 2 $	Производство кислой смолки
		$ B, 3 \cup 4 $	Получение отработанного раствора серы

Продолжение таблицы 6.10

1	2	3	4
		$ B, 5 \cup 6 $	Получение автоклавной грязи
		$ B, Z $	Получение серосодержащего бензола
		$ B, P $	Получение твердой серы
		$ B, Q $	Выделение очищенного коксового газа
2	Кислая смолка	$ 2, A $	Утилизация кислой смолки в коксовой шихте
$3 \equiv 4$	Отработанный раствор серы	$ 3 \cup 4, A $	Утилизация раствора серы в коксовой шихте
$5 \equiv 6$	Автоклавная грязь	$ 5 \cup 6, A $	Утилизация автоклавной грязи в коксовой шихте

Рассмотрим вероятные конфигурации синтезированной технологии, предварительно приняв в качестве исходного условие о гомеоморфности совокупности вершин исходного (см. рис. 6.7, б) и результирующего (см. рис. 6.7, в) графов.

Обратим внимание на то, что вершины A и B имеют практически симметричные дуги, если не считать их ориентации. Линия дуг $|1, A|$; $|A, B|$; $|B, Q|$ является, как и в исходном графе, основной, отражающей получение коксового газа. Поэтому, дуги $|A, R|$, $|R, B|$ и $|B, Q|$ имеют соответствующее морфологическое описание согласно таблице 6.9 и отражают условия коксогазового производства.

Ориентировочный баланс серы в условиях синтезированной переработки, реализуемой, например, на ОАО «Маркохим», представлен в таблице 6.11.

Таблица 6.11 – Баланс потоков серы при переработке коксового газа по синтезированной технологии, в процентах к общему содержанию в компонентах

Приход серы		Расход серы	
Наименование показателя	Величина, %	Наименование показателя	Величина, %
Приход серы		Расход серы	
1. Сера в коксовой шихте	99,6	1. Сера доменного кокса	64
2. Сера кислой смолки	0,01	2. Сера коксового «ореха»	3,3
3. Сера в серной кислоте отделения нейтрализации	0,39	3. Сера каменноугольной смолы	2,2
ИТОГО:	100	4. Сера коксового шлама	1,2
		5. Сера коксовой мелочи	3,2
		6. Сера сырого бензола	0,7
		7. Сера неорг. выбросов	0,8
		8. Сера техническая твердая	20,6
		9. Сера остаточная в коксовом газе	4,0
		ИТОГО:	100

Переработка элементарной серы может осуществляться с использованием существующих и новых технологий следующим образом.

Как и ранее, серная пена пропускается через вакуум-фильтры. При этом сера отделяется от поглотительного раствора. Фильтрат раствора возвращается для регенерации, а

увлажненная сера в виде пасты направляется для выпаривания и последующего плавления. Инструментом плавления серы может быть, например, перегретый водяной пар. По технологии отходом такого стандартного производства является автоклавная грязь с содержанием серы до 70 % по массе.

Необходимо отметить, что в коксовом газе содержатся бензолные составляющие, в свою очередь содержащие сероуглерод в количестве до 1,2 %, а также кислая смолка с содержанием серы до 5 %.

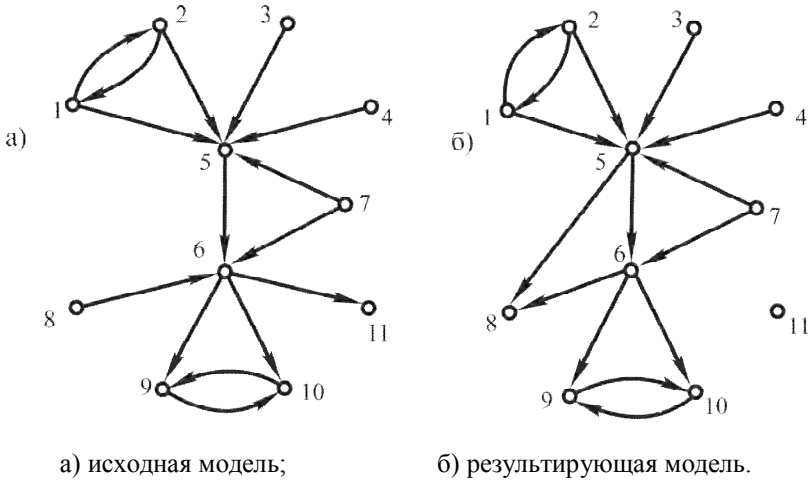
Синтезированная технология переработки коксового газа предусматривает передачу этих составляющих в качестве утилизированных элементов в коксовую шихту (дуги $|2, A|$; $|3 \equiv 4, A|$ и $|5 \equiv 6, A|$). Таким образом, технология позволяет решать проблему утилизации отходов коксохимического производства. Во всяком случае, при переработке коксового газа.

При исходном содержании серы в коксовом газе в пределах 20 г/м^3 , остаток серы в очищенном коксовом газе составил 3–4 г/м^3 . Чистой серы получается около 12 г/м^3 .

6.4. Управление потоками серы в доменном производстве на основании свойств изоморфизма элементов графопостроительной модели

Математическая модель потоков серы в доменном производстве в графах представлена на рис. 6.8 и имеет вид симметрического 11-вершинного орграфа без петель. Морфологическая таблица исходной модели дает представление о функциональности и структуре модели (табл. 6.12). В ней легко выделить парные и множественные изоморфизмы вершин. К первым следует отнести состояние серы в агломерате и железной руде (вершины 1 и 2), чугуна и доменном шлаке (вершины 9 и 10). А ко вторым – общее содержание серы в исходной сырьевой базе (вершины 1, 2, 3, 4 и вершины 8, 9, 10, 11).

Представим таблицы уравнений для расчета коэффициентов полинома данного графа. Сразу отметим, что для симметрического графа без петель значимые коэффициенты полинома с одинаковыми индексами равны нулю, т. е. $C_{i,j} = 0$. Это существенно упростит дальнейшие расчеты.



а) исходная модель;

б) результирующая модель.

Рисунок 6.8 – Графопостроительная модель потоков серы в доменном процессе

Запишем полином, соответствующий 11-вершинному симметрическому графу, в следующем виде:

$$\pi(x, y) = \pi_0(x) + R_1 \left[u\pi_1(x) + y^2\pi_2(x) + y^9\pi_9(x) + y^{10}\pi_{10}(x) \right] + R_2 \left[y^6\pi_6(x) \right].$$

Здесь $\pi_0(x)$ – может принимать только нулевые и единичные значения в зависимости от направленности дуг графа, смежного с соответствующей вершиной. Общий вид разложений, например, для $\pi_6(x)$ следующий:

$$\pi_6(x) = \sum_{j=1}^4 j \left\{ \left[\pi_{6,j}(x) + j \right]^4 + 1 \right\} = C_{1,6}x + C_{2,6}x^2 + C_{6,9}x^9 + C_{6,10}x^{10}.$$

Таблица 6.12 – Морфологическая таблица исходного графа движения серы в доменном производстве

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание серы	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания серы в компонентах
1	2	3	4
1	Сырая железная руда	1, 5	Поверхностный переход серы между рудой и твердой фазой шихты выше уровня лещади до равновесной концентрации
		1, 2	Поверхностный переход серы между рудой и агломератом до равновесной концентрации
2	Агломерат	2, 5	Поверхностный переход серы между агломератом и твердой фазой шихты выше уровня лещади до равновесной концентрации
		2, 1	Поверхностный переход серы между агломератом и рудой до равновесной концентрации

Продолжение таблицы 6.12

1	2	3	4
3	Кокс доменный	3, 5	Поверхностный переход серы между коксом и твердой фазой шихты выше уровня лещади до равновесной концентрации
4	Известняк	4, 5	Поверхностный переход серы между известняком и твердой фазой шихты выше уровня лещади до равновесной концентрации
5	Твердая фаза доменной шихты	5, 6	Изменение концентрации серы при переходе шихты из твердого в жидкое состояние
6	Жидкая фаза доменной шихты	6, 8	Равновесный переход серы из жидкой фазы шихты в колошниковый газ
		6, 9	Равновесный переход серы из жидкой фазы шихты в доменный шлак
		6, 10	Равновесный переход серы из жидкой фазы шихты в чугун
		6, 11	Насыщение серой из жидкой фазы шихты в футеровку печи
7	Природный газ и мазут в дутье	7, 5	Переход серы мазута в твердую фазу доменной шихты выше лещади

Продолжение таблицы 6.12

1	2	3	4
		7, 6	Переход серы мазута в жидкую фазу доменной шихты ниже лещади
8	Колошниковый газ доменной печи	–	–
9	Доменный шлак жидкий	9, 10	Равновесный переход серы из доменного шлака в чугун
10	Чугун жидкий	10, 9	Равновесный переход серы из доменного шлака в чугун
11	Элементы футеровки доменной печи	–	–

В результате мы имеем систему двузначных функций одного аргумента, которая характеризует достаточность математической модели в виде 11-вершинного графа. Для расчета соответствующих коэффициентов представлена система линейных уравнений (табл. 6.13). Всего дано 22 уравнения, решение которых сводится к подстановкам исходных данных.

Определим подход к решению задачи поиска соответствия между двумя графами, один из которых является исходным и описывается полиномом $\pi(x, y)$, а второй – $\pi^*(x, y)$ – является результирующим, обладающим S -изоморфизмом к исходному симметрическому.

Прежде всего, определим требования необходимого условия – совпадение единичных значений функций $\pi_{i,j}$ и $\pi_{i,j}^*$. Если имеется хотя бы одно несовпадение, то устанавливается отсутствие изоморфизма рассматриваемых графов. Одновременно, из системы исключаем все функции, которые тождественно равны нулю и единице.

Таблица 6.13 – Уравнения для расчета коэффициентов полинома (уравнения в квадратных скобках отражают симметричность графа и являются повторениями; n_i – число значимых уравнений в таблице)

а) $i = 1, n_1 = 3$

j	Общий вид уравнения
1	0
2	$C_{1,2} = C_{2,1}$
...	...
5	$C_{1,5} = C_{3,5} \cdot C_{4,5}$
6	$C_{1,6} = C_{1,5} \cdot C_{5,6}$

б) $i = 2, n_2 = 2$

j	Общий вид уравнения
1	$[C_{2,1} = C_{1,2}]$
2	0
...	...
5	$C_{2,5} = C_{2,1} \cdot C_{1,5}$
6	$C_{2,6} = C_{2,5} \cdot C_{5,6}$

в) $i = 3, n_1 = 4$

j	Общий вид уравнения
1	$C_{3,1} = C_{1,3}^4$
2	$C_{3,2} = C_{2,3}^4$
...	...
5	$C_{3,5} = C_{5,3}$
6	$C_{3,6} = C_{3,5} \cdot C_{5,6}$

г) $i = 4, n_2 = 2$

j	Общий вид уравнения
...	...
5	$C_{4,5} = C_{5,4}$
6	$C_{4,6} = C_{4,5} \cdot C_{5,6}$
...	...

Продолжение таблицы 6.13

д) $i = 5, n_5 = 3$

j	Общий вид уравнения
...	...
3	$[C_{3,5} = C_{5,3}]$
4	$[C_{4,5} = C_{5,4}]$
6	$C_{5,6} = C_{6,5}$
9	$C_{5,9} = C_{5,6} \cdot C_{6,9}$
10	$C_{5,10} = C_{5,6} \cdot C_{6,10}$

е) $i = 6, n_6 = 3$

j	Общий вид уравнения
...	...
9	$C_{6,9} = C_{6,10} \cdot C_{10,9}$
10	$C_{6,10} = C_{6,10} \cdot C_{9,10}$
11	$C_{6,11} = C_{11,6}$
...	...

ж) $i = 7, n_7 = 4$

j	Общий вид уравнения
...	...
8	$C_{7,8} = C_{7,6} \cdot C_{6,8}$
9	$C_{7,9} = C_{7,6} \cdot C_{6,9}$
10	$C_{7,10} = C_{7,6} \cdot C_{6,10}$
11	$C_{7,11} = C_{7,6} \cdot C_{6,11}$
...	...

з) $i = 8, n_8 = 0$

j	Общий вид уравнения
...	...
...	...
6	$[C_{8,6} = C_{6,8}]$
...	...
...	...

и) $i = 9, n_9 = 1$

j	Общий вид уравнения
...	...
9	0
10	$C_{9,10} = C_{10,9}$
...	...

к) $i = 10, n_{10} = 0$

j	Общий вид уравнения
...	...
9	$[C_{10,9} = C_{9,10}]$
10	0
...	...

Продолжение таблицы 6.13

л) $i = 11, n_{11} = 0$

j	Общий вид уравнения
...	...
6	$[C_{11,6} = C_{6,11}]$
...	...

Очевидно, если все функции $\pi_{1,i}(x) \neq 0 \quad \{i = 1, 2, \dots, 11\}$, то множество $\{1, 2, \dots, 11\}$ подразделяется этими функциями на 11 равных частей. Тогда все функции $\pi_{i,j}$ принимают вполне определенное однозначное соответствие по аргументу x .

В равной степени это относится и к функции $\pi_{i,j}^*$.

Если имеются фиксированные подстановки $g(x)$, приводящие исходный граф $\pi_{i,j}$ к некоторому результирующему $\pi_{i,j}^*$, то мы вправе записать, что

$$\pi^*(x, y) = \pi[g(x), g(y)].$$

Это уравнение относится ко всем элементам матрицы смежности исходного симметрического графа в области $(i = 1, 2, \dots, 11)$. Общее правило таково: если хотя бы в одной из подсистем обнаружится 11 отличных от нуля функций, то изоморфизм исходного и результирующего графов доказан.

В нашем случае количество функций в подсистемах составляет по 8.

Для исходной системы рассмотрим симплекс

$$\pi_{0,0}^*(x) \cdot \pi_{1,1}^*(x)$$

при условии, если $\pi_{1,1}^* \neq 0$. В противном случае рассматривается симплекс $\pi_{0,0}^*(x) \cdot \pi_{1,2}^*(x)$. Здесь $\pi_{0,0}^*(x)$ – является функцией сравнения. Рассматриваем следующие варианты:

а) если одновременно выполняются условия $\pi_{0,0}^*(x) \cdot \pi_{1,1}^*(x) \cong \pi_{0,0}^*(x)$ и $\pi_{0,0}^*(x) \cdot \pi_{1,1}^*(x) \cong \pi_{1,1}^*(x)$, то функция $\pi_{0,0}^*(x)$ в исходном графе исключается из дальнейшего сравнения;

б) если выполняется только $\pi_{0,0}^*(x) \cdot \pi_{1,1}^*(x) \cong \pi_{0,0}^*(x)$, то из результирующей системы исключается $\pi_{1,1}^*(x)$ и заменяется новым симплексом так, что

$$\pi_{0,0}^*(x) \cdot [\pi_{1,1}^*(x) + \pi_{0,0}^*(x)].$$

При этом число результирующих функций уменьшится на единицу. Если общее число результирующих функций при таких действиях достигнет 6, то остальные 5 функций исходного графа определяют мощность выбора в процессе изоморфного превращения графов;

в) если только $\pi_{0,0}^*(x) \cdot \pi_{1,1}^*(x) \cong \pi_{1,1}^*(x)$, то исходную систему оставляем без изменений, а замена относится только к $\pi_{0,0}^*(x)$. После этого операцию сравнения продолжаем, начиная с рассмотрения

$$[\pi_{0,0}^*(x) + \pi_{1,1}^*(x)] \cdot \pi_{1,2}^*(x);$$

г) если симплекс $\pi_{0,0}^*(x) \cdot \pi_{1,1}^*(x)$ не совпадает ни с одной из исходных функций, то из результирующего графа исключаем $\pi_{1,1}^*(x)$. При этом число функций результирующей сис-

темы также уменьшится на единицу. Функцию сравнения $\pi_{0,0}^*(x)$ при этом заменяем на

$$\pi_{0,0}^*(x) + \pi_{0,0}^*(x) \cdot \pi_{1,1}^*(x).$$

Данное выражение становится функцией сравнения.

В результате реализации такого алгоритма получаем некоторое разбиение исходного множества $\{1, 2, \dots, 11\}$ на ряд непересекающихся подмножеств, каждое из которых изоморфно исходному, что и требовалось получить.

Результаты расчетов по изложенному алгоритму последовательно представлены в таблицах 6.14 и 6.15. Морфологические данные результирующего графа представлены в таблице 6.16.

Таблица 6.14 – Матрица коэффициентов изоморфизма графа
а)

	Коэффициент изоморфизма $C_{i,j}$										
i, j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0,67	–	–	1,54	0,52	–	–	–	–	–
2	0,67	0	–	–	1,78	0,85	–	–	–	–	–
3	0,09	0,27	1	–	0,62	0,11	–	–	–	–	–
4	–	–	0,53	1	1,17	1,22	–	0,20	0,67	–	–
5	–	–	2,01	0,52	1	3,13	–	–	1,27	1,07	0,94
6	–	–	–	–	–	1	–	0,44	0,76	1,22	0,45
7	–	–	–	–	–	–	1	0,25	0,36	0,22	0,10
8	–	–	–	–	–	0,24	–	1	–	–	–
9	–	–	–	–	–	–	–	0,43	0	0,47	–
10	–	–	–	–	–	–	–	0,42	0,31	0	0,04
11	–	–	–	–	–	0,02	–	–	–	–	1
\sum_i	0,76	0,94	3,54	1,52	6,11	6,09	1,00	2,74	3,37	2,98	2,53

Продолжение таблицы 6.14

б)

	Коэффициент изоморфизма $C_{i,j}$										
i, j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0,43	–	–	1,33	0,97	–	–	–	–	–
2	0,43	0	–	–	1,55	1,32	–	–	–	–	–
3	0,05	0,13	1	–	1,33	1,98	–	–	–	–	–
4	–	–	0,22	1	1,24	1,52	–	0,30	0,51	–	–
5	–	–	1,92	0,53	1	2,96	–	2,07	0,33	0,71	0,42
6	–	–	–	–	–	1	–	0,36	1,38	0,75	0,38
7	–	–	–	–	–	–	1	0,33	0,31	0,18	0,11
8	–	–	–	–	–	0,24	–	1	–	–	–
9	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0,90	–
10	–	–	–	–	–	–	–	0,23	0,53	0	0,01
11	–	–	–	–	–	0,021	–	–	–	–	1
\sum_i	0,48	0,56	3,14	1,53	6,45	10,0	1	4,29	3,06	2,54	1,92

в)

	Коэффициент изоморфизма $C_{i,j}$										
i, j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0,43	–	–	1,09	1,21	–	–	–	–	–
2	0,43	0	–	–	1,35	1,52	–	–	–	–	–
3	–	–	1	–	1,74	1,75	–	–	–	–	–
4	–	–	–	1	1,93	1,86	–	–	–	–	–
5	–	–	1,74	0,53	1	2,54	–	4,12	–	–	0,011
6	–	–	–	–	–	1	–	0,24	1,86	0,77	–
7	–	–	–	–	–	–	1	0,37	0,44	0,012	0,11
8	–	–	–	–	–	0,24	–	1	–	–	–
9	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0,90	–
10	–	–	–	–	–	–	–	–	0,77	0	–
11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1
\sum_i	0,43	0,43	2,74	1,53	7,11	10,1	1	5,73	3,07	1,68	1,12

Таблица 6.15 – Матрица суммирования коэффициентов

$$\sum_{i=1}^{11} C_{i,j}$$

<i>i</i>	C_{Σ}
1	2,73
2	3,30
3	4,49
4	4,79
5	9,94
6	3,87
7	1,93
8	1,24
9	0,90
10	0,77
11	1,00

Если принимать во внимание, что в матрице индекс *i* обозначает вершину, откуда исходит искомая дуга графа, а индекс *j* – вершину, куда входит искомая дуга, следует считать, что суммарный коэффициент $\sum_{j=1}^{11} C_{i,j}$ отражает интегральную функцию следствий некоторых воздействий, которые отражены дугой (*i, j*). Поэтому можно сделать следующие выводы.

В результате формализованных *S*-преобразований результирующая модель потоков серы в доменном производстве претерпевает существенные изменения. Они относятся, в первую очередь, к их перераспределению между сырьевыми материалами доменной плавки. В частности, модель позволяет осуществить мероприятия по удалению серы из сырья на 18–29 %. При этом доля серы в твердой фазе увеличивается в 1,16 раза, а в жидкой фазе – в 1,66.

Таблица 6.16 – Морфологическая таблица результирующего графа движения серы в доменном производстве

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание серы	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания серы в компонентах
1	2	3	4
1	Сырая железная руда	1, 5	Поверхностный переход серы между рудой и твердой фазой шихты выше уровня лещади до равновесной концентрации
		1, 2	Поверхностный переход серы между рудой и агломератом до равновесной концентрации
2	Агломерат	2, 5	Поверхностный переход серы между агломератом и твердой фазой шихты выше уровня лещади до равновесной концентрации
		2, 1	Поверхностный переход серы между агломератом и рудой до равновесной концентрации
3	Кокс доменный	3, 5	Поверхностный переход серы между коксом и твердой фазой шихты выше уровня лещади до равновесной концентрации

Продолжение таблицы 6.16

1	2	3	4
4	Известняк	4, 5	Поверхностный переход серы между известняком и твердой фазой шихты выше уровня лещади до равновесной концентрации
5	Твердая фаза доменной шихты	5, 6	Изменение концентрации серы при переходе шихты из твердого в жидкое состояние
		5, 8	Поверхностный переход серы в виде окислов от твердой фазы в колошниковый газ
6	Жидкая фаза доменной шихты	6, 8	Равновесный переход серы из жидкой фазы шихты в колошниковый газ
		6, 9	Равновесный переход серы из жидкой фазы шихты в доменный шлак
		6, 10	Равновесный переход серы из жидкой фазы шихты в чугуны
7	Природный газ и мазут в дутье	7, 5	Переход серы мазута в твердую фазу доменной шихты выше лещади
		7, 6	Переход серы мазута в жидкую фазу доменной шихты ниже лещади

Продолжение таблицы 6.16

1	2	3	4
8	Колошниковый газ доменной печи	–	–
9	Доменный шлак жидкий	9, 10	Равновесный переход серы из доменного шлака в чугун
10	Чугун жидкий	10, 9	Равновесный переход серы из доменного шлака в чугун
11	Элементы футеровки доменной печи	–	–

Распределение серы между продуктами плавки носит неравномерный характер. Если в исходной модели соотношение серы между чугуном, шлаком и колошниковым газом составляет 1 : 1,23 : 1,09, то в результирующей модели это соотношение составляет 1 : 0,54 : 0,29. Иными словами, изменения в технологии должны обеспечить существенное увеличение серосодержащих компонентов в колошниковом газе, в меньшей мере – в шлаке и совсем в небольших количествах – в чугуне.

В свою очередь, суммарный коэффициент вида $\sum_{i=1}^{11} C_{i,j}$

отражает интегральную функцию причин некоторых воздействий, которые отражены дугой (i, j) . Тогда зависимость

$\sum_{i=1}^{11} C_{i,j} = f(i)$ имеет вид ярко выраженного экстремума. При-

чем его максимум приходится на пятую вершину, т. е. максимальное содержание серы в доменной шихте сохраняется в

твердой фазе перерабатываемого сырья. При переходе к жидкой фазе суммарная функция серосодержания в шихте снижается сразу в 2,57 раза. При этом, например, суммарное содержание серы в колошниковом газе увеличивается в 3,0 раза.

Как следует из таблицы 6.15, наиболее активной средой для движения серы между компонентами плавки является твердая шихта. Здесь суммарный коэффициент $C_{S,j} = 9,94$ самый большой из всех $\sum_j C_i$.

Представляет интерес распределение серы, поступающей в колошниковый газ, шлак и чугун. В математической модели появляется еще одно ребро – $|5, 8|$, которое отражает материальный поток серы в направлении колошникового газа от твердой части шихты. Это означает, что если в исходной модели твердая шихта не является источником серы в газе и уходит в чугун и шлак в пропорции 1,19 : 1, то в результирующей модели напротив, сера твердой части шихты полностью переходит в колошниковый газ и практически не должна накапливаться в шлаке и чугуне. Со стороны жидкой фазы доменной плавки на уровне низа лещади печи в исходной модели распределение серы между газом, шлаком и чугуном находится в соотношении 1 : 1,73 : 2,77. В результате S -преобразования получаем условия, при которых необходимо распределение серы между этими компонентами в пропорции 1 : 7,75 : 3,21. Т. е. математическая модель предусматривает такие условия ведения процесса, при которых максимум серы попадает в колошниковый газ от твердой части доменной шихты, а в шлак удаляется максимум серы из жидкой части шихты. При этом минимизируется содержание серы в основном продукте – чугуне.

Еще одна особенность процесса, соответствующего результирующей модели, заключается в том, что отсекается

поток серы в направлении накопления в кладке доменной печи. Сложно найти подобное техническое решение, однако, оно должно быть, если прогнозируется математической моделью. Об этом же свидетельствует и значение коэффициента $C_{6,11} = 0$ из таблицы 6.14, в.

Таким образом, синтезированная система перераспределения серы между компонентами сырьевой, производственной баз и базой отходов такова, что способствует равномерному распределению серы между компонентами сырья, но далее, сера накапливается в твердой части шихты и стремится уйти с доменным газом, оставив минимум серы в шлаке и еще меньше – в чугуне.

6.5. Графопостроительная модель поведения серы в мартеновском переделе

В качестве еще одного примера рассмотрим движение серы через систему шлак-металл в период расплава мартеновской шихты.

Математическая модель движения серы в период расплава ванны мартеновской печи показана на рис. 6.9. Морфологическая таблица орграфа представлена в таблице 6.17. Следует отметить, что функциональные свойства, относящиеся к дугам графа, здесь отражают физико-химические процессы, происходящие в мартеновской печи.

В качестве весовых коэффициентов вершин орграфа примем коэффициенты активности тех или иных компонентов в шлаке по отношению к сере. А в качестве весовых коэффициентов дуг можно принять константы распределения серы в шлаке. Например, по предложению А. М. Самарина такая константа рассчитывается как

$$k_S = \frac{\alpha_{\text{Fe}^{++}} \alpha_{\text{S}^{--}}}{\alpha'_{\text{FeS}}},$$

ГЛАВА 6

где $\alpha_{\text{Fe}^{++}}$ и $\alpha_{\text{S}^{--}}$ – активность ионов железа и серы в шлаке;

α'_{FeS} – активность FeS в металле.

И так далее, для всех компонентов – марганца, магния и др.

Например, в шлаках, не имеющих кремнезема, активность железа равна его молярной доле, т. е. $\alpha_{\text{Fe}^{++}} = N_{\text{Fe}^{++}}$.

И значит, $\gamma_{\text{Fe}^{++}} = 1$.

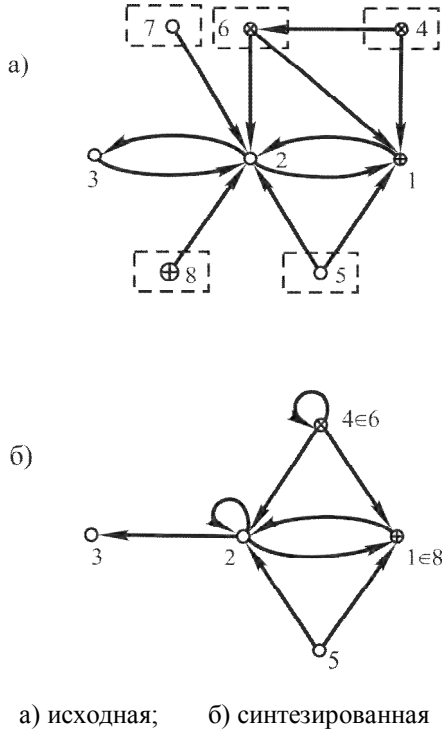


Рисунок 6.9 – Математическая модель сероудаления при расплаве ванны мартеновской печи

Основной составляющей в модели является сера в трех фазах – металле, шлаке, печной атмосфере. Причем из моде-

ли явно следует, что основным накопителем серы является мартеновский шлак. На первом этапе плавления шлак уносит до 50 % всего шлака, попадающего в ванну с сырьевыми материалами.

Таблица 6.17 – Морфологическая таблица оргграфа движения серы при расплаве шихты в мартеновской печи

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание серы	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания серы в компонентах
1	2	3	4
1	Сера в металле	1, 2	Движение серы из металла в шлак
2	Сера в шлаке	2, 1	Движение серы из шлака в металл
		2, 3	Движение серы из шлака в печную атмосферу
3	Сера в печной атмосфере	3, 2	Движение серы из газов в шлак
4	Марганец в чугуна	4, 1	Переход марганца в металл при заливке чугуна
		4, 6	Переход марганца в шлак при заливке чугуна
5	Основность первичного шлака	5, 1	Изменение активности серы в металле в зависимости от основности шлака

Продолжение таблицы 6.17

1	2	3	4
		5, 2	Изменение активности серы в шлаке в зависимости от основности шлака
6	Марганец в шлаке	6, 1	Изменение содержания серы в металле в зависимости от содержания марганца в шлаке
		6, 2	Изменение содержания серы в шлаке в зависимости от содержания марганца в шлаке
7	Углерод в металле	7, 2	Изменение активности серы в шлаке в зависимости от содержания углерода в металле
8	Сера в скрапе	8, 2	Растворение скрапа

В модели пунктиром обозначены пять вершин (4), (5), (6), (7) и (8), для которых можно определить свойство гомеоморфизма через их влияние на активность серы в шлаке. В частности, шлаки с высоким содержанием MnO способны концентрировать в себе большое количество серы. По данным А. Н. Морозова, чем выше содержание закиси марганца в шлаке, тем выше активность и выше коэффициент распределения серы в шлак. С другой стороны, повышенное содержание углерода в металле также способствует повышению здесь активности серы. Эти два механизма в основном определяют гомеоморфизм на указанных выше этапах движения

серы во время плавления шихты – марганец (от чугуна до шлака), сера (от чугуна до скрапа) и углерод на всем протяжении расплава.

Технологией предусмотрено, что в первичном шлаке накапливается максимальная часть серы, поступившей в печь. С технологической точки зрения это хорошо. Рассмотрим эту проблему с позиций эффективности отходообразования.

По данным И. И. Борнацкого, долго и успешно занимавшегося исследованиями поведения серы в мартеновском производстве, с повышением содержания марганца в чугуне в нем уменьшается содержание серы, что очень важно для периода расплава ванны мартеновской печи. Это не только способствует снижению содержания серы в металле после заливки чугуна в печь, но и косвенно – снижению серы в первичном шлаке.

Так как первичный шлак стремятся сразу удалить из печи, то с ним удаляется в отходы большая часть серы, поступившей в мартеновскую печь с чугуном. При расплаве шихты иногда наблюдается повышение содержания серы в металле за счет ее поступления из печной атмосферы или из скрапа (вершина (8)) с заведомо завышенным содержанием серы. Тем не менее, большая часть этой серы попадает в первичный шлак и удаляется из печи. Коэффициент распределения серы в этот период плавки находится в пределах 1,96–4,35 [11].

В первый момент после расплава ванны после заливки чугуна содержание углерода в ванне максимальное. Это способствует переходу серы в шлак.

В отношении магния не существует достоверных данных о влиянии этого элемента на активность серы в шлаке. По некоторым данным (А. М. Самарин), окись магния способствует снижению обессеривающей способности первичного шлака. По крайней мере, тепловой эффект образования MgS несколько меньше, чем, например, для CaS (соответственно 351,5 кДж/моль и 458,5 кДж/моль), что свидетельству-

ет о меньшей обессеривающей способности для окиси магния.

Гомеоморфизм указанных выше вершин является основой для того, чтобы, используя методы φ -преобразования Н. П. Хоменко, получить новые технологичные материалопотоки, частично или полностью свободные от присутствия серы. Мы покажем только два варианта φ -преобразований, на основании которых построим иные способы десульфурации и движения серы на данном этапе металлургического производства.

Объединение явно гомеоморфных вершин (4) и (6) предполагает условие, когда марганец чугуна стремится к максимальному усвоению первичным шлаком в виде окисла. Осуществляется это за счет замкнутой на обобщенную вершину дуги $|4, 6|$. Дуги $|4, 1| \cup |6, 1|$ несут формальную сопряженную нагрузку. Весовой коэффициент такой сопряженной дуги имеет вид обобщенной константы распределения марганца между чугуном и шлаком при расплаве первого:

$$k_S^{\text{Mn}} = \frac{\alpha_{\text{Mn}^{++}} \alpha_{\text{S}^{--}}}{\alpha'_{\text{MnS}}},$$

где $\alpha_{\text{Mn}^{++}}$ – активность ионов марганца в шлаке;

α'_{MnS} – активность MnS в чугуне.

Вторая пара гомеоморфных вершин вне сомнения принадлежит вершинам (1) и (8), т. е. металлической ванне и металлическому скрапу ввиду адекватности физико-химических свойств. Переход серы из скрапа в шлак, отраженный в весовой функции дуги $|8, 2|$, сопряжен с переходом серы металлической ванны в шлак. Обобщенная весовая функция дуги $|8, 2| \cup |1, 2|$ в этом случае имеет вид:

$$k_S^{\text{Fe}} = \frac{\alpha'_{\text{Fe}^{++}} \alpha_{\text{S}^{--}}}{\alpha''_{\text{FeS}}},$$

где $\alpha'_{\text{Fe}^{++}}$ – активность ионов железа в шлаке;

α''_{FeS} – обобщенная активность FeS в металле.

И, наконец, висячая вершина (7), отражающая влияние углерода в металле на усвоение серы в шлаке, безусловно, зависит от энергетики ванны. При поступлении в печь большого количества чугуна возрастает роль микроэзотермических процессов на границе чугун-шлак за счет выгорания углерода при продувке ванны кислородом. Эти температурные процессы способствуют развитию активности того же марганца и тем самым влияют на содержание серы в металле и шлаке. Замкнутая на вершину $2 \equiv 7$ дуга $|2 \equiv 7, 2 \equiv 7|$ отражает этот процесс с весовым коэффициентом

$$k_S^{\text{C}} = \frac{\alpha_{\text{C}^{++}} \alpha_{\text{S}^{--}}}{\alpha'_{\text{CS}}},$$

где $\alpha_{\text{C}^{++}}$ – активность ионов углерода;

α'_{CS} – активность CS в металле.

Синтезированный оргграф изображен на рис. 6.9, б, а морфологическая таблица графа представлена ниже (табл. 6.18).

В перспективе, в условиях микроэзотермических реакций на границе металл-шлак, можно рассчитывать, что найдется механизм, обеспечивающий необратимость перехода серы в атмосферу печи. Об этом свидетельствует объединенная дуга $|2, 3| \cup |3, 2|$. Ее весовая функция будет определяться только соотношением активности ионов серы в шлаке при относительно низких температурах газовой фазы.

Это обусловит необратимость процессов избавления от серы в длинной цепи металлургических процессов.

Таблица 6.18 – Морфологическая таблица синтезированного графа движения серы при расплаве шихты в мартеновской печи

Вершины графа		Дуги графа	
Обозначение	Наименование компонента, в котором изменяется содержание серы	Обозначение	Наименование функции, которая приводит к изменению содержания серы в компонентах
1	2	3	4
1 ≡ 8	Сера в металлической фазе	$ 1, 2 \equiv \equiv 8, 2 $	Движение серы из металлической фазы в шлак
2	Сера в шлаке	$ 2, 1 $	Движение серы из шлака в металл
		$ 2, 3 $	Движение серы из шлака в печную атмосферу
		$ 2, 2 $	Микроэкзотермические реакции на границе металл-шлак
3	Сера в печной атмосфере	–	–
4 ≡ 6	Марганец на границе чугуна и шлака	$ 4 \equiv 6, 1 $	Переход марганца в шлак при заливке чугуна
		$ 4 \equiv 6, 2 $	Изменение содержания серы в зависимости от марганца в шлаке
		$ 4 \equiv 6, $ $ 4 \equiv 6 $	Влияние микроэкзотермических реакций на содержание серы в металлической и шлаковой фазах

Продолжение таблицы 6.18

1	2	3	4
5	Основность первичного шлака	$ 5, 1 \equiv 8 $	Изменение активности серы в металле в зависимости от основности шлака
		$ 5, 2 $	Изменение активности серы в шлаке в зависимости от основности шлака

Основной вывод, который удается сделать в результате анализа синтезированных графовых структур, состоит в том, что в период расплава сталеплавильной ванны и наведения первичного шлака основная часть серы из жидкого чугуна и скрапа устойчиво перемещается в шлак, который затем удаляется. Причем временные рамки этого процесса весьма стабильны и зависят от небольшого количества параметров. Основным механизмом при этом являются неизменные физико-химические процессы, которые являются неизменными при подобных структурных изменениях в системе.

Потоки серы, поступающие в металлургию с минеральным сырьем, имеют свойство перераспределяться между готовой продукцией и отходами, причем пропорция такова, что большая часть серы остается в газовых отходах в виде окислов, сероводорода и пыли. В меньшей степени сера присутствует в твердых шлаках. Еще в меньшей степени – в сопутствующих продуктах. И, учитывая негативное влияние серы на готовую металлопродукцию, технологи всячески стремятся к ее минимизации здесь. Ее остаток в готовом металле не превышает 0,0045 %, что в $\pi_1(x, y)$ раз меньше, чем в исходном минеральном сырье.

6.6. Отходообразование в технологии получения древесного угля

Совершенно иной тип задач, которые позволяет решать теория графов, связан с изменением технологий получения материалов. В основе этих решений, строго говоря, также лежит управление материальными потоками. Однако, при этом важным моментом является возможность глубокого логически-смыслового анализа новых формализованных графопостроительных структур, получаемых при помощи графопреобразований.

Стандартная схема получения древесного угля методом пиролиза относится к самым древним технологиям. В ее основе лежит бескислородный нагрев подготовленного дерева с целью обогащения углеродсодержащими компонентами и удаления летучих газов.

Размельченная древесина аспирационным путем загружается в накопительный бункер и по мере надобности подается в пиролизную камеру.

Внешний нагрев без доступа воздуха осуществляется в двухкамерном агрегате (рис. 6.10). Одна камера (внутренняя – 1) предназначена для загрузки подготовленного древесного сырья (2). Вторая – (внешняя – 3) используется для подачи теплоносителя (4) с целью поддержания необходимого температурного режима во внутренней камере, который обеспечивает процесс пиролиза. На первом этапе осуществляется сушка сырья с удалением паров и некоторых газов из внутренней камеры через клапан (5). Загрузка внутренней камеры осуществляется через бункерное отверстие, закрываемое крышкой (6) при приподнятой внутренней камере до уровня верхней крышки (7) внешней камеры. Такая схема связана с затратами большого количества проточного теплоносителя, выделением отходящих паров и пиролизных газов.

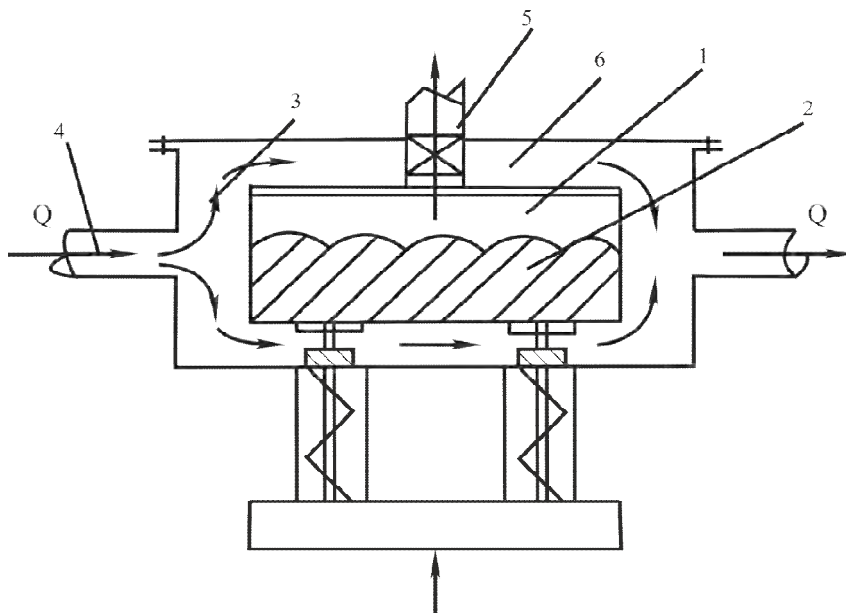


Рисунок 6.10 – Схема устройства для получения древесного угля (обозначения по тексту)

Функциональный орграф такого технологического процесса имеет следующий вид (рис. 6.11). (Морфологическая таблица орграфа представлена в табл. 6.19).

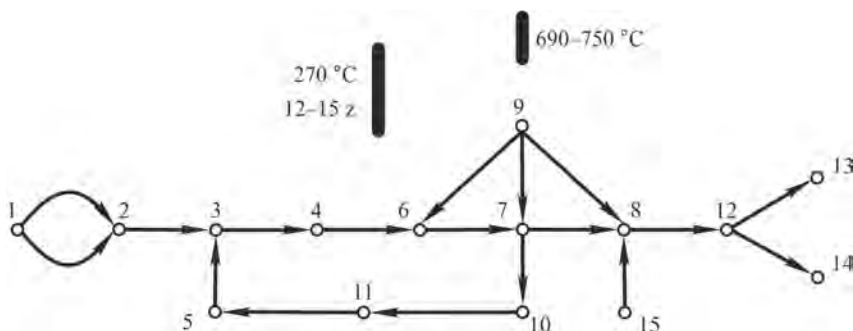


Рисунок 6.11 – Функциональный орграф пиролиза древесного угля

Таблица 6.19 – Морфологическая таблица присвоения функционального графа технологии получения древесного угля

№ вершины	Функция вершины графа	Обозначение ребра	Функция ребра графа
1	2	3	4
1	Исходное сырье (отходы деревообработки)	1–2	Отсев негабарита
2	Подготовленное сырье	1–2	Сепарация стружки
3	Сырье в реакторе	2–3	Загрузка в реактор сырья
4	Высушенное сырье	3–4	Сушка сырья
5	Низкотемпературный теплоноситель	5–3	Сушка в псевдоожиженном слое
6	Стружка при 270 °С	4–6	Нагрев до температуры начала пиролиза
7	Пиролизная камера №1	6–7	Пиролиз (1-й этап)
8	Пиролизная камера №2	7–8	Пиролиз (2-й этап)
9	Высокотемпературный теплоноситель	9–6 9–7 9–8	Последовательная подача теплоносителя для обогрева пиролизных камер
10	Газообразные продукты пиролиза	7–10	Выделение газообразных продуктов пиролиза
11	Очищенные газообразные продукты пиролиза	10–11	Очистка пиролизного газа от сажи

Продолжение таблицы 6.19

1	2	3	4
		11–5	Дожиг отходящего газа
12	Охлажденный древесный уголь	8–12	Охлаждение основного продукта
13	Продукты отсева древесного угля	12–13	Отсев древесной мелочи
14	Готовая продукция	12–14	Выгрузка готовой продукции
15	Бескислородный охладитель	15–8	Подача охладителя в камеру №2

Рассмотрим некоторые причинно-следственные связи функционального орграфа, организующие процессы отходообразования при пиролизе древесного угля в соответствии с методикой, изложенной автором в работе [1]. Поскольку процессы пиролиза связаны, в первую очередь, с тепловыми и химическими преобразованиями, примем их за основу при рассмотрении механизмов этого явления в данной технологии (табл. 6.20).

Таблица 6.20 – Причинно-следственные связи в системе отходообразования при производстве древесного угля

Обозначение причин	Наименование причины	Межгрупповые причинно-следственные связи	
		Тепловая обработка	Химические преобразования
1	2	3	4
C_4	Отсутствие или недостаточные возможности для энергетических преобразований компонентов сырья на микроуровне	E_3, S_2	E_1

Продолжение таблицы 6.20

1	2	3	4
E_1	Отсутствие в системе энергетических ресурсов, способных преобразовать избыточные компоненты сырьевой базы	S_1	S_3, \mathcal{E}_2
E_3	Недостаточная энергетическая проводимость между составляющими частями системы, участвующими в создании отходов, и другими частями системы	S_1, S_3	S_4, \mathcal{E}_3
S_1	Отсутствие в системе минимально необходимого количества частей, способных целенаправленно изменять свойства или состояние компонентов сырьевой базы	–	–
S_3	Отсутствие энергоматериальных ресурсов для расширения функциональности системы и повышения ее идеальности	\mathcal{E}_3	–
\mathcal{E}_3	Влияние планируемой себестоимости основной продукции на качество сырья и номенклатуру отходов	–	–

Схематически механизмы отходообразования при пиролизе древесного угля изображены на рис. 6.12. Сплошными линиями показаны механизмы отходообразования, связанные с чисто тепловыми процессами пиролиза, а пунктирные линии отражают механизмы отходообразования в химических превращениях. Заметим, что почти все причинно-следственные связи этих двух технологических линий пересекаются.



Рисунок 6.12 – Версия механизмов отходообразования при пиролизе древесного угля (по методике [1])

Можно сделать вывод о том, что в основе процессов отходообразования в данной технологии лежат недостаточность и неэффективность используемых энергетических ресурсов и каналов для передачи энергии в технологическую зону (формулы: S_1, E_3, S_2 и S_1, S_3 , см. табл. 6.20). Причем, это относится как к способам подвода тепла, так и к способам бескислородного сжигания первичного древесного мате-

риала (формулы: S_3, \mathcal{E}_2 и S_4, \mathcal{E}_3). Наиболее важными в группах причин являются энергетическая и структурная группы.

Чтобы оптимизировать эти процессы, обратимся к методу формализованных преобразований ориентированных графов. Для этого обратимся к функциональному орграфу (см. рис. 6.11). Висячие вершины орграфа 13, 15 и 10 отражают обратимые отходы в данной технологии и могут быть отнесены, по существу, к гомеоморфным структурам. Простые операции демонтажа висячих вершин Ваховского [12] дают несколько иную смысловую интерпретацию для обеспечивающих их ребер. Весовая функция вершины (10) с учетом процедуры демонтажа вершины (15) и ребра (15–8) принимает вид $g(10') = g(10) - \frac{g(15)}{g(15-8)}$. При этом увеличивается

весовая функция вершины (8):

$$g(8') = g(8) + \frac{g(15) - g(8)}{g(15-8)}. \quad \text{Весовая функция ребра}$$

$$g(15-8)' = g(7-8) \frac{g(8')}{g(8)} - g(15-8) \frac{g(15) - g(8)}{g(8)} = 0. \quad \text{Весовая}$$

$$\text{функция ребра } g(7-10)' = g(7-10) \frac{g(15) - g(8)}{g(8)} \neq 0.$$

Вторая гомеоморфная висячая вершина (13), преобразованная методом демонтажа Ваховского, имеет вид

$$g(13') = g(13) - \frac{g(14)}{g(12-13)} = 0. \quad \text{При этом весовая функция}$$

$$\text{смежного ребра (12-14) становится равной } g(12-14)' = g(12-14) \frac{g(12-13)}{g(12) - g(13)}.$$

Не ссылаясь на элементарные преобразования весовых функций, мы сразу перейдем к выводам. Во-первых, перераспределение весовых функций результирующего графа означает изменение функционального назначения этой части

его структуры. А именно, изменение теплового режима пиролиза, связанного со снижением роли вторичного охладителя и новой весовой функцией $g(15) = 0$ и $g(15-8) = 0$, способствует уменьшению газовых отходов. Использование отходящих газов от внешнего утилизируемого источника позволяет снизить подачу внешнего охладителя до нуля, получая тот же технологический результат. А во-вторых, демонтаж вершины (13) с переносом ее весовой функции на вершину (14) означает резкое снижение отсева мелочи при выгрузке древесного угля. Это может иметь место только при гарантированной сплошности пиролизного слоя и достижении необходимой механической прочности получаемого конечного продукта. Технологически это может быть связано только с изменением теплового режима в пиролизной камере.

Подобная технология, предусматривающая формализованные преобразования орграфа (см. рис. 6.11) как модели технологического процесса, состоит в следующем (рис. 6.13).

Прежде всего, должна быть предусмотрена предварительная подготовка древесного сырья, включающая отсев и сепарацию стружки. При этом обеспечивается оптимальная плотность пиролизного слоя сырья, в частности его рыхлость и газопроницаемость. В качестве теплоносителя предлагается использовать один из отходящих газовых каналов металлургического агрегата, например, газы электродуговой печи. В качестве теплоносителя на первичный обогрев и сушку сырья можно использовать газовые продукты пиролиза в двухкамерной сушильно-топочной печи. Как вариант компенсации потерь от нетехнологичного пиролиза – использовать следы отсева древесного угля при его охлаждении и выгрузке для потребностей аглодоменного процесса, добавляя его, например, в аглошихту или для местных обогревательных топок.

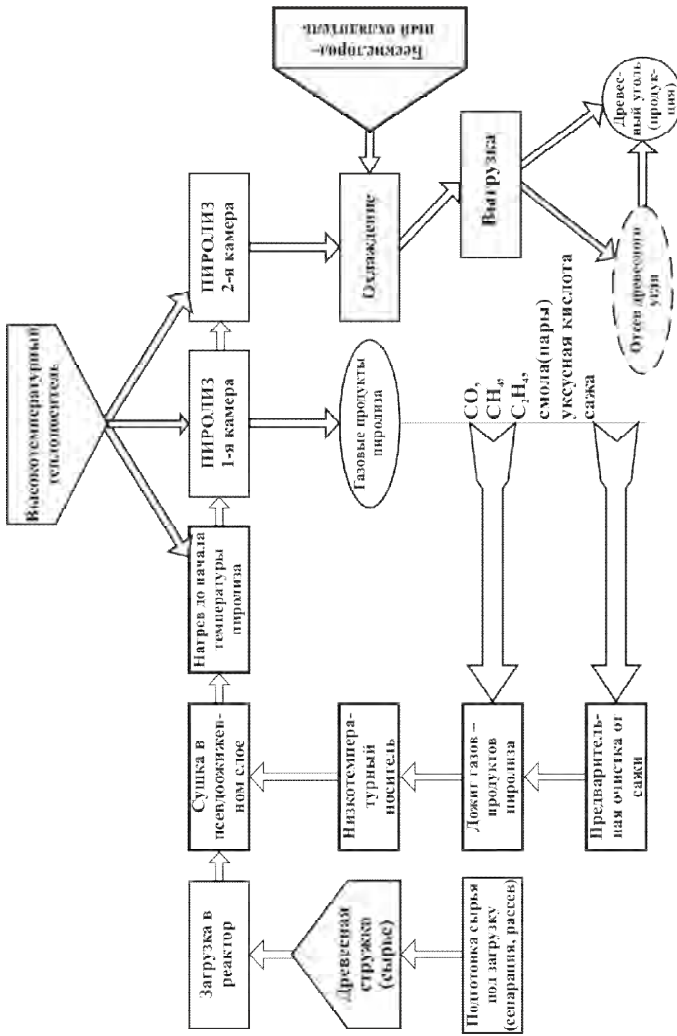


Рисунок 6.13 – Общая схема усовершенствованного технологического процесса пиролиза древесного угля

Таблица 6.21 – Показатели отходообразования в новой и старой технологии пиролиза древесного угля, кг/т древесного угля

Показатели загрязнения	Технология		Кратность снижения
	Существующая	Усовершенствованная	
Сажа	66,7	12,6	5,29
Пыль древесная	0,29	0,24	1,21
Отсев древесного угля	84	16	5,25
Оксид углерода	2,02	0,72	2,81
Метан	0,47	0,36	1,31

Показатели отходности усовершенствованного пиролизного процесса представлены в табл. 6.21. Наибольшая эффективность здесь наблюдается по снижению сажеобразования, резкому уменьшению отсева древесного угля при выгрузке и оксида углерода в результате его дожига. В основном, это обеспечивается за счет рационального использования существующих энергоносителей и увеличения энергопроводимости по отношению к газовому потоку и к сырьевой базе (опилкам).

Таким образом, принципиальная технология пиролиза древесного угля может иметь резервы снижения отходности за счет лучшего использования возможностей предварительной подготовки сырья и использования сопутствующих газов в качестве теплоносителя. Технологически это может быть любой отходящий газ металлургического производства. А в качестве теплоносителя на первичный обогрев и сушку сырья можно использовать газовые продукты собственно пиролиза в двухкамерной сушильно-топочной печи. Такая технология дает существенный выигрыш в снижении сажеобразования, уменьшении отсева древесного угля (в пять раз) и оксида углерода (почти в три раза).

6.7. Преаксидентная диагностика технических систем на примере аварий в системах аммиачного охлаждения

Преаксидентная (предаварийная – термин пришел из оборонной тематики) диагностика технических систем – раздел безопасности, посвященный анализу этих систем на предмет устранения потенциальных аварийных ситуаций:

- на этапе их подготовки к эксплуатации;
- при выполнении планово-предупредительных ремонтов технологического оборудования;
- при возможных конструктивных изменениях в системе;
- при установке нового оборудования, изменяющего параметры технологического процесса;
- при изменении функционального назначения рассматриваемой системы;
- при прогнозировании нештатных ситуаций в работе технической системы, и др.

С этими видами работ чаще всего сталкиваются механические службы предприятий, отвечающие за исправность работы оборудования

В качестве примера рассмотрим одну из таких систем.

Техническая система для промышленного охлаждения пищевых продуктов (рис. 6.14) состоит, например, из накопителя аммиака (1), сквозного коллектора инжекционного типа (2), трех газовых насосов предварительной накачки (3–5), кольцевого аммиакопровода (6), хладоагрегатов непрерывного действия (7), системы взаимной поддержки давления между хладоагрегатами (8) и одноконтурной регулирующей аппаратуры высокого давления (9).

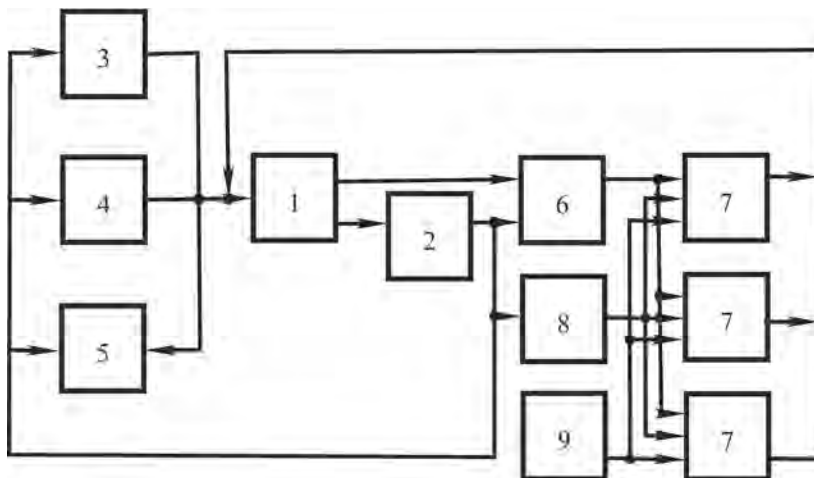


Рисунок 6.14 – Структурная схема системы охлаждения продуктов при помощи аммиака (обозначения по тексту)

Рассмотрим механизм аварийной ситуации, связанной с неорганизованными выбросами аммиака на хладокомбинатах, в результате разгерметизации кольцевого аммиакопровода, который составляет неотъемлемую часть любой аммиачной системы для промышленного охлаждения пищевых продуктов. Структура технической системы кольцевого аммиакопровода включает 11 элементов (табл. 6.22), каждый из которых выполняет свою функцию, в том числе – отрицательную, способствующую разрушению системы (табл. 6.23).

Учитывая то, что нас интересуют именно отрицательные функции x_i -х элементов системы, которые с вероятностью P_n^C могут привести к возникновению аварийной ситуации, рассмотрим модель случайного графа, который описывает систему «кольцевой аммиакопровод». Безусловно, что и вершины, и дуги подобного графа должны быть заданы при помощи системы вероятностных параметров.

Таблица 6.22 – Структура технической системы «кольцевой аммиакопровод»

Обозначение	Наименование элемента
x_0	аммиак жидкий (рабочее тело)
x_1	тюбинг металлический
x_2	оцинкованное внутреннее покрытие тюбинга
x_3	оплетка металлическая
x_4	теплоизоляционное покрытие (стекловата)
x_5	второй слой теплоизоляционного покрытия (асбест листовой)
x_6	крепежные скобы (прут $d = 5$ мм)
x_7	тюбинговые опоры (вертикальная сварная конструкция)
x_8	фундамент опор (железобетонная конструкция)
x_9	провод защитного заземления тюбинга
x_{10}	грунтовое покрытие
x_{11}	воздушная среда

Таблица 6.23 – Отрицательная функциональная нагрузка основных элементов системы «кольцевой аммиакопровод»

Обозначение	Наименование вредной функции
1	2
f_1	Истечение аммиака через сечение тюбинга
f_2	Трение аммиака о внутреннюю поверхность тюбинга
f_3	Охлаждение внутренней стенки тюбинга
f_4	Термические напряжения в теле тюбинга
f_5	Деформация тюбингового пролета

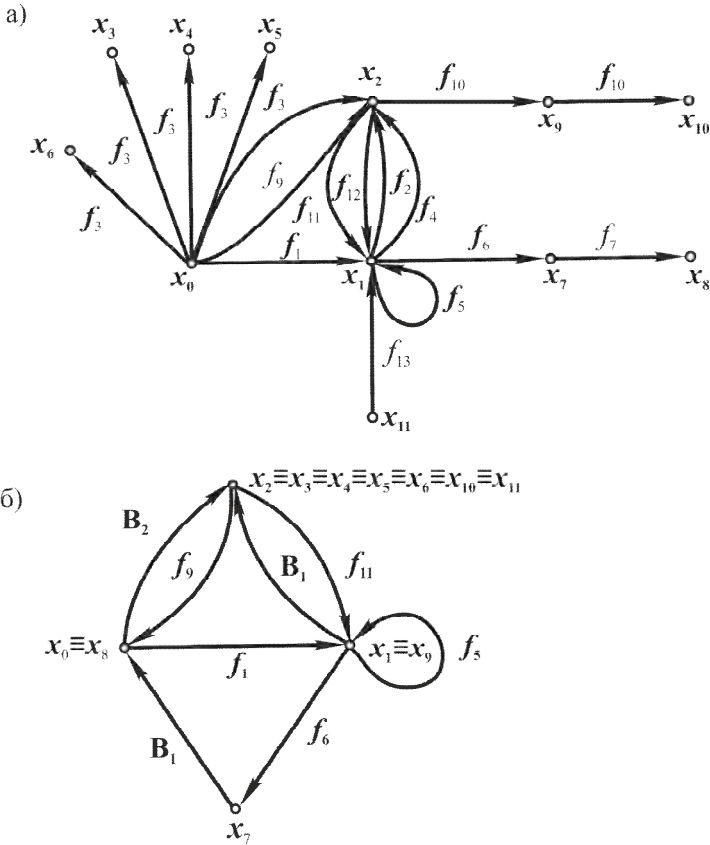
Продолжение таблицы 6.23

1	2
f_6	Нарушение вертикальности тубинговых опор
f_7	Трещинообразование в фундаменте опор
f_8	Разрушение поперечных сварных швов в тубинге
f_9	Накопление статических зарядов на поверхности тубинга
f_{10}	Истекание статических зарядов в землю
f_{11}	Возникновение термоэдс на границе железо-цинк при их охлаждении
f_{12}	Появление эффекта Зеебека на границе железо-цинк
f_{13}	Эффект электрокоррозии на поверхности тубинга
f_{14}	Эффект электрокоррозии на фундаментальных опорах

Графопостроительная модель аварийной ситуации в подсистеме «кольцевой аммиакопровод» системы промышленного охлаждения пищевых продуктов представлена на рис. 6.15, а. В основе модели бинарные отображения общего вида $F : \alpha_i^X \rightarrow \alpha_{i+1}^X$, где F – та функция действия, приводящая систему из состояния α_i^X в последующее состояние α_{i+1}^X , но таким образом, что различия между α_i^X и α_{i+1}^X носят импульсный, скачкообразный характер. И именно такая функция является причиной аварийной ситуации.

Особенностью этой модели является наличие висячих вершин последовательно $x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_{10}, x_{11}$. Эти состоя-

ния системы отличаются ограниченной управляемостью элементов, которые определяют эти состояния. Как правило, при синтезных операциях над графами от висячих вершин принято избавляться.



а) прогнозируемая; б) синтезированная

Рисунок 6.15 – Графовая модель аммиакопровода

Для этого существует, в частности, методика демонтажа висячих вершин Ваховского, позволяющая устранить висячую вершину с передачей ее весовой функции предыдущей к ней вершине.

Каждая из исходных висячих вершин обладает свойствами функциональной гомеоморфности по отношению к другим. В частности, группы гомеоморфных вершин – (x_0, x_8) ; $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{10}, x_{11})$; (x_1, x_9) (табл. 6.22). Поэтому здесь удобно применить алгоритм формализованных φ -преобразований графовых структур Н. П. Хоменко. Кроме того, задаются весовые функции каждой вершины в виде множества вероятностей

$$\left(\overbrace{P_0^{C_1}, P_8^{C_1}}^1; \underbrace{P_2^{C_2}, P_3^{C_2}, P_4^{C_2}, P_5^{C_2}, P_6^{C_2}, P_{10}^{C_2}, P_{11}^{C_2}}_2; \overbrace{P_1^{C_3}, P_9^{C_3}}^3 \right).$$

Алгоритм формализованных преобразований графовых структур на первом этапе включает φ -преобразования гомеоморфных структур вершин

$$A_1 = x_1 \cup x_9 + x_2 \cup x_{10} + x_2 \cup x_8$$

$$A_2 = x_0 \cup x_4 \cup x_7 + x_3 \cup x_{11}$$

$$A_3 = x_2 \cup x_3 \cup x_4 \cup x_5 \cup x_6$$

и дуг исходного графа

$$b_1 = f_4 \cup f_7 + f_{11} \cup f_{12} + f_3 \cup f_{14},$$

$$\pi_2(\bar{x}, \bar{y})b_2 = f_3.$$

Результирующая графовая модель представлена на рис. 6.15, б. Важным результатом выполненных преобразо-

ваний является цикличность полученной структуры, вплоть до петли на гомеоморфной вершине.

Вначале рассмотрим обобщенные весовые функции дуг b_1 и b_2 . Если вторая из них фактически дублирует функцию f_3 и остается неизменной в качестве функции охлаждения внутренней стенки тьюбинга, то первая функция состоит из объединения вероятности возникновения термических напряжений и микротрещин в теле тьюбинга, связанных с ними термоэлектронноэмиссионных и электрокоррозионных эффектов на поверхности тьюбинга. Такая совокупность с вероятностью до 48 % (рис. 6.16) может привести не только к утечке аммиака, но и к разрушению тьюбинга и потерям как газа, так и других материальных ценностей, которые не подлежат восстановлению и составят отходную часть аварийного производства (табл. 6.24).

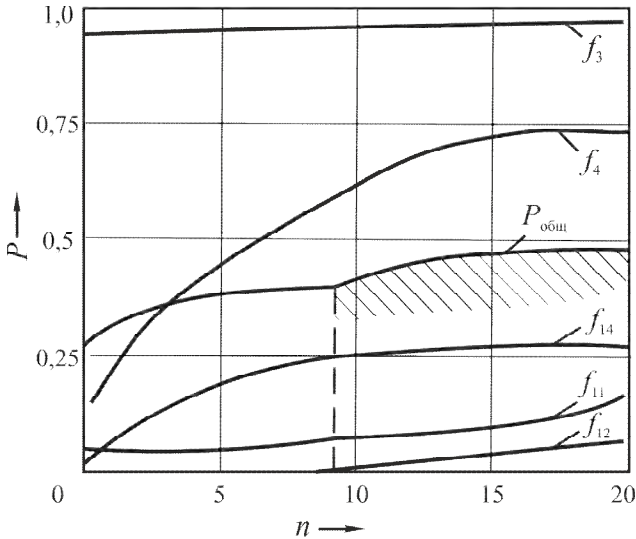


Рисунок 6.16 – Вероятность возникновения аварийной ситуации на аммиакопроводе

Такая вероятность достаточно высока для аварийной ситуации, и с ней невозможно не считаться.

Таблица 6.24 – Примерные потери материалов, связанные с аварийной ситуацией на аммиакопроводе хладокомбината мощностью 40 тыс. т хранимой продукции (по дуге b_1)

№ п/п	Наименование потери (отхода)	Количественная характеристика
1	Аммиак жидкий, тыс. м ³	10,0
2	Металлоконструкции, т	28–30
3	Теплоизоляционные материалы, т	1,8–2,0
4	Железобетонные конструкции, т	62–80
5	Потери по охлаждаемой товарной продукции, % от исходного до окончания ремонта	до 15
6	Отходы при ремонтно-восстановительных работах, т	18–25
7	Суммарный объем отходов (потерь), т	6110–6140
8	Суммарные потери, тыс. грн	214–250

Библиографический список к шестой главе

1. Волошин В. С. Природа отхоодообразования / В. С. Волошин. – Мариуполь : Рената, 2007. – 666 с.
2. Волошин В. С. Отхоодообразование в технологии получения древесного угля / В. С. Волошин // Вісник Приазовського державного технічного університету. – Мариуполь, 2011. – №22. – С. 266–271.
3. Джалилова З. А. Модели воспроизводства и обмена на графе. В сб. : Математические модели экономической динамики / З. А. Джалилова. – Вильнюс, 1982. – С. 42–48.

4. Лаврова О. В. Материальные потоки в логистике / О. В. Лаврова. – Саратов : СГУ, 1995. – 184 с.

5. Хоменко Н. П., Кузьменко В. А. Полудекартово-кронекерово произведение графов / Н. П. Хоменко, В. А. Кузьменко // Тематический сб. Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе. – Канев, 1974. – С. 373–381.

6. Хоменко Н. П. Метод ϕ -перетворення та деякі його застосування / Н. П. Хоменко // Тематичний зб. ϕ -перетворення графів. – Київ : Вид-во ін-та математики АН УРСР, 1973. – С. 35–93.

7. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – М. : Мир, 1987. – 328 с.

8. Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. – М. : Дело, 2002. – 204 с.

9. Воронова Н. А. Десульфурация чугуна магнием / Н. А. Воронова. – М. : Metallurgia, 1990. – 240 с.

10. Товаровский И. Г. Влияние содержания серы в шихте и чугуне на расход кокса / И. Г. Товаровский // Metallургическая и горнорудная промышленность, 1999. – №1 – С. 4–6.

11. Борнацкий И. И. Десульфурация металла / И. И. Борнацкий. – М. : Metallurgia, 1970. – 320 с.

12. Волошин В. С., Семенченко П. М. Методы управления ресурсопотоками в экологических циклах / В. С. Волошин, П. М. Семенченко. – Донецк : Донеччина, 1997. – 72 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Читатель получил возможность познакомиться с весьма интересным в прикладном плане учебным пособием. Насколько оно было полезным, судить не автору, специалисту в области инжиниринга, для которого эта работа в целом была несколько неожиданной и внеплановой. Получив два десятка лет тому назад ряд самостоятельных решений нескольких актуальных задач в области чистой инженерии при помощи наглядной методологии из теории графов, трудно было остановиться, чтобы не продолжить далее эти методические исследования. Именно они лежат в основе этого учебного пособия.

Учебное пособие не является завершенной работой. Бурное развитие математики и ее разделов: топологии, комбинаторики и др. дают основание к тому, что теория графов будет давать исследователям еще не один подобный методический материал, который может быть использован в прикладных задачах. Простой по изложению и наглядный по восприятию метод графопостроительного моделирования в координатах «состояние – функция» не только разнообразных физических, химических, биологических и др. процессов, но и систем (технических, например) может дать еще не одно решение проблемных задач в самых разных областях прикладных наук и соответствующих знаний. Даже тот неполный перечень математических действий, который предложен в книге, дает возможность для их эффективного применения в инженерных задачах. В литературе имеется значительно большее количество материала, который может быть использован для подобных целей. Задача данного пособия – систематизировать хотя бы часть подобного материала и сделать его более доступным для современного инженера.

Приблизить чистую математику в области теории графов к потребностям прикладных наук – именно эта цель преследовалась в данной работе. Насколько она достигнута – решать читателю. Буду рад, если эта книга станет полезной в Ваших исследованиях, дорогой читатель.

Автор

Учебное издание

В. С. ВОЛОШИН

Теория графов в инженерных расчетах

Ответственный за выпуск: Кришталь А. И.

Верстка: Семенко В. О.

Оформление обложки: Долгая М. В.

Подписано в печать 03.06.2016.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная.

Усл. печ. л 12.44

Тираж 200 экз.

ИД «Освита Украины»

ФЛ-П Маслаков Руслан Алексеевич

Свидетельство о внесении субъекта издательского дела

в государственный реестр издателей, изготовителей

и распространителей издательской продукции

ДК №4726 от 29.05.2014 г.

Издательский дом «Освита Украины»

приглашает авторов к сотрудничеству по выпуску

изданий, относящихся к вопросам управления,

модернизации, инновационных процессов, технологий,

методических и методологических аспектов

образования и учебного процесса

в высших учебных заведениях.

Предоставляем весь спектр издательских

и полиграфических услуг.

Волошин Вячеслав Степанович – доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, академик Международной академии наук экологии и безопасности жизнедеятельности, почетный член Академии экономических наук Украины, действительный член Нью-Йоркской академии наук, ректор Приазовского государственного технического университета, заведующий кафедрой охраны труда и окружающей среды ПГТУ. Область научных интересов – экология больших городов и промышленных регионов, проблемы сложных эколого-экономических систем, проблемы отходообразования в производственных системах, аварийная диагностика технических систем. Автор и соавтор семнадцати монографий и учебников по направлениям научной деятельности.