

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Київський національний університет будівництва і архітектури

**МАТЕМАТИЧНЕ ОБРОБЛЕННЯ  
ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**

**ЧАСТИНА 3**

**КОРЕЛАТНИЙ СПОСІБ ВИРІВНЮВАННЯ  
АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ**

Методичні вказівки  
до виконання практичних робіт  
для здобувачів першого (бакалаврського)  
рівня вищої освіти спеціальності  
G18 «Геодезія та землеустрій»

Київ 2026

УДК 528.4  
ББК 2612  
В65

Укладачі :О.Й. Кузьмич, канд. техн. наук, професор;  
О.П. Ісаєв, канд. техн. наук, доцент;  
П.О. Чуланов, старший викладач;  
С.А. Бондар, асистент

Рецензент: О.В. Адаменко, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск Р.А. Дем'яненко, канд. техн. наук,  
доцент

*Затверджено на засіданні кафедри інженерної геодезії,  
протокол № 4 від 17 березня 2026 року.*

Видається в авторській редакції

**Математичне** оброблення геодезичних вимірів. Ч.3. Корелатний  
В65 спосіб вирівнювання. Апроксимація функцій. Методичні вказівки до  
виконання практичних робіт / Уклад.: О.Й. Кузьмич, О.П. Ісаєв, П.О.  
Чуланов, С.А. Бондар, - К.: КНУБА, 2026. - 33 с.

Розглянуто методику вирівнювання геодезичних мереж корелатним  
способом та апроксимацію функцій вимірних величин за результатами  
експериментальних досліджень.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої  
освіти спеціальності G18 «Геодезія та землеустрій»

@ КНУБА 2026

## Загальні положення

Мета цих методичних вказівок – надання практичної допомоги для виконання студентами індивідуальних завдань та самостійної роботи, опрацюванні практичних навичок при вирівнюванні планових та висотних геодезичних мереж, апроксимації функцій за результатами експериментальних досліджень, які виникають в практичній діяльності фахівців.

Перед виконанням індивідуальних завдань студент повинен вивчити теоретичний матеріал даного розділу дисципліни “Математичне оброблення геодезичних вимірів”.

Завдання виконуються індивідуально кожним студентом в процесі проведення практичних занять та індивідуальної роботи під контролем викладача в аудиторії та при виконанні самостійної роботи. Робота оформлюється належним чином і захищається кожним студентом.

Кожне завдання включає:

- тему та мету завдання;
- короткі теоретичні та практичні відомості для розв’язання завдання;
- приклад для виконання математичних розрахунків;
- варіанти завдань;
- контрольні запитання;
- посилання на літературу.

Методичні вказівки включають такі індивідуальні завдання:

- 1) Складання математичних умов та умовних рівнянь поправок.
- 2) Вирівнювання мережі нівелірних ходів.
- 3) Апроксимація періодичної функції.
- 4) Апроксимація за методом Чебишева.

Вони складають третій модуль з дисципліни “Математичне оброблення геодезичних вимірів” і є розділом до виконання контрольної роботи.

За несвоєчасне виконання завдань та їх неохайне оформлення оцінка з модуля зменшується.

Формою модульного контролю є розрахунково-графічне оформлення контрольних завдань, письмова або усна відповідь на запитання тестових завдань.

Курс математичного оброблення геодезичних вимірів передбачає виконання курсової роботи за результатами перших трьох модулів, складання іспиту в 3-му семестрі та виконання індивідуальних завдань і заліку в 4-му семестрі.

Іспит проводиться в формі відповідей на тестові завдання. Залік може проводитися як в письмовій формі, так і усно.

Основною метою вивчення дисциплін “Математичне оброблення геодезичних вимірів” є формування знань та умінь вирівнювання геодезичних мереж, апроксимацію функцій вимірних величин за результатами експериментів.

# 1. Корелатний спосіб вирівнювання

## 1.1. Прийняті позначення

$X_i, Y_i, H_i$	–	істинні значення вимірюваних величин;
$x_i, y_i, h_i$	–	результати вимірів;
$\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{h}_i$	–	вирівнені значення виміряних величин;
$v_i$	–	поправки до виміряних величин;
$w_i$	–	нев'язка математичних умов;
$K_i$	–	корелати;
$b_{ij}$	–	коефіцієнти умовних рівнянь поправок;
$N_{ij}$	–	коефіцієнти нормальних рівнянь.

## 1.2. Порядок вирівнювання

Задача вирівнювання планових і висотних геодезичних мереж корелатним способом розв'язується в такій послідовності:

1. Складають схему геодезичної мережі і виписують вихідні дані (координати, довжини базисів та вихідних дирекційних кутів, позначки точок) і виміряні величини.

2. Значенням виміряних величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  надають такі одиниці фізичних величин, щоб значення середніх квадратичних похибок  $m_i$  були близькі до одиниці.

*Наприклад:* лінійні виміри та перевищення виражають у міліметрах, сантиметрах, дециметрах; кутові – в секундах, рідше в хвилинах.

3. Розраховують зворотну вагу результатів вимірів (або їхню вагу) так, щоб вони мали значення близькими до одиниці.

4. Підраховують число незалежних математичних умов за формулою:

$$r = n - k, \quad (1.1)$$

де  $n$  – число виміряних величин;

$k$  – число необхідних невідомих (шуканих величин).

**Примітка:** В планових геодезичних мережах число незалежних математичних умов визначається в залежності від геометричної схеми мережі та виду вихідних і виміряних величин.

5. Вибирають і складають рівняння незалежних математичних умов за формулою:

$$\varphi_i (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0; \quad i = \overrightarrow{1, r}. \quad (1.2)$$

6. Обчислюють коефіцієнти умовних рівнянь поправок за формулою:

$$b_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}; \quad i = \overrightarrow{1, r}; \quad j = \overrightarrow{1, n}. \quad (1.3)$$

7. Обчислюють нев'язки математичних умов за формулою:

$$W_i = \varphi_i (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad i = \overrightarrow{1, r}. \quad (1.4)$$

8. Складають умовні рівняння поправок за формулою:

$$b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \dots + b_{in}v_n + W_i = 0; \quad i = \overrightarrow{1, r}. \quad (1.5)$$

9. Для оцінки точності елементів геодезичної мережі складають вагову функцію від вихідних пунктів до оцінюваного елемента по найкоротшому шляху через виміряні величини:

$$F = F (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.6)$$

10. Обчислюють коефіцієнти вагової функції

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (1.7)$$

11. Після приведення до лінійного виду отримують вагову функцію

$$F = F_0 + f_1v_1 + f_2v_2 + \dots + f_nv_n. \quad (1.8)$$

12. Обчислюють коефіцієнти нормальних рівнянь за формулами:

$$\left. \begin{aligned} N_{ij} &= [b_{ii}b_j]; \text{ – при рівноточних вимірах;} \\ N_{ij} &= [qb_ib_j]; \text{ – при нерівноточних вимірах;} \end{aligned} \right\} . \quad (1.9)$$

*Наприклад:*

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= [qb_1b_1] = q_1b_{11}b_{11} + q_2b_{12}b_{12} + \dots + q_nb_{1n}b_{1n}; \\ N_{12} &= [qb_1b_2] = q_1b_{11}b_{12} + q_2b_{12}b_{22} + \dots + q_nb_{1n}b_{2n}; \end{aligned} \right\} .$$

13. Складають нормальні рівняння

$$\begin{aligned} N_{11}K_1 + N_{12}K_2 + \dots + N_{1r}K_r + W_1 &= 0, \\ N_{21}K_1 + N_{22}K_2 + \dots + N_{2r}K_r + W_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

---


$$N_{r1}K_1 + N_{r2}K_2 + \dots + N_{rr}K_r + W_r = 0.$$

14. Обчислюють перетворені коефіцієнти вагових функцій за формулою

$$N_{ff} = [qff] = q_1f_1f_1 + q_2f_2f_2 + \dots + q_nf_nf_n; \quad (1.11)$$

$$N_{fi} = [qbi] = q_1b_{i1}f_1 + q_2b_{i2}f_2 + \dots + q_nf_inf_n. \quad (1.12)$$

15. Розв'язують нормальні рівняння і визначають значення корелат  $K_1, K_2, \dots, K_r$  (1.13)

16. За корелатними рівняннями поправок обчислюють поправки до вимірних величин:

$$V_i = [qb_iK] = q_1b_{i1}K_1 + b_{i2}K_2 + \dots + b_{ir}K_r. \quad (1.14)$$

17. Обчислюють вирівняні значення вимірних величин:

$$\bar{x}_i = x_i + v_i. \quad (1.15)$$

*Контроль:*  $\varphi_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0.$

18. Обчислюють в схемі розв'язання нормальних рівнянь обернену вагу функції

$$\frac{1}{P_F} = N_{ff}^{(r)} + E_{1F}N_{f_1} + E_{2F}N_{f_2}^{(1)} + \dots + E_{rF}N_{f_r}^{(r-1)}, \quad (1.16)$$

де  $E_{iF}$  – елімінаційні коефіцієнти в графі  $F$   $i$ -го елімінаційного рівняння.

19. Виконують оцінку точності

- рівноточних вимірів

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{r}}; \quad (1.17)$$

- одиниці ваги при нерівноточних вимірах

$$\mu = \sqrt{\frac{[PV^2]}{r}}; \quad (1.18)$$

- окремого виміру

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{P_i}}; \quad (1.19)$$

$p_i$  – вага виміру;  
- функції

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{F_i}}}. \quad (1.20)$$

Література [1] стор. 72-110; [2] стор. 224-276.

### 1.3. Контрольні запитання

1. У чому суть коре латного способу вирівнювання?
2. Чим відрізняється коре латний спосіб від параметричного?
3. Які існують співвідношення між числом усіх вимірів, числом необхідних величин і числом умовних рівнянь?
4. Як підрахувати число умовних рівнянь і яким вимогам вони повинні задовольняти?
5. Напишіть у загальному вигляді умовні рівняння поправок  $r = 3, n = 4$ .
6. Напишіть у матричному вигляді умовні рівняння поправок.
7. У чому суть методу Лагранжа?
8. Напишіть у загальному вигляді коре латні рівняння поправок.
9. Напишіть у матричному вигляді коре латні рівняння поправок ?
10. Вкажіть розмірність матриць  $B, P^{-1}, V, K, B^T, W$ .
11. Виведіть нормальні рівняння корелат.
12. Наведіть види умовних рівнянь у висотних сітках.
13. Назвіть види лінійних умовних рівнянь у мережах триангуляції.
14. Назвіть види нелінійних умовних рівнянь у мережах триангуляції.
15. Наведіть приклади умовних рівнянь фігур, горизонту, станції і дирекційних кутів.
16. Наведіть приклад базисного умовного рівняння.
17. Наведіть приклад полюсного умовного рівняння.
18. Наведіть схему мережі, в якій виникають корелатні умови.

19. Назвіть види умовних рівнянь у полігонометричних мережах.
20. Напишіть нормальні рівняння корелат, якщо  $r = 3$ .
21. Як вираховуються вільні члени  $W$  нормальних рівнянь корелат?
22. Як вираховуються коефіцієнти умовних рівнянь поправок?
23. Як складається таблиця коефіцієнтів умовних рівнянь?
24. Як вираховуються коефіцієнти нормальних рівнянь за таблицею коефіцієнтів умовних рівнянь поправок і за допомогою матриць  $P^{-1}$ ,  $B$ ,  $B^T$ ?
25. Наведіть формули контролю обчислень коефіцієнтів нормальних рівнянь.
26. Як складається вагова функція у корелатному способі вирівнювання?
27. Як вираховуються значення корелат?
28. Як вираховуються поправки до вимірних величин?
29. Як зараховуються вирівняні значення вимірних величин?
30. Як вираховується  $[PV^2]$  у корелатному способі вирівнювання?
31. Як виконується оцінка точності у корелатному способі вимірювання?
32. Як вираховується зворотна вага функції у додатковій графі?
33. Як виконується кінцевий контроль розв'язання нормальних рівнянь за корелатним способом?
34. Наведіть порядок вирівнювання за корелатним способом.

#### **1.4. Види умовних рівнянь в геодезичних мережах**

При використанні корелатного способу для вирівнювання геодезичних мереж важливо вміти складати умовні рівняння поправок. Вони мають свої особливості при вирівнюванні висотних або планових геодезичних мереж.

##### **1.4.1. Висотні мережі**

В висотних мережах виникають математичні умови (зв'язки) в замкнених або розімкнених полігонах ( рис. 1.1).

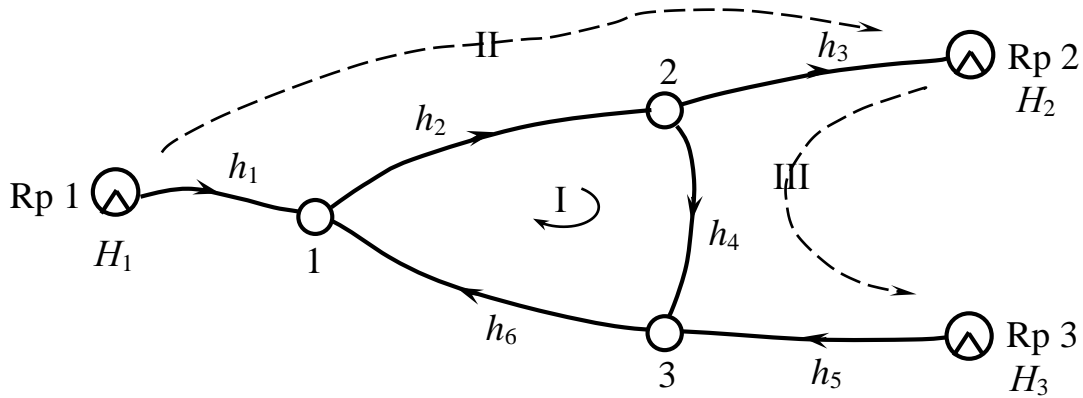


Рис. 1.1. Схема нівелірної мережі

Згідно вихідних реперів Rp1, Rp2, Rp3 та виміряних перевищень виникають три умови полігонів ( $r = n - k$  або  $3 = 6 - 3$ ). В замкненому полігоні I

$$\varphi_1(\bar{h}_2, \bar{h}_4, \bar{h}_6) = 0 \quad \text{або} \quad \bar{h}_2 + \bar{h}_4 + \bar{h}_6 = 0.$$

Коефіцієнти умовного рівняння поправок за формулою (1.3) дорівнюють:

$$b_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j} = 1.$$

Нев'язка математичної умови згідно формули (1.4) дорівнює

$$W_1 = h_2 + h_4 + h_6. \quad (1.21)$$

За формулою (1.5) отримуємо умовні рівняння поправок для замкненого полігона

$$V_2 + V_4 + V_6 + W_1 = 0. \quad (1.22)$$

За аналогічною схемою для розімкнених полігонів II та III отримуємо:

$$\text{а) } h_1 + h_2 + h_3 - (H_2 - H_1) = W_2; \quad (1.23)$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + W_2 = 0; \quad (1.24)$$

$$\text{б) } -h_3 + h_4 - h_5 - (H_3 - H_2) = W_3; \quad (1.25)$$

$$-V_3 + V_4 - V_5 + W_3 = 0. \quad (1.26)$$

#### 1.4.2. Планові геодезичні мережі

В планових геодезичних мережах виміряні величини позначають арабськими цифрами 1, 2, ..., n, а поправки до них записують

арабськими цифрами в дужках (1), (2), ..., (n). Істинні значення вимірів будемо позначати: I, II, ..., N.

Відповідно до геометричної схеми мережі виникають математичні умови. Кожній математичній умові відповідає умовне рівняння поправок:

1) Умова фігур (трикутників, чотирикутників)

В трикутнику за істинними значеннями виміряних кутів виникне умова фігури  $I + II + III - 180^\circ = 0$ .

Тоді за виміряними кутами отримаємо

$$1 + 2 + 3 - 180^\circ = W_\phi \quad (1.27)$$

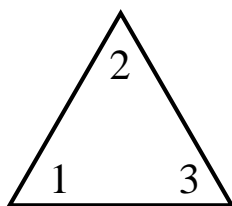


Рис. 1.2

Відповідно умовне рівняння за формулою (1.5) буде

$$(1) + (2) + (3) + W_1 = 0. \quad (1.28)$$

2) Умова горизонту

За попередньою схемою отримаємо:

$$I + II + III + IV - 360^\circ = 0;$$

$$1 + 2 + 3 + 4 - 360^\circ = W_\Gamma \quad (1.29)$$

та умовне рівняння поправок

$$(1) + (2) + (3) + (4) + W_\Gamma = 0. \quad (1.30)$$

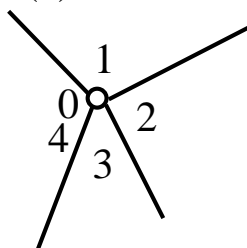


Рис. 1.3

3) Умова станції

Виникає, коли окремих кутів 1, 2 на точці 0 виміряно їх сумарний кут 3. Тоді

$$I + II - III = 0;$$

$$1 + 2 - 3 = W_c. \quad (1.31)$$

Умовне рівняння поправок буде

$$(1) + (2) - (3) + W_c = 0. \quad (1.32)$$

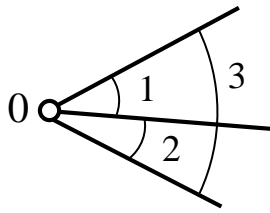


Рис. 1.4

4) Умова дирекційних кутів

Виникає в геодезичній мережі між вихідними (твердими) дирекційними кутами сторін триангуляції  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ . Умову складають по так званій “ялинці” – найкоротшій лінії між сторонами з вихідними дирекційними кутами  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ :

Згідно рис. 1.5 отримаємо:

$$\alpha_1 - II + VI - VII - \alpha_2 = 0;$$

$$\alpha_1 - 2 + 6 - 7 - \alpha_2 = W_\alpha. \quad (1.33)$$

та  $- (2) + (6) - (7) + W_\alpha = 0. \quad (1.34)$

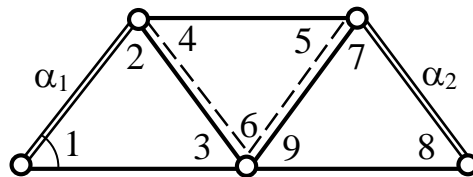


Рис. 1.5

5) Базисна умова (умова сторін)

Умова полягає в тому, що довжина сторони  $BC$  обчислена від вихідної сторони  $AB = b_1$  через кути трикутника  $1,2,\dots,6$  повинна дорівнювати довжині базиса  $BC = b_2$ .

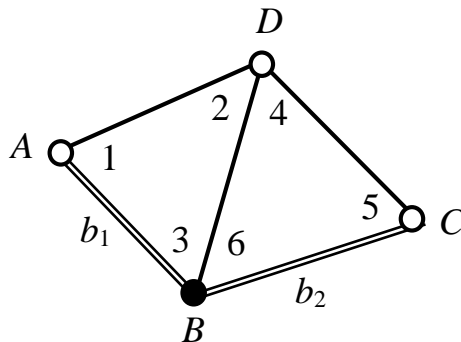


Рис. 1.6

За теоремою синусів отримуємо

$$b_2 = \frac{b_1 \sin I \sin IV}{\sin II \sin V}.$$

Тоді 
$$\frac{b_1 \sin 1 \sin 4}{\sin 2 \sin 5} - b_2 = W_B. \quad (1.35)$$

За формулою (1.3) отримаємо

$$b_{11} = \frac{\partial W}{\partial 1} = \text{ctg } 1; \quad b_{12} = \frac{\partial W}{\partial 2} = -\text{ctg } 2; \quad b_{13} = \frac{\partial W}{\partial 3} = 0;$$

$$b_{14} = \frac{\partial W}{\partial 4} = \text{ctg } 4; \quad b_{15} = \frac{\partial W}{\partial 5} = -\text{ctg } 5; \quad b_{16} = \frac{\partial W}{\partial 6} = 0.$$

За формулою (1.5) отримаємо умовне рівняння:

$$\text{ctg } 1(1) - \text{ctg } 2(2) + \text{ctg } 4(4) - \text{ctg } 5(5) + W_B = 0. \quad (1.36)$$

б) Полюсна умова

Умова полюса виникає в мережі, яка має полюс (точку 0), в якій виміряні напрямки 0A, 0B, 0C на вершини замкненої фігури ABC.

За теоремою синусів повинна дотримуватися умова

$$\frac{0A \cdot \sin I}{\sin II} \frac{\sin IV}{\sin V} \frac{\sin VII}{\sin VIII} = 0A.$$

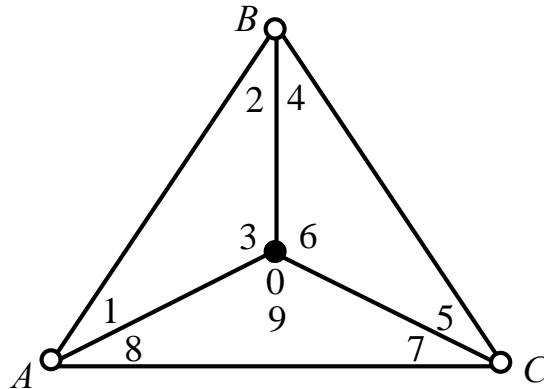


Рис. 1.7

Довжину сторони 0A можна задати, обчислити від вихідного базиса по виміряним кутам трикутників. Для зручності подальших обчислень довжину сторони 0A приймають рівною  $\rho''$ .

Тоді 
$$\frac{\rho'' \sin 1 \sin 4 \sin 7}{\sin 2 \sin 5 \sin 8} - \rho'' = W_{II}. \quad (1.37)$$

За аналогією з базисною умовою отримаємо умовне рівняння полюса

$$\text{ctg}1(1) - \text{ctg}2(2) + \text{ctg}4(4) - \text{ctg}5(5) + \text{ctg}7(7) - \text{ctg}8(8) + W_{\Pi}'' = 0. \quad (1.38)$$

### 7) Координатна умова

Виникають між координатними системами I (пункти  $A, B$ ) та II (пункти  $C, D$ ). Так обчислені координати пунктів  $C$  або  $D$  від пунктів  $A$  або  $B$  через трикутники по ходовій лінії повинні дорівнювати вихідним координатам ( $X_C, Y_C$ ) або ( $X_D, Y_D$ ). Тобто згідно прийнятій вихідній лінії  $a, b, d$  маємо

$$\left. \begin{aligned} X_B + \sum_1^n \Delta x_i - X_C &= W_x, \\ Y_B + \sum_1^n \Delta y_i - Y_C &= W_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

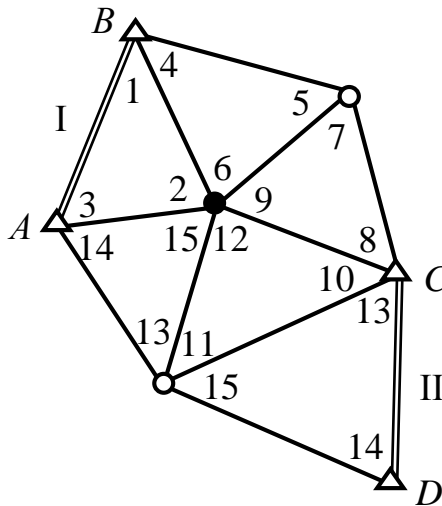


Рис. 1.8

Після перетворень (1.ст.92,93) отримаємо координатні умовні рівняння поправок

$$\sum_1^n (\cos \alpha_i v_{d_i} - \frac{\Delta y_i}{\rho''} v_{\alpha_i}) + W_x = 0; \quad (1.40)$$

$$\sum_1^n (\sin d_i v_{d_i} + \frac{\Delta x_i}{\rho''} v_{\alpha_i}) + W_y = 0,$$

де  $\alpha_i$  та  $d_i$  – дирекцій кут та довжина  $i$ -ої сторони ходової лінії.

Число координатних умов визначається за формулою



*Розв'язання:*

- 2.1. Визначаємо число незалежних умовних рівнянь за формулою (1.1)

$$r = n - k = 6 - 3 = 3.$$

- 2.2. Складаємо умовні рівняння

1.  $\bar{h}_2 + \bar{h}_4 + \bar{h}_6 = 0;$

2.  $\bar{h}_1 + \bar{h}_2 - (H_2 - H_1) = 0;$

3.  $\bar{h}_3 + \bar{h}_4 - \bar{h}_5 - (H_3 - H_2) = 0.$

- 2.3. Обчислюємо нев'язки математичних умов

$$h_2 + h_4 + h_6 = W_1; \quad W_1 = 3,901 - 9,952 + 6,077 = 26 \text{ мм};$$

$$W_2 = h_1 + h_2 - h_3 - (H_2 - H_1) = 22 \text{ мм};$$

$$W_3 = h_3 + h_4 - h_5 - (H_3 - H_2) = 13 \text{ мм}.$$

- 2.4. Складаємо вагову функцію для другого вирівняного перевищення

$$F = \bar{h}_2, \text{ відповідно } f_1 = \frac{\partial F}{\partial h_1} = 0; \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial h_2} + 1 \quad \text{та}$$

$$f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0$$

- 2.5. Складаємо умовні рівняння поправок :

1.  $v_2 + v_4 + v_6 + 26 = 0;$

2.  $v_1 + v_2 - v_3 + 22 = 0;$

3.  $v_3 + v_4 - v_5 + 13 = 0.$

- 2.6. Обчислюємо коефіцієнти нормальних рівнянь і вагової функції в таблиці 2.

Ваги вимірювання перевищень обчислюємо за наближеною формулою

$$q_i = \frac{k_i}{C}. \quad (2.1)$$

Для зручності обчислень прийmemo  $C = 10$ .

Тоді  $q_1 = 2,5$ ;  $q_2 = 0,79$ ;  $q_3 = 0,58$ ;  $q_4 = 0,61$ ;  $q_5 = 0,80$ ;  $q_6 = 0,96$ .

Коефіцієнти  $N_{ij}$ ,  $N_{ff}$  та  $N_{fi}$  обчислені за формулами (1.9), (1.11), (1.12).

Таблиця 2

№ ХОДІВ	$q_i = \frac{L_i}{10}$	$b_1]$	$b_2]$	$b_3]$	$S']$	$F]$	$\Sigma]$	$V_i$	$PV^2$
1	2,5		+1		+1		+1	- 12,22	59,7
2	0,79	+1	+1		+2	+1	+3	- 10,14	130,2
3	0,58		-1	+1	0		0	-0,37	0,2
4	0,61	+1		+1	+2		+2	-8,22	110,6
5	0,80			-1	-1		-1	+4,42	24,4
6	0,96	+1			+1		+1	-7,63	60,6
	$W$	+26	+22	+13					3,857
	$k$								$[PV^2] = -[kW] =$ $= 3,860$
	$N_{1i}$	+2,36	+0,79	+0,61	+3,76	+0,79	+4,55		$S_1 = [qb_1S'] + W_1$
	$N_{2i}$		+3,87	-0,58	+4,08	+0,79	+4,87		$= 3,76+26=29,76$
	$N_{3i}$			+1,49	+2,02	-	+2,02		$S_2 = [qb_2S'] + W_2$
	$[qS'$				+9,86	+1,58	+11,44		$= 4,08+22=26,08$
	$N_f$					+0,79	+2,37		$S_3 = [qb_3S'] + W_3$
	$[q\Sigma$						+13,81		$= 2,02+13=15,02$

Контроль:  $N_{11} + N_{12} + N_{13} = N_{1S}$  або  $+2,36 + 0,79 + 0,61 = + 3,76$ ;

$$N_{12} + N_{22} + N_{23} = N_{2S} \quad +0,79 + 3,87 - 0,58 = + 4,08;$$

$$N_{13} + N_{23} + N_{33} = N_{3S} \quad + 0,61 - 0,58 + 1,99 = + 2.02.$$

2.7. Складаємо нормальні рівняння і розв'язуємо їх способом Гаусса (таблиця 3).

Нормальні рівняння:

$$+ 2,36K_1 + 0,79K_2 + 0,61K_3 + 26 = 0;$$

$$+ 0,79K_1 + 3,87K_2 - 0,58K_3 + 22 = 0;$$

$$+ 0,61K_1 - 0,58K_2 + 1,99K_3 + 13 = 0.$$

Контроль розв'язання нормальних рівнянь по сумарному рівнянню:

$$(N_{11} + N_{21} + N_{31})K_1 + (N_{12} + N_{22} + N_{32})K_2 + (N_{13} + N_{23} + N_{33})K_3 + (W_1 + W_2 + W_3) = 0 \quad (2.2)$$

$$3,76(-7,95) + 4,08(-4,89) + 2,02(-5,52) + 61 = +0,01.$$

Таблиця 3

$K_1$	$K_2$	$K_3$	$W$	$S$	Контроль	$F$	$\Sigma = S + W + F$
+2,36	+0,79	+0,61	+26,00	+29,76		+0,79	+4,55
- 1	-0,3347	-0,2585	-11,017	-12,610	-12,609	-0,3347	- 1,928
	+3,87	-0,58	+22,00	+26,08		+0,79	+4,87
	-0,264	-0,204	-8,702	-9,961		-0,264	-1,523
	+3,606	-0,784	+13,298	+16,119	+16,120	+0,526	+3,347
	-1	+0,2174	-3,6877	-4,4700	-4,4703		-0,9282
		+1,990	+13,000	+15,020		-	+2,02
		-0,158	-6,721	-7,693		-0,204	-1,176
		-0,170	+2,891	+3,504		+0,114	+0,728
		+1,662	+9,170	+10,831	+10,832	-0,090	+1,572
		-1	-5,5174	-651,7		+0,0542	-0,9458
			-	+610,0		+0,79	+2,37
			-286,4	-700,7		-0,264	-1,523
			-49,1	-153,1		-0,077	-0,488
			-50,6	-142,2		-0,005	+0,085
			-386,1	-386,0		+0,44	+0,444
			-[PV <sup>2</sup> ]	-[PV <sup>2</sup> ]		$\frac{1}{P_F}$	$\frac{1}{P_F}$

-11,02	-3,69	-5,52
+1,43	-1,20	$K_3$
+1,64	-4,89	
-7,95	$K_2$	

## 2.8. Обчислення поправок в виміряні перевищення.

Виконано за допомогою корелятних поправок в таблиці 2 за формулою

$$V_i = q_i (bi_1K_1 + bi_2K_2 + bi_3K_3). \quad (2,3)$$

## 2.9. Обчислення вирівняних значень перевищень та позначок вузлових точок виконано в таблиці 4.

Таблиця 4

№ ходів	Виміряні перевищення, $h_i$ , (м)	Поправки, $v_i$ (мм)	Вирівнені перевищення	Вихідні репери	Позначки	
					реперів	вузлових точок
1	- 11,807	- 12,2	- 11,8192	Rp 1	422,356	410,5368
2	+ 3,901	- 10,1	+ 3,8909			
3	+ 5,554	- 0,4	+ 5,553	Rp 2	408,874	414,427.6
4	- 9,952	- 8,2	- 9,9602			
5	+ 13,593	+ 4,4	+ 13,5974	Rp 3	390,870	404,4674
6	+ 6,077	- 7,6	+ 6,0694			

Вирівнені перевищення і позначки вузлових точок обчислені за формулами

$$\bar{h}_i = h_i + v_i; \quad (2.4)$$

$$H_{Rp_i} = H_{Rp_b} + \bar{h}_i. \quad (2.5)$$

#### 2.10. Заключний контроль вирівнювання.

Полягає в перевірці відсутності нев'язок в кожному полігоні:

$$I) + 3,8909 - 9,9602 + 6,0694 = + 0,0001 \text{ м};$$

$$II) - 11,8192 + 3,8909 - 5,5536 = (408,874 - 422,356) = +0,001 \text{ м};$$

$$III) + 5,5536 - 9,9602 + 3,5974 - (390,870 - 408,874) = 0.$$

#### 2.11. Оцінка точності

1. Середня квадратична похибка одиниці ваги (перевищення по ходу довжиною  $L = C = 10$  км).

$$\mu = \sqrt{\frac{[PV^2]}{r}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = 11,3 \text{ мм.}$$

2. Середня квадратична похибка перевищення на 1 км ходу

$$\mu_{1\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{C}} = \frac{11,3}{\sqrt{10}} = 3,6 \text{ мм.}$$

3. Середня квадратична похибка функції (другого вирівняного перевищення)

$$m_F = m_{h_2} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 11,3 \sqrt{0,44} = 3,1 \text{ мм.}$$

**Завдання 2.** Виконати вирівнювання мережі нівелірних ходів з трьома вузловими точками (рис. 2.1).

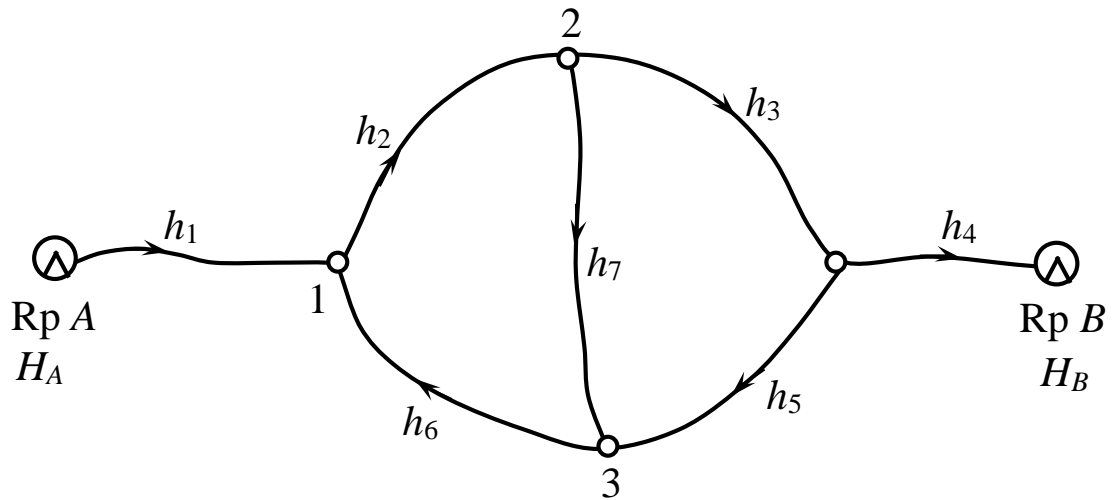


Рис. 2.1

Таблиця 5

Вихідні дані

№ ходу	Довжина ходу L, км	Виміряне перевищення, h (мм)	Зміни варіанту	Вихідний репер (м)	Позначка (м)
1	2,5	+ 2,416		Rp A	100,00
2	2,0	- 0,315		Rp B	106,720
3	3,2	+ 1,791			
4	4,0	+ 2,814			5
5	2,8	+ 0,011	+ (0,5·№)		
6	2,7	- 1,480			
7	3,3	+ 1,800	- (0,5№)мм		

№ - номер студента за списком.

Значення вимірних перевищень  $h_5$  та  $h_7$  змінюється згідно таблиці 5.

Література: [1] стор. 244-276, [2] стор.72-110.

### 3. Апроксимація функцій

#### 3.1. Загальні відомості

При розв'язанні ряду практичних задач досліджують залежність між змінними величинами. До задачі апроксимації входить вишукування виду і параметрів функції, яка надійно відображає цю залежність. При цьому вважають, що одна з величин –  $x$  виміряна із незначними похибками і враховують лише похибки вимірів другої змінної величини  $y = f(x)$ .

Залежності між величинами за своїм характером можуть бути лінійними, параболічними або носити періодичний характер.

Для розв'язування задачі спочатку будують графік, за яким попередньо встановлюють вид шуканої функції. Точне розв'язування задачі апроксимації (списання параметрів функції) здійснюється параметричним способом у такій послідовності:

1) за вимірними значеннями змінних  $x$  і  $y$  будують графік і встановлюють вид залежності:  $y = f(x)$ ; або

$$y = k_1 + k_2x + k_3x^2 + \dots + k_nx^{n-1}. \quad (3.1)$$

2) встановлюють значення ваг вимірів  $P_i$ ;

3) знаходять наближені значення параметрів вибраної функції  $K_i^0$ ;

4) обчислюють значення коефіцієнтів  $Q_{ij}$  і вільних членів  $l_i$  параметричних рівнянь поправок;

5) складають параметричні рівняння поправок у вигляді

$$V_i = Q_{i1}\tau_1 + Q_{i2}\tau_2 + \dots + Q_{ik}\tau_k + l_i. \quad (3.2)$$

6) знаходять коефіцієнти  $N_{ij}$  і перетворені вільні члени нормальних рівнянь  $L_i$ ;

7) з рішення нормальних рівнянь отримують поправки  $\tau_i$  до наближених параметрів  $K_i^0$ ;

8) визначають шукані параметри:

$$K_i = K_i^0 + r_i. \quad (3.3)$$

9) виконують оцінку точності  
[1, с.312-324; 3, с.367-370]

#### 3.2. Контрольні запитання

1. Сутність апроксимації.

2. Як побудувати графік залежності між змінними величинами?
3. Як установити вид функції, яка виражає характер залежності?
4. Якими функціями можна описати залежності між змінними величинами?
5. Якими способами розв'язується задача апроксимації з вимірних значень функції?
6. Вкажіть порядок розв'язування задачі апроксимації.
7. Як знайти наближені значення шуканих параметрів функції?
8. Як скласти параметричні рівняння поправок?
9. Як знайти значення коефіцієнтів параметричного рівняння поправок?
10. Як обчислити значення вільних членів параметричного рівняння поправок?
11. Як визначити коефіцієнти нормальних рівнянь?
12. Як вирахувати коефіцієнти перетворених вільних членів нормальних рівнянь?
13. Як обчислити значення параметрів шуканої функції?
14. Як знайти ваги шуканих параметрів?
15. Як визначити середню квадратичну помилку одиниці ваги?
16. Як вирахувати середні квадратичні похибки шуканих параметрів ?
17. Як виконується апроксимація лінійної функції?
18. Як виконується апроксимація квадратичної функції?
19. Опишіть апроксимацію періодичної функції.
20. Поясніть сутність параболічної апроксимації за методом Чебишева

### **3.3. *Задачі для практичних занять***

*Задача 4.* Виконати апроксимацію періодичної функції за вимірним значенням функції.

*Приклад.* За дослідженнями алідади оптичного теодоліта отримано 12 значень ексцентриситету на установках лімба:

$$x_i = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, \dots, 300^\circ, 330^\circ.$$

*Розв'язання:* Попередньо будуємо графік ексцентриситету за вимірними значеннями (рис. 3.1). За видом графіка робимо висновок, що апроксимацію слід виконувати періодично функцією виду

$$y = K_0 + A_1 \sin x + B_1 \cos x + A_2 \sin 2x + B_2 \cos 2x + \dots \quad (3.4)$$

Обчислення невідомих параметрів функції  $K_0$ ,  $K_1$  і  $K_2$  виконано у таблиці 6.

У першому наближенні визначити параметри  $K_0$ ,  $A_1$  і  $B_1$  кривої, що апроксимується за рівнянням

$$Y'_i = K_0 + A_1 \sin x_i + B_1 \cos x_i, \quad (3.5)$$

де 
$$K_0 = \frac{[\bar{y}]}{N} = -\frac{8,09}{12} = -0,674;$$

$$A_1 = \frac{2}{N} [\bar{y} \sin x] = -\frac{2}{12} 57,588 = -9,598; \quad (3.6)$$

$$B_1 = \frac{2}{N} [\bar{y} \cos x] = -\frac{2}{12} 17,355 = +2,892. \quad (3.7)$$

Таблиця 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
№ пор	$x_i$	$\bar{y}_i$	$\sin x_i$	$\cos x_i$	$\bar{y}_i \sin x_i$	$\bar{y}_i \cos x_i$	$\sin 2x_i$	$\cos 2x_i$	$\bar{y}_i \sin 2x_i$	$\bar{y}_i \cos 2x_i$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	+1,70	0	1	0	+1,700	0	+1	0	+1,700
2	30	-3,42	+0,500	+0,866	-1,710	-2,962	+0,866	+0,500	-2,962	-1,710
3	60	-7,45	+0,866	+0,500	-6,452	-3,725	+0,866	-0,500	-6,452	+3,725
4	90	-10,10	+1	0	-10,10	0	0	-1	0	+10,10
5	120	-10,22	+0,866	-0,500	-8,851	+5,110	-0,866	-0,500	+8,851	+5,110
6	150	-8,68	+0,500	-0,866	-4,340	+7,517	-0,866	+0,500	+7,517	-4,340
7	180	-8,18	0	-1	0	+3,180	0	+1	0	-3,180
8	210	+2,12	-0,50	-0,866	-1,050	-1,836	+0,866	+0,500	+1,836	+1,060
9	240	+6,28	-0,866	-0,500	-5,438	-3,140	+0,866	-0,500	+5,438	-8,140
10	270	+7,68	-1	0	-7,680	0	0	-1	0	-7,680
11	300	+9,20	-0,866	+0,500	-7,967	+4,600	-0,866	-0,500	-7,967	-4,600
12	330	+7,98	-0,500	+0,866	-3,990	+6,911	-0,866	+0,500	-6,911	+3,990
13	$\Sigma$	-8,09			-67,588	+7,365			-0,650	+1,035

Продовження таблиці 6

№ пор	$K_0$	$A_1 \sin x_i$	$B_1 \cos x_i$	$Y'_i$	$V'_i$	$A_2 \sin 2x_i$	$B_2 \cos 2x_i$		$Y''_i$	$V''_i$
0	10	11	12	13	14	15	16		17	18
1	-0,674	0	+2,892	+2,22	-0,52	0	+0,172		+2,39	-0,69
2	-0,674	-4,799	+2,504	-2,97	-0,45	-0,094	+0,086		-2,98	-0,44
3	-0,674	-8,312	+1,446	-7,54	+0,09	-0,094	-0,086		-7,72	+0,27
4	-0,674	-9,598	0	-10,27	+0,17	0	-0,172		-10,44	+0,34
5	-0,674	-8,312	-1,446	-10,43	+0,21	+0,094	-0,086		-10,42	+0,20
6	-0,674	-4,799	-2,504	-7,98	-0,70	+0,094	+0,086		-7,80	-0,88
0	10	11	12	13	14	15	16		17	18
7	-0,674	0	-2,892	-3,57	+0,39	0	+0,172		-3,39	+0,21
8	-0,674	+4,799	-2,504	+1,62	+0,50	-0,094	+0,086		+1,61	+0,51
9	-0,674	+8,312	-1,446	+6,19	+0,09	-0,094	-0,086		+6,01	+0,27
10	-0,674	+9,598	0	-8,92	-1,24	0	-0,172		+8,75	-1,07
11	-0,674	+8,312	+1,446	+9,08	+0,12	+0,094	-0,086		+9,09	+0,11
12	-0,674	+4,799	+2,504	-6,63	+1,35	+0,094	+0,086		+6,81	+1,17
13	$\Sigma$				+0,01					0

$$B_1 = \frac{2}{N} [\bar{y} \cos x] = -\frac{2}{12} 17,355 = +2,892. \quad (3.7)$$

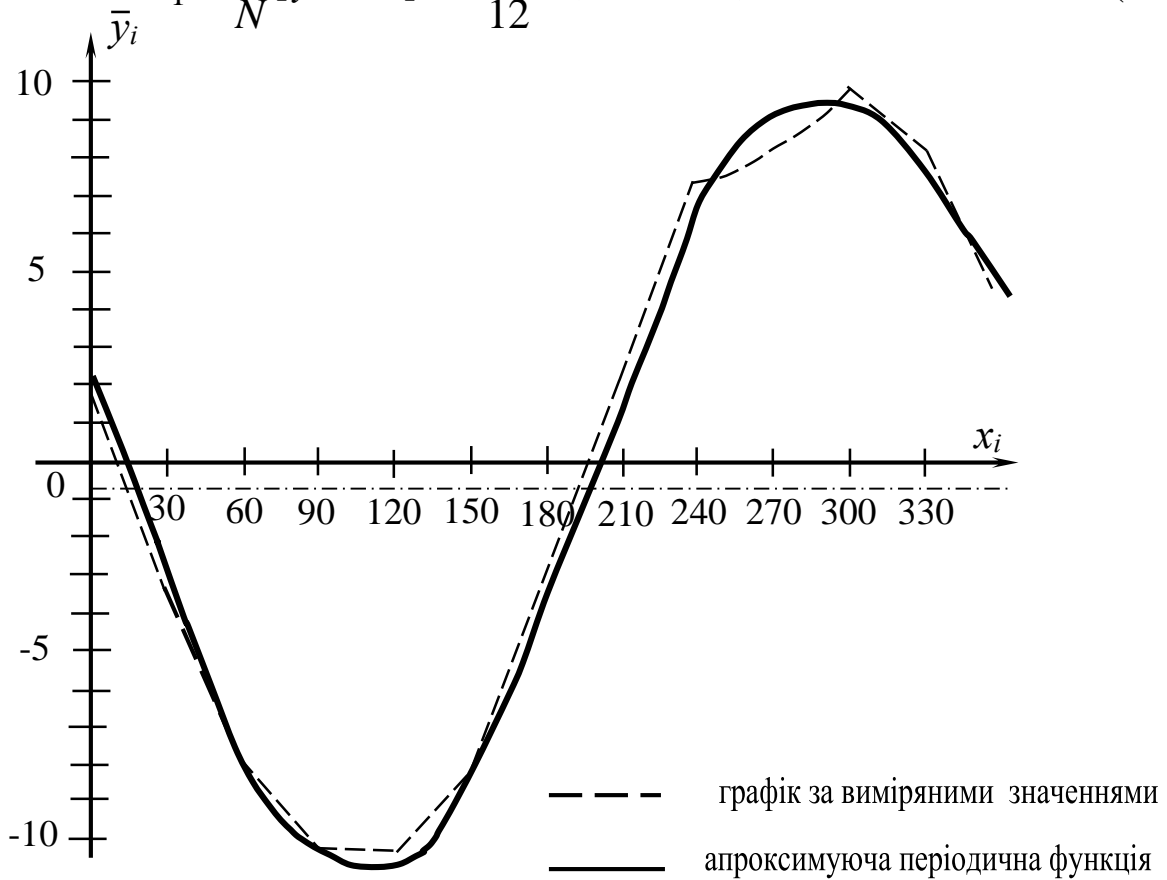


Рис. 3.1

Значення  $[\bar{y}]$ ,  $[\bar{y} \sin x]$  і  $[\bar{y} \cos x]$  отримано в графах 1, 4, 5 таблиці 6.

Тоді рівняння періодичної функції в першому наближенні має вигляд

$$\bar{y}_i = -0,674 - 9,598 \sin x_i + 2,892 \cos x_i. \quad (3.8)$$

Вирахування ординат  $Y_i'$  обчислені у графах 10, 11 і 13. Визначимо поправки в першому наближенні (графа 14):

$$V' = \bar{Y}_i - Y_i'. \quad (3.9)$$

Знайдемо суму їх квадратів:  $[V^2]' = 4,83$ .

Контролюємо 11 обчислення за формулою:

$$[V^2]' = [\eta\eta] - \frac{N}{2}(A_1^2 + B_1^2), \quad (3.10)$$

$$\text{де } [\eta\eta] = [\bar{y}\bar{y}] - \frac{[\bar{y}]^2}{N} = 613,238 - \frac{(-8,09)^2}{12} = 607,784. \quad (3.11)$$

$$\text{Тоді } [V^2] = 607,784 - \frac{12}{2}[(-9,598)^2 + 2,892^2] = 4,87.$$

Середнє їх значення

$$[V^2]'_{\text{середнє}} = 1/2(4,83 + 4,87) = 4,85.$$

У другому наближенні знайдемо невідомі параметри  $A_2$  і  $B_2$  за формулами

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{2}{N}[\bar{y} \sin 2x] = -\frac{2}{12}0,650 = -0,108; \\ B_2 &= \frac{2}{N}[\bar{y} \cos 2x] = \frac{2}{12}1,035 = +0,172. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Значення  $[\bar{y} \sin 2x]$  і  $[\bar{y} \cos 2x]$  отримані у графах 8 і 9. Тоді рівняння кривої, що апроксимується, матиме вигляд

$$Y_i'' = -0,674 - 9,598 \sin x_i + 2,892 \cos x_i - 0,108 \sin 2x_i + 0,172 \cos 2x_i. \quad (3.13)$$

При розрахунку ординат  $Y_i''$  (графа 17) в другому наближенні можна користуватися формулою

$$Y_i'' = y_i' - 0,108 \sin 2x_i + 0,172 \cos 2x_i. \quad (3.13)$$

Знаходимо поправки  $V_i''$  (графа 18) і обчислюємо суму квадратів:  $[V^2]'' = 4,58$ .

Для контролю знаходимо:

$$[V^2]'' = [\eta\eta] - \frac{N}{2}(A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2) = 4,62.$$

Середнє значення  $[V^2]''_{\text{сер.}} = \frac{1}{2}(4,58 + 4,62) = 4,60.$

Різниця між значеннями сум квадратів поправок у двох наближеннях складає:

$$[V^2]''_{\text{сер.}} - [V^2]''_{\text{сер.}} = 4,60 - 4,85 = -0,25.$$

Отримана різниця незначна за абсолютною величиною і нею можна знехтувати під час дослідження теодоліта. Таким чином отримали рівняння періодичної функції, яка надійно характеризує ексцентриситет алідади теодоліта.

На рис. 3.1 побудуємо точки за обчисленими значеннями  $y_i''$ , з'єднавши їх плавною кривою. Одержимо графік періодичної функції.

### Апроксимація методом Чебишева

*Приклад 4.* Досліджуються середньоквадратичні помилки передачі відміток на перекриття (поверхи) будівлі  $m_{hi} = y_i$  залежно від зміни висоти  $h_i = x_i$ . У результаті багаторазових вимірів отримали значення невідомої нам функції  $y = f(x)$ , які наведено в таблиці 7.

Таблиця 7

Номер вимірів	1	2	3	4	5	6	7
$h_i = x_i, \text{ м}$	3	6	9	12	15	18	21
$m_{h_i} = \bar{y}_i, \text{ мм}$	2,3	5,1	3,7	9,3	7,5	14,8	20,0
$\xi'_i = x_i - 12$	-9	-6	-3	0	3	6	9

Необхідно визначити вид і рівняння невідомої функції, що апроксимує, і оцінити її.

*Розв'язання.* Спочатку будуємо графік емпіричної функції за вимірними значеннями. За віссю  $X$  відкладаємо висоти передачі відміток, а за віссю  $Y$  – середньоквадратичні похибки передачі. Графічно проведена апроксимація вказує на параболічний вид функції, тобто наближено проведена крива буде відповідати рівнянню параболи вищого порядку (рис. 3.2).

Для зручності обчислень виразимо значення аргументів  $x_i$  через величину

$$\xi_i = \frac{x_i - 12}{10}, \quad (3.16)$$

тобто за початок координат приймаємо середнє значення висот і кожне значення висоти зменшуємо в 10 разів. Величини розміщені в табл. 7.

Оскільки функція  $f$  невідома, то будуть невідомі і всі коефіцієнти розкладання її в ряд. Виразимо функцію рівнянням параболі вищого порядку:

$$y_i = K_1 + K_2\xi_i + K_3\xi_i^2 + K_4\xi_i^3 + \dots \quad (3.17)$$

Це рівняння характерне тим, що в ньому залишається невідомим число шуканих коефіцієнтів розкладання  $K_i$ .

Поставлену задачу будемо розв'язувати методом Чебишева, шляхом послідовного повторення обчислень, збільшуючи щоразу число невідомих  $K_i$  у новому рішенні доти, поки сума  $[v^2]$ , зменшуючись у кожному рішенні, не буде відповідати за величиною точності вимірів. Причому в кожному новому наближенні використовуються результати всіх попередніх.

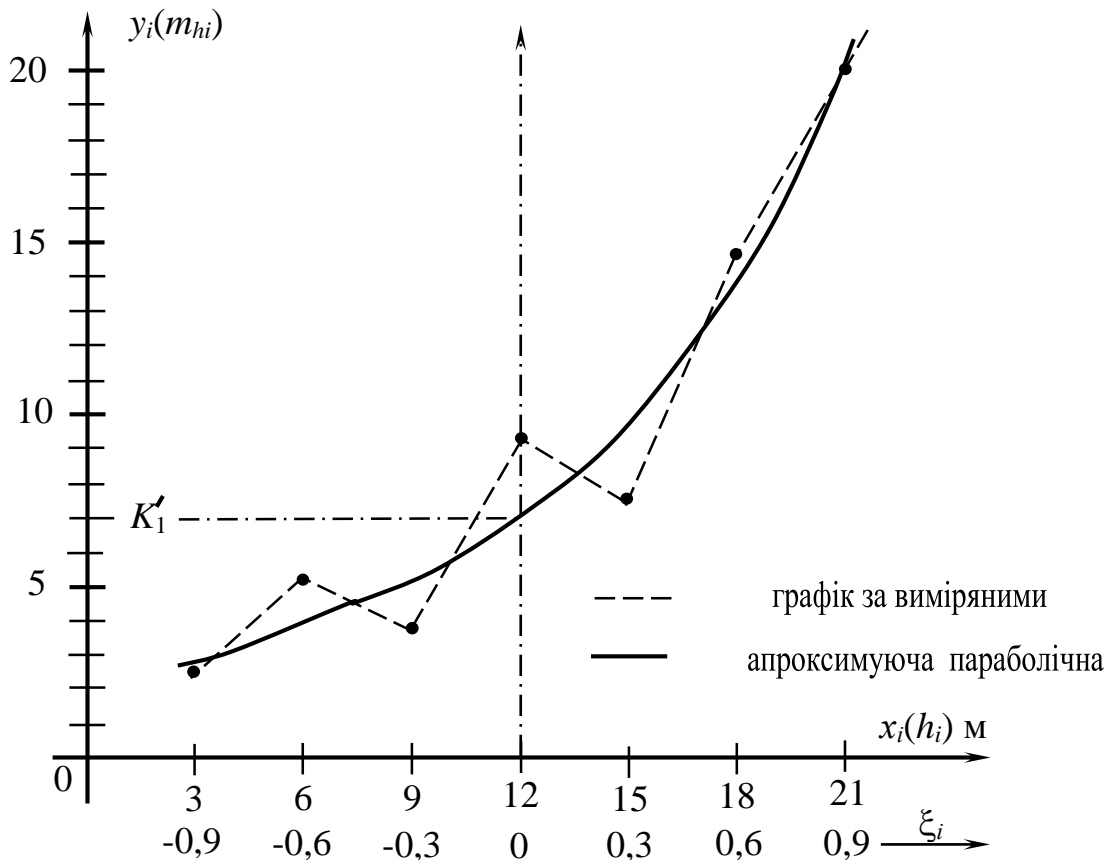


Рис. 3.2.

Для знаходження коефіцієнтів  $K_i$  методом найменших квадратів напишемо рівняння поправок:

$$v_i = K_1 + \xi_i K_2 + \xi_i^2 K_3 + \xi_i^3 K_4 - l_i. \quad (3.18)$$

В цьому рівнянні вільний член  $l_i$  приймаємо за такий, що дорівнює  $\tilde{y}_i$ .

Далі складаємо таблицю коефіцієнтів рівнянь поправок, розраховану на кілька шуканих коефіцієнтів  $K_i$  (таблиця 8). Мінімально необхідна кількість коефіцієнтів повинна дорівнювати трьом. У таблиці передбачено чотири коефіцієнти. Спочатку в таблиці коефіцієнтів рівнянь поправок заповнюємо графи 1, 2, 3, 5 і 6. Графа 6 являє собою суму  $S'$  коефіцієнтів рівнянь поправок і вільного члена для трьох невідомих  $K_1, K_2$  і  $K_3$ , тобто

$$S'_1 = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + l_i, \quad (3.19)$$

де  $a_{i1} = 1, a_{i2} = \xi_i, a_{i3} = \xi_i^2$ .

Потім за таблицею 8 коефіцієнтів рівнянь поправок складаємо нормальні рівняння для трьох невідомих.

Таблиця 8

№ пор.	$a_{i1}$ $K_1$	$a_{i2}$ $K_2$	$a_{i3}$ $K_3$	$a_{i4}$ $K_4$	$l$	$S'$	$S''$
0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	-0,9	0,81	-0,729	-2,3	-1,39	-2,119
2	1	-0,6	0,36	-0,216	-5,1	-4,34	-4,556
3	1	-0,3	0,09	-0,027	-3,7	-2,91	-2,937
4	1	0	0	0	-9,3	-8,3	-8,3
5	1	+0,3	0,09	0,027	-7,5	-6,11	-6,083
6	1	0,6	0,36	0,216	-14,8	-12,84	-12,624
7	1	0,9	0,81	0,729	-20,0	-17,29	-16,561
$N_{i1}$	7	0	2,52	0	-62,7	-53,18	-53,18
$N_{i2}$		2,52	0	1,5876	-22,89	-20,37	-18,7824
$N_{i3}$			1,5876	0	-26,235	-22,1274	-22,1274
$N_{i4}$				1,1576	-15,1011		-12,3559
$[ll]$					+806,77	+694,945	+679,8439

$$\left. \begin{aligned} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + N_{13}\tau_3 + L_1 &= 0; \\ N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + N_{23}\tau_3 + L_2 &= 0; \\ N_{31}\tau_1 + N_{32}\tau_2 + N_{33}\tau_3 + L_3 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.20)$$

або

$$\begin{aligned} 7K_1 + 0K_2 + 2,52K_3 - 62,7 &= 0; \\ 0K_1 + 2,52K_2 + 0K_3 - 22,89 &= 0; \\ 2,52K_1 + 0K_2 + 1,5876K_3 - 26,235 &= 0. \end{aligned}$$

Контролюємо обчислення їх коефіцієнтів, наприклад, для першого рівняння за виразом

$$\left. \begin{aligned} [a_1S'] &= [a_1a_1] + [a_1a_2] + [a_1a_3] + [Q_1l]; \\ [a_1S] &= N_{11} + N_{12} + N_{13} + L_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

і т.д.

В таблиці 9 спочатку виконуємо розв'язання 3-х нормальних рівнянь.

Обчислюємо  $[v^2]$  по трьом параметрам

$$[v^{22}]_3 = [ll] + E_{1L}L_1 + E_{2L}L_2^{(1)} + E_{3L}L_3^{(2)}, \quad (3.22)$$

або  $[v^2]_3 = 806,77 - (8,9571 \times 62,7) - (9,0833 \times 22,89) - (5,3836 \times 3,663) = 17,52$

Тоді середня квадратична похибка одиниці ваги параболічної функції визначеної трьома параметрами дорівнює

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-3}} = \sqrt{\frac{17,52}{7-3}} = 2,093.$$

Далі визначимо  $[v^2]$  по чотирьом параметрам. В схемі розв'язання нормальних рівнянь в графі 4 таблиці 8 добавимо коефіцієнти четвертого нормального рівняння і перетворимо їх за правилом алгоритмів Гаусса.

Обчислимо  $[v^2]_4$  – по чотирьом параметрам за формулою

$$[v^2]_4 = [v^2]_3 + E_{4L} \cdot N_{4L} = 14,58$$

та середню квадратичну похибку одиниці ваги

$$\mu_4 = \sqrt{\frac{[v^2]_4}{n-4}} = 2,205.$$

Таблиця 9

Позначення	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$L$	$\Sigma'$	$\Sigma''$
0	1	2	3	4	5	6	7
$N_{1i}$	+7	0	+2,52	0	-62,7	-53,18	-53,18
$E_{1i}$	-1	0	-0,36	0	+8,9571	+7,5971	+7,5971
$N_{2i}$		+2,52	0	+1,5876	-22,89	-20,37	-18,7824
		0	0	0	0	0	0
$N_{2i}^{(1)}$		+2,52	0	+1,5876	-22,89	-20,37	-18,7824
$E_{2i}$		-1	0	-0,6300	+9,0833	+8,0883	+7,4533
$N_{3i}$			+1,5876	0	-26,235	-22,1274	-22,1274
			-0,9072	0	+22,572	+19,1448	+19,1448
			0	0	0	0	0
$N_{3i}^{(2)}$			+0,6804	0	-3,663	-2,9826	-2,9826
$E_{3i}$			-1	0	+5,3836	+4,3836	+4,3836
$N_{4i}$				+1,1576	-15,1011		-12,3559
				0	0	0	0
				-1,0002	+14,4207	-	+11,8329
				0	0	0	0
$N_{4i}^{(3)}$	$K_4 = +4,32/1000$			+0,1574	-0,6804	-	0,5230
$E_{4i}$	$K_3 = +5,38/100$			-1	+0,43237		
	$K_2 = +6,36/10$						
$[ll]$	$K_1 = +7,02$				+806,77		

Оскільки  $\mu_4 > \mu_3$  ( $2,205 > 2,093$ ), то це свідчить про те, що параболічну функцію можна визначити по 3-ом або 4-ом параметрам.

Визначимо середню квадратичну похибку апроксимації функції по трьом параметрам та чотирьом параметрам. За правилом Енке при трьох параметрах  $N_{33}^{(2)} = P_{K_3} = 0,68$ . Тоді середня квадратична похибка невідомого параметра  $K_3$  складе

$$m_3 = \frac{\mu_3}{\sqrt{P_{K_3}}} = \frac{2,093}{\sqrt{0,68}} = 2,54 \text{ мм.}$$

Відповідно при чотирьох параметрів  $N_{44}^{(3)} = P_{K_4} = 0,157$

$$m_4 = \frac{\mu_4}{\sqrt{P_{K_4}}} = \frac{2,205}{\sqrt{0,157}} = 5,51 \text{ мм.}$$

Це вказує на те, що не слід визначати наступні коефіцієнти, оскільки точність їх визначення знижується, а це призведе до небажаної деформації функції. Так точність визначення  $K_4$  на 3 мм нижче точності  $K_4$  ( $5,51 - 2,54 \approx 3$  мм).

Для остаточного знаходження апроксимованого рівняння кривої похибок передачі відміток необхідно невідоме  $K_2$  зменшити в 10 разів,  $K_3$  – в 100 разів,  $K_4$  – в 1000 разів, а від аргументів  $x_i$  відняти 12, тоді

$$y_i = 7,02 + 0,636(x_i - 12) + 0,0538(x_i - 12)^2 + 0,0043(x_i - 12)^3.$$

Тепер розрахуємо за даним рівнянням апроксимоване значення  $y_i$  для всіх  $x_i$  і для остаточного контролю визначимо  $v_i$  і їхню суму  $[v^2]_4$ . Наприклад:

$$y_i = 7,02 + 0,636(3 - 12) + 0,0538(3 - 12)^2 + 0,0043(3 - 12)^3 = 2,504$$

$$v_1 = y_1 - \tilde{y}_1 = 2,504 - 2,300 = +0,204 \text{ мм.}$$

$$[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_7^2 = 14,57.$$

Таблиця 10

Номер відліків	1	2	3	4	5	6	7
$y_i$	2,504	4,207	5,479	7,019	9,528	13,706	20,254
$v_i = y_i - \tilde{y}_i =$	+0,204	-0,893	+1,779	-2,281	+2,028	-1,094	+0,254

За апроксимованим значенням  $y_i$  будемо плавну криву.

Вірогідно-статичною оцінкою надійності встановленої залежності між змінними  $x_i$  і  $y_i$  в апроксимованому рівнянні є кореляційне відношення:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_y^2}}. \quad (3.23)$$

Стандартні відхилення  $\sigma_v$  і  $\sigma_y$  знаходять за формулами

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}}; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{[\delta y^2]}{n}}, \quad (3.24)$$

де  $[v^2] = [v^2]_4 = 14,586$ ;  $\delta_{y_i} = y_i - \bar{y}$ ;  $\bar{y} = \frac{[y]}{n}$ ;  $n = 7$ .

Для нашого прикладу  $\bar{y} = 62,687 : 7 = 8,957$ ;

$[\delta y^2] = 230,557$ . Тоді  $\sigma_v^2 = 14,586 : 7 = 2,084$ ;

$\sigma_y^2 = 230,557 : 7 = 32,937$  і кореляційне відношення становить:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{2,084}{32,987}} = 0,968 \approx 0,97.$$

Оскільки  $\eta = 0,97$  близько до одиниці, то зв'язок вважається суттєвим і встановленим.

## Список літератури

1. Математичне оброблення геодезичних вимірів : підручник / С. П. Войтенко, Р. В. Шульц, О. Й. Кузьмич, Ю. В. Кравченко . – К. : Знання, 2015.

2. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів – КНУБА, Київ, 2005. – 236с.

3. Видув Н.Г., Кондра Г.С. Вероятностно-статический анализ погрешностей измерений – М.: Надра, 1969.