

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук

ПОВНЕ ВНУТРІШНЄ ВІДОБРАЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖАХ АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩ

Вступ. В даний час сейсмічні процеси є одними з найбільш руйнівних явищ природи. Відомо, що неможливо прогнозувати місце і час настання землетрусу в заданому регіоні, тому важливо зрозуміти особливості перетворення сейсмічних хвиль тектонічними неоднорідностями і аномаліями в їх околі та встановити механізми посилення або ослаблення цих хвиль. Для їх вивчення зручно застосовувати модель розривних хвиль і аналізувати їх за допомогою нульового наближення променевого методу [1, 2, 6-8], який дозволяє будувати фронти хвиль і обчислювати значення розривів параметрів хвилі на цих фронтах.

Проблема аналізу взаємодії розривної хвилі з поверхнею розділу пов'язана з необхідністю вирішення двох задач – кінематичної і динамічної. Перша задача зводиться до побудови поверхонь фронтів відображених і заломлених хвиль на поверхні G розділу середовищ. Для її постановки застосовується локально-плоске наближення.

Методика вирішення цієї проблеми, заснована на використанні сформульованого припущення, пов'язана з необхідністю знаходити вирішення узагальнених рівнянь Снелля, які для трансверсально-ізотропних середовищ мають вигляд

$$\frac{\sin \Theta_{(1-)}^{(r)}}{v_{(1-)}^{(r)}(\Theta_{(1-)}^{(r)})} = \frac{\sin \Theta_{(1+)}^{(v)}}{v_{(1+)}^{(v)}(\Theta_{(1+)}^{(v)})} = \frac{\sin \Theta_{(2+)}^{(\mu)}}{v_{(2+)}^{(\mu)}(\Theta_{(2+)}^{(\mu)})} \quad (r, v, \mu = 1, 2), \quad (1)$$

де введені позначення: верхній індекс в дужках позначає номер хвилі, причому $r = 1$ відповідає квазіподовжній (qP) хвилі, $r=2$ – квазіпоперечній (qS) хвилі; нижній індекс в дужках вказує на номер середовища; знаки мінус і плюс відповідають станам до і після взаємодії хвилі з межею. Згідно з цими позначеннями $\Theta_{(1-)}^{(r)}$ є кутом падіння, $\Theta_{(1+)}^{(v)}$ – кут відображення, $\Theta_{(2+)}^{(\mu)}$ – кут заломлення; $v_{(1-)}^{(r)}$, $v_{(1+)}^{(v)}$, $v_{(2+)}^{(\mu)}$ є швидкостями розповсюдження відповідних хвиль у відповідних напрямках.

Для вирішення приведеної нелінійної системи Снелля запропонований підхід, заснований на використанні методу Ньютона спільно з методом продовження по параметру [3-5, 9, 10].

В рамках нульового наближення променевого методу хвиля визначається (рис. 1) кутом Θ між напрямом швидкості $\vec{v}$ її фронту і нормаллю до площини G , кутом Ψ між напрямом променевої швидкості $\vec{\xi}$ і нормаллю до площини G , вектором поляризації $\vec{A}$. Для вирішення динамічної задачі запропонована методика, в якій аналізується поведінка розривів швидкостей елементів середовищ на фронтах чотирьох хвиль і для їх підрахунку використовуються умови збереження кількостей руху елементів частинок середовищ I і II , залучених в рух в результаті взаємодії на G падаючою, відображених і заломлених хвиль

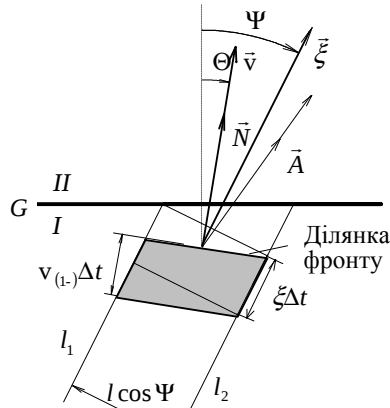


Рис. 1

$$\left(\dot{\vec{u}} + \dot{\vec{u}}_{(1)} \right) \Big|_G = \dot{\vec{u}}_{(2)} \Big|_G, \quad \Delta \vec{Q}_{(1-)}^{(1)} = \Delta \vec{Q}_{(1+)}^{(1)} + \Delta \vec{Q}_{(1+)}^{(2)} + \Delta \vec{Q}_{(2+)}^{(1)} + \Delta \vec{Q}_{(2+)}^{(2)}. \quad (2)$$

Після проектування рівняння (2) на осі x^1 і x^2 будеться система чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно швидкостей руху елементів

$$A \cdot w = b_P, \quad (3)$$

де A – матриця четвертого порядку

$$A = \begin{vmatrix} \rho_1 \xi_{(1+)}^{(1)} \cos \Psi_{(1+)}^{(1)} A_{1(1+)}^{(1)} & \rho_1 \xi_{(1+)}^{(2)} \cos \Psi_{(1+)}^{(2)} A_{1(1+)}^{(2)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(1)} \cos \Psi_{(2+)}^{(1)} A_{1(2+)}^{(1)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(2)} \cos \Psi_{(2+)}^{(2)} A_{1(2+)}^{(2)} \\ \rho_1 \xi_{(1+)}^{(1)} \cos \Psi_{(1+)}^{(1)} A_{2(1+)}^{(1)} & \rho_1 \xi_{(1+)}^{(2)} \cos \Psi_{(1+)}^{(2)} A_{2(1+)}^{(2)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(1)} \cos \Psi_{(2+)}^{(1)} A_{2(2+)}^{(1)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(2)} \cos \Psi_{(2+)}^{(2)} A_{2(2+)}^{(2)} \\ -A_{1(1+)}^{(1)} & -A_{1(1+)}^{(2)} & A_{1(2+)}^{(1)} & A_{1(2+)}^{(2)} \\ -A_{2(1+)}^{(1)} & -A_{2(1+)}^{(2)} & A_{2(2+)}^{(1)} & A_{2(2+)}^{(2)} \end{vmatrix},$$

$w = \begin{pmatrix} \dot{u}_{(1+)}^{(1)} & \dot{u}_{(1+)}^{(2)} & \dot{u}_{(2+)}^{(1)} & \dot{u}_{(2+)}^{(2)} \end{pmatrix}^T$ – вектор шуканих значень швидкостей частинок відповідних хвиль на їх фронтах;
 $b_P = \left(\rho_1 \xi_{(1-)}^{(1)} \cos \Psi_{(1-)}^{(1)} A_{1(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \quad \rho_1 \xi_{(1-)}^{(1)} \cos \Psi_{(1-)}^{(1)} A_{2(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \quad A_{1(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \quad A_{2(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \right)^T$ – вектор правої частини, відповідний падаючій qP -хвилі; ρ_1, ρ_2 – густина відповідних середовищ.

У системі (3) перші два рівняння є умовами збереження кількостей руху, третє і четверте рівняння – умови сумісності швидкостей елементів середовищ I і II , контактуючих на поверхні G .

Якщо падаюча хвиля є квазіпоперечною (qS -хвиля), то замість (3) маємо

$$A \cdot w = b_S, \quad (4)$$

де A і w залишаються незмінними, а вектор b_S правої частини приймає вигляд

$$b_S = \left(\rho_1 \xi_{(1-)}^{(2)} \cos \Psi_{(1-)}^{(2)} A_{1(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \quad \rho_1 \xi_{(1-)}^{(2)} \cos \Psi_{(1-)}^{(2)} A_{2(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \quad A_{1(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \quad A_{2(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \right)^T.$$

Проходження розривної хвилі через площину розриву суцільності пружних середовищ.

У механіці гірських порід широко відомі випадки порушення суцільності тектонічних структур в результаті утворення поверхонь гірських розломів. Порівняно часто тонкий прошарок на поверхні розлому між двома напівпросторами заповнюється глинистими масами, які виконують роль рідкого середовища, що змащує. У цих випадках на поверхні розлому G реалізуються умови контактної взаємодії берегів розлому, для яких можна вважати, що нормальні до поверхні G переміщення двох середовищ співпадають, тоді як уздовж поверхні G контактуючі елементи середовищ можуть вільно «прослизати» один відносно іншого. Тому векторне рівняння контактної взаємодії двох середовищ втрачає силу і залишається вірним лише умова збереження кількості руху елементів середовищ у напрямі нормалі до поверхні G .

Проте в дотичному напрямі стає справедливими два рівняння збереження імпульсу. Одне з них є умовою збереження імпульсів уздовж поверхні G в першому середовищі до і після взаємодії, а друге – рівність нулю імпульсів уздовж поверхні G в другому середовищі після взаємодії. До цих співвідношень додається умова рівності нормальних до поверхні G швидкостей контактуючих елементів середовищ. Тоді матриця A в системі (2) приймає вигляд

$$A = \begin{vmatrix} \rho_1 \xi_{(1+)}^{(1)} \cos \Psi_{(1+)}^{(1)} A_{1(1+)}^{(1)} & \rho_1 \xi_{(1+)}^{(2)} \cos \Psi_{(1+)}^{(2)} A_{1(1+)}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(1)} \cos \Psi_{(2+)}^{(1)} A_{1(2+)}^{(1)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(2)} \cos \Psi_{(2+)}^{(2)} A_{1(2+)}^{(2)} \\ \rho_1 \xi_{(1+)}^{(1)} \cos \Psi_{(1+)}^{(1)} A_{2(1+)}^{(1)} & \rho_1 \xi_{(1+)}^{(2)} \cos \Psi_{(1+)}^{(2)} A_{2(1+)}^{(2)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(1)} \cos \Psi_{(2+)}^{(1)} A_{2(2+)}^{(1)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(2)} \cos \Psi_{(2+)}^{(2)} A_{2(2+)}^{(2)} \\ -A_{2(1+)}^{(1)} & -A_{2(1+)}^{(2)} & A_{2(2+)}^{(1)} & A_{2(2+)}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (5)$$

При цьому змінюється і вектор правих частин

$$b_P = \left(\rho_1 \xi_{(1-)}^{(1)} \cos \Psi_{(1-)}^{(1)} A_{1(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \quad 0 \quad \rho_1 \xi_{(1-)}^{(2)} \cos \Psi_{(1-)}^{(2)} A_{1(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \quad A_{2(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \right)^T$$

Проаналізувати зміну визначника матриці A в явному вигляді для анізотропних середовищ досить важко. Тому звернемося до випадку, коли пружні середовища ізотропні. В цьому випадку матриця A спрощується і приймає форму

$$A = \begin{vmatrix} \rho_1 \alpha_1 \sin \Theta_{(1+)}^{(1)} \cos \Theta_{(1+)}^{(1)} & -\rho_1 \beta_1 \cos^2 \Theta_{(1+)}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 \alpha_2 \sin \Theta_{(2+)}^{(1)} \cos \Theta_{(2+)}^{(1)} & \rho_2 \beta_2 \cos^2 \Theta_{(2+)}^{(2)} \\ -\rho_1 \alpha_1 \cos^2 \Theta_{(1+)}^{(1)} & -\rho_1 \beta_1 \sin \Theta_{(1+)}^{(2)} \cos \Theta_{(1+)}^{(2)} & \rho_2 \alpha_2 \cos^2 \Theta_{(2+)}^{(1)} & -\rho_2 \beta_2 \sin \Theta_{(2+)}^{(2)} \cos \Theta_{(2+)}^{(2)} \\ \cos \Theta_{(1+)}^{(1)} & \sin \Theta_{(1+)}^{(2)} & \cos \Theta_{(2+)}^{(1)} & -\sin \Theta_{(2+)}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Якщо вважати, що вибрана гранична площа G ділить пружний масив на два напівпростори з однаковими параметрами пружності $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, то з урахуванням рівності $\Theta_{(1+)}^{(1)} = \Theta_{(2+)}^{(1)} = \Theta^{(1)}$, $\Theta_{(1+)}^{(2)} = \Theta_{(2+)}^{(2)} = \Theta^{(2)}$ матрицю A можна привести до вигляду

$$A = \rho^3 \cos^2 \Theta^{(1)} \begin{vmatrix} \alpha \sin \Theta^{(1)} & -\beta \cos^2 \Theta^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \sin \Theta^{(1)} & \beta \cos^2 \Theta^{(2)} \\ -\alpha \cos \Theta^{(1)} & -\beta \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} & \alpha \cos \Theta^{(1)} & -\beta \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} \\ 1 & \sin \Theta^{(2)} & 1 & -\sin \Theta^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Обчислюючи її визначника, одержимо

$$\begin{aligned}
D_4 &= \det A = \rho^3 \cos^2 \Theta^{(1)} \times \\
&\times \left\{ -1 \left[-\beta \cos^2 \Theta^{(2)} \left(-\alpha \beta \sin \Theta^{(2)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} - \alpha \beta \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \right] + \right. \\
&+ \sin \Theta^{(2)} \left[\alpha \sin \Theta^{(1)} \left(-\alpha \beta \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} - \alpha \beta \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \right] - \\
&- 1 \left[-\beta \cos^2 \Theta^{(2)} \left(-\alpha \beta \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} - \alpha \beta \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \right] - \\
&- \sin \Theta^{(2)} \left[-\alpha \sin \Theta^{(1)} \left(-\alpha \beta \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} - \alpha \beta \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \right] \Big\} = \\
&= -\alpha \beta \rho^3 \cos^2 \Theta^{(1)} \left\{ \left(\sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} + \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \times \right. \\
&\times \left(2\beta \cos^2 \Theta^{(2)} + 2\alpha \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \right) \Big\}. \\
\text{Але } \frac{\sin \Theta^{(1)}}{\alpha} &= \frac{\sin \Theta^{(2)}}{\beta}, \quad \alpha = \beta \frac{\sin \Theta^{(1)}}{\sin \Theta^{(2)}}.
\end{aligned}$$

У результаті маємо

$$\begin{aligned}
D_4 &= -2\alpha\beta^2\rho^3\cos^2\Theta^{(1)}\cos\Theta^{(2)}\left(\sin\Theta^{(1)}\sin\Theta^{(2)}+\cos\Theta^{(1)}\cos\Theta^{(2)}\right)\times \\
&\times\left(\sin^2\Theta^{(1)}+\cos^2\Theta^{(2)}\right).
\end{aligned}$$

Щоб стан взаємодії розривної хвилі з площиною розділу G був критичним, необхідне виконання умови $D_4 = 0$.

Якщо падаюча хвиля є подовжньою, ця умова не виконується ніколи, оскільки $\Theta_{(1+)}^{(2)} \leq \arcsin(\beta\alpha^{-1})$. В цьому випадку жоден співмножників в правій частині рівності не може прийняти нульове значення. У зв'язку з цим при падінні на абсолютно гладку площину G розділу пружного середовища розривної P -хвилі критичні стани не можуть бути реалізовані.

Проте ситуація міняється, якщо падаючою є S -хвиля. Тоді $0 \leq \Theta_{(1-)}^{(2)} < \pi/2$, $\Theta_{(1+)}^{(1)} = \arcsin(\alpha\beta^{-1}\sin\Theta_{(1-)}^{(2)})$ і при $\Theta_{(1-)}^{(2)} = \arcsin(\beta\alpha^{-1})$, $\Theta_{(1+)}^{(1)} = \pi/2$, $\cos\Theta_{(1+)}^{(1)} = 0$, $D_4 = 0$. Тому для S -хвилі кут падіння $\Theta_{(1-)}^{(2)} = \arcsin(\beta\alpha^{-1})$ є критичним.

Приведемо результати вирішення системи рівнянь вигляду (2) для даного випадку взаємодії плоскої розривної P -хвилі з площиною G розділу однорідного ізотропного пружного середовища з механічними характеристиками $\lambda = 1.731 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 1.154 \cdot 10^9$ Па, $\rho = 2510$ кг/м³, $\alpha = 4011$ м/с, $\beta = 2144$ м/с при різних кутах падіння $\Theta_{(1-)}^{(1)}$. Вважалося, що на фронті P -хвилі величина розриву швидкості елементів середовища

складає 1м/с. Спочатку за допомогою формул Снелля були підраховані кути відображення, $\Theta_{(j+)}^{(2)}$ ($j = 1$) і заломлення, $\Theta_{(j+)}^{(2)}$ ($j = 2$) для P - і S -хвиль. Результати розрахунків приведені на рис. 2. Вони свідчать про те, що кути падіння $\Theta_{(j+)}^{(1)}$ ($j = 1, 2$) для P -хвилі співпадають. Те ж саме справедливе і для кутів $\Theta_{(j+)}^{(2)}$ ($j = 1, 2$) S -хвилі. Рис. 3 ілюструє залежності інтенсивностей швидкостей елементів на фронтах відображених $\dot{u}_{(1+)}^{(1)}$, $\dot{u}_{(1+)}^{(2)}$ і заломлених $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$, $\dot{u}_{(2+)}^{(2)}$ хвиль. З цього витікає, що критичні стани, як це відмічено вище, не наступають у всьому діапазоні зміни кута падіння $0 \leq \Theta_{(-)}^{(1)} \leq \pi/2$. При цьому криві відображеної і заломленої S -хвиль співпадають, а хвилі подовжніх швидкостей $\dot{u}_{(1+)}^{(1)}$ і $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$ обмінюються своїми значеннями при зміні кута падіння $\Theta_{(1-)}^{(1)}$ від 0 до $\pi/2$.

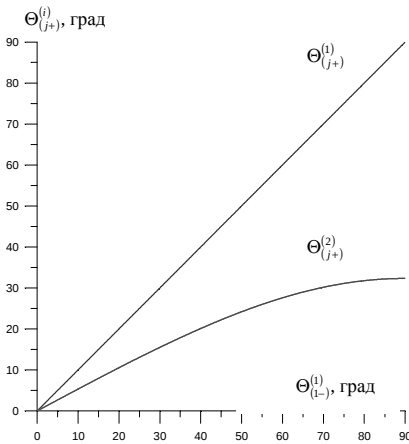


Рис. 2

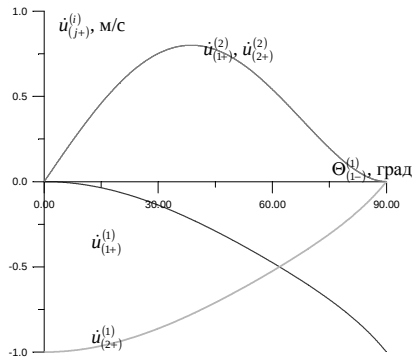


Рис. 3

Якщо на площину G падає S -хвиля, то, як впливає з рис. 4, для неї кут $\Theta_{(1-)}^{(2)} = \arcsin(\beta\alpha^{-1}) = 32.3^\circ$ є критичним. При цьому значенні $\Theta_{(1-)}^{(2)}$ інтенсивності швидкостей $\dot{u}_{(1+)}^{(1)}$, $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$ подовжніх хвиль прагнуть до нескінченності (рис. 5), в той час, як інтенсивності поперечних хвиль

прагнуть обмінятися своїми значеннями. За межами критичного значення кута $\Theta_{(1-)}^{(2)}$ мають місце біфуркаційні явища.

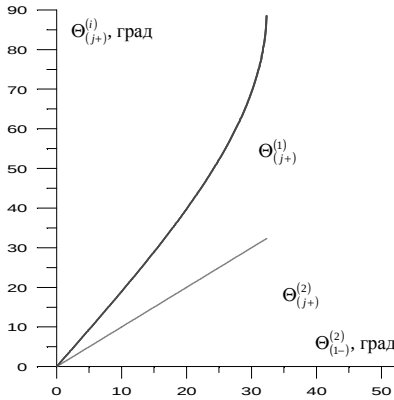


Рис. 4

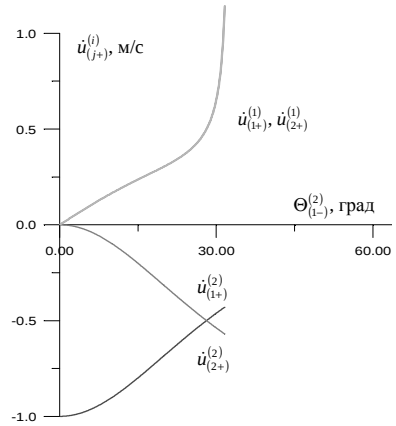


Рис. 5

Критичні стани на межі розділу пружних середовищ. Питання про зв'язок кінематичних і динамічних умов виникнення критичних станів розривних хвиль на межах контакту пружних середовищ з різними параметрами пружності повинні розв'язуватися на основі аналізу рівнянь Снелля і рівнянь динамічної взаємодії з відповідними матрицями A . Дослідження цього питання для трансверсально-ізотропних середовищ аналітичними засобами здійснити важко. Великі труднощі виникають і при спробі вирішення цієї задачі для ізотропних пружних середовищ, в загальному вигляді. Тому нами це дослідження було проведене для ізотропних середовищ з конкретними вибраними значеннями параметрів пружності шляхом комп'ютерного вирішення рівнянь. Розрахунки виконані для випадку, коли механічні параметри для першого і другого середовищ склали $E_1 = 3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu_1 = 0,3$, $\rho_1 = 2510 \text{ кг/м}^3$; $E_2 = 2 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu_2 = 0,1$, $\rho_2 = 3510 \text{ кг/м}^3$.

Досліджене падіння подовжньої P -хвилі із середовища I на площину G розділу середовищ. Аналіз розв'язків рівнянь Снелля – кути $\Theta_{(1+)}^{(1)}$, $\Theta_{(1+)}^{(2)}$, $\Theta_{(2+)}^{(1)}$, $\Theta_{(2+)}^{(2)}$ – показує, що відображені в середовище I та заломлені в середовище II розривні хвилі при зміні кута падіння в межах

$0 \leq \Theta_{(1-)}^{(1)} < \pi/2$ не набувають критичних величин. Інтенсивності хвиль, які сформувалися на площині, $\dot{u}_{(1+)}$, $\dot{v}_{(1+)}$, $\dot{u}_{(2+)}$, $\dot{v}_{(2+)}$, які залежать від кута падіння $\Theta_{(1-)}^{(1)}$, мають кінцеві значення і динамічні критичні стани в даному випадку не виникають.

Проте ситуація міняється, якщо падаючою є поперечна S-хвиля. Для неї при $\Theta_{(1-)}^{(2)} = 32.3^\circ$ настає ефект квазіповного внутрішнього відображення і кут $\Theta_{(1+)}^{(1)}$ приймає значення 90° . Вирішення динамічної задачі показало, що при цьому значенні кута $\Theta_{(1-)}^{(2)}$ величини інтенсивностей всіх хвиль $\dot{u}_{(1+)}$, $\dot{v}_{(1+)}$, $\dot{u}_{(2+)}$, $\dot{v}_{(2+)}$ необмежено зростають.

Аналогічні дослідження проведені для випадків, коли початкова P-хвиля і S-хвиля падають із середовища II в середовище I. У першому випадку критичний кут падіння складає $\Theta_{(1-)}^{(1)} = 36.9^\circ$. При цій величині

кута визначник матриці A приймає нульове значення і інтенсивності всіх хвиль, що сформувалися на поверхні G, спрямовуються до нескінченності.

Такий же ефект має місце і у разі, коли падаючою є S-хвиля. Для вибраних значень механічних параметрів середовищ I і II критичний кут падіння склав $\Theta_{(1-)}^{(2)} = 23.6^\circ$.

Висновок. Аналіз критичних станів явищ дифракції плоских розривних (слабких ударних) P- і S-хвиль на площинах розділу пружних середовищ з різними механічними властивостями показав, що у всіх розглянутих випадках вони виникають в результаті настання ефекту квазіповного внутрішнього відображення і супроводжуються необмеженим (в рамках ідеальної теорії пружності) зростанням інтенсивності хвиль, які сформувалися на поверхні розділу середовищ. При цьому кінематичний і динамічний критерії втрати стійкості реалізуються одночасно.

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир, 1972. – 183с.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2 т. Т.1 Общие вопросы. К.: Наукова думка, 1986.
3. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Фокусировка и рассеивание плоских ударных волн на поверхности раздела анизотропных упругих сред // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – 43, №5. – С. 21–27.

4. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Фокусировка и рассеивание плоской акустической волны transversально-изотропными упругими линзами //Акустический журнал. – 2004. 50, №2 – С.177–183.
5. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела transversально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, №3. – С. 394–402.
6. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304с.
7. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. 280 с.
8. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К.: Наукова думка, 1988. 220 с.
9. Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Ivanchenko G.M. Focusing and scattering the nonstationary wave by the free surface of an anisotropic elastic medium //Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, №7. – P.86–93.
10. Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media //International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237–247.