УДК 517.955

к. ф.-м. н, доц. Бондаренко Н.В.,
natvbond@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6078-9467,
Київський національний університет будівництва і архітектури

МЕТОДИ АЛГЕБР ЛІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Розглядається алгебраїчний метод розв'язку задачі Коші деякого класу диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу. Продемонстровано застосування алгебр Лі для розв'язку часткового випадку лінійного диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку.

Ключові слова: Лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних, алгебра Лі, розв'язна алгебра Лі.

Вступ. Диференціальні рівняння в частинних похідних мають важливе значення в інженерних розрахунках. При розробці нових або реконструкції вже існуючих будівельних об'єктів доводиться розв'язувати задачі, пов'язані з дослідженням напружено-деформованого стану конструкцій, поширенню тепла, руху рідини та ін., які в кінцевому випадку зводяться до розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних. Іноді ці розв'язки можуть бути отримані за допомогою численних традиційних методів, що підходять для інтегрування певних типів рівнянь. Проте часто з'являються математичні моделі з диференціальних рівнянь, для яких не застосовні звичайні алгоритми для знаходження аналітичного розв'язку. Щоб розв'язати такі диференціальні рівняння доводиться застосовувати різні методи. Одним з них є застосування методів алгебр Лі для знаходження явного розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних. Відомо, що лієві методи відіграють важливу роль у вирішенні різноманітних проблем у квантовій фізиці, механіці, математиці. Алгебраїчні методи цікаві тим, що спрощують розв'язок задач завдяки використанню лінійних методів в доведеннях та обчисленнях. Дослідженню застосування алгебраїчних методів до розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних різних типів присвячено роботи [1], [2], [5], [6], [8].

Ми розглянемо алгебраїчний підхід до розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних, який базується на дослідженнях, зроблених у роботах [7], [9] відносно рівняння

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(0) = I, \tag{1}$$

де $A(t)$ і $U(t)$ − лінійні оператори, а I − тотожний оператор. Причому вважається, що оператор $A(t)$ може бути записаний у вигляді

$$A(t)=\sum_{i=1}^{m}a_i(t)X_i,$$

де $a_i(t)$ − функції часу t, X_i − оператори, що не залежать від t.

З таким диференціальним рівнянням пов'язується скінченновимірна алгебра Лі L, породжена операторами X_i, для якої дужка Лі визначається $[X_i,X_j]=X_iX_j-X_jX_i$. В роботі [9] було показано, якщо $X_1,X_2,...,X_l$ − базис розв'язної алгебри Лі L, тоді існує окіл точки $t=0$, в якому розв'язок задачі Коші (1) може бути представлений у вигляді $U(t)=\prod_{i=1}^{l}\exp(g_i(t)X_i)$.

Метод алгебр Лі для розв'язку лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу.

Розглянемо задачу Коші для рівняння вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,X)=A(t;X)f(t,X),\ f(0;X)=\varphi(X), \tag{2}$$

де $X=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^m$, $\varphi(X)$ – довільна обмежена аналітична функція, визначена в деякій відкритій області в $\mathbb{R}^m$, і

$$A(t;X)=\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i,j=1}^{m}b_{ij}(t)x_i\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{i,j=1}^{m}c_{ij}(t)x_ix_j+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}d_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{m}e_j(t)x_j+h(t). \tag{3}$$

Коефіцієнти $a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t), d_j(t), e_j(t), h(t)$ диференціального оператора $A(t;X)$ є обмеженими аналітичними функціями часу t, визначеними в деякому інтервалі.

Ми будемо вважати, що розв'язок задачі Коші (2) існує і однозначно визначений для достатньо малих значень t. Перевірка існування і єдиності розв'язку задачі Коші (2) розглядалася в роботі [8].

Задачі типу (2) часто з'являються в математичній фізиці. Наприклад, частковими випадками цієї задачі є лінійне рівняння Фоккер-Планка, лінійне рівняння Шрьодингера з потенціалом, параксіальне наближення рівняння Гельмгольця.

Відомо, що диференціальний оператор $A(t;X)$ є елементом скінченновимірної алгебри Лі L розмірності n з дужкою Лі $[A_1,A_2]=A_1\circ A_2-A_2\circ A_1$, де $A_1,A_2\in L$, а $\circ$ − позначає композицію операторів.

Розв'язок рівняння (2) можна записати у вигляді

$$f(t,X) \equiv U(t)f(0;X) = e^{tA}\varphi(X), \tag{4}$$

де $\exp(tA)$ можна інтерпретувати як елемент простої зв'яної групи Лі, асоційованої з алгеброю Лі L [3].

Нехай $A_1(X), A_2(X),..., A_n(X)$ − незалежні від часу оператори, що утворюють базис алгебри Лі L, тоді оператор $A(t,X)$ можна записати у вигляді

$$A(t,X) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)A_i(X).$$

Розглянемо асоційоване до рівняння (2) лінійне операторне рівняння

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t,X)U(t), \quad U(0) = I, \tag{5}$$

де I − тотожний оператор.

Якщо алгебра Лі L є розв'язною і $U(t)$ − розв'язок рівняння (5), то існує окіл точки $t = 0$, де він може бути представлений у вигляді

$$U(t) = \exp(g_1(t)A_1)\exp(g_2(t)A_2)\cdot ...\cdot \exp(g_n(t)A_n). \tag{6}$$

Функції $g_i(t)$ задовольняють диференціальні рівняння, що залежать від алгебри Лі L і коефіцієнтів $a_i(t)$. Підставивши розв'язок (6) в рівняння (5), ми отримаємо матричне рівняння або, що теж саме, систему диференціальних рівнянь, з якої визначаються невідомі функції $g_i(t)$, $i = 1,...,n$. Далі, обчисливши вирази $(\exp(g_i A_i)\varphi)(x), i = 1,...,n$, ми отримаємо розв'язок рівняння (2) в околі точки $t = 0$.

В загальному випадку для оператора $A(t;X) \in L$, система диференціальних рівнянь з невідомими функціями $g_i(t)$ не завжди може мати розв'язок. Потрібні наближені методи розв'язку. В такому випадку для розв'язку операторного рівняння (5) розглядають наближений метод, відомий як Fer факторизація [1]. Якщо ж алгебра Лі L, породжена оператором $A(t,x)$, не є розв'язною, розв'язок $U(t)$ операторного рівняння (5) є нескінченним добутком експонент $\exp(g_i(t)A_i)$, $i = 1,2,...$. Тоді розглядають n-тий частинний добуток $V_n(t)$, який буде наближеним розв'язком рівняння (5), $U(t) \approx V_n(t)$. Похибка такого наближення розглянута в роботі [1].

$$\| U(t) - V_n(t) \| \le K_n(t)\exp\left(\sum_{i=0}^{n} K_i(t)\right), \; n \ge 1,$$

$$\text{де } K_0 \equiv \int_0^t \| A(s) \| ds, \; K_{n+1} = \int_0^{K_n} \frac{1 - e^{2x}(1-2x)}{2x} dx.$$

Результати. Розв'язки задачі Коші типу (2), (3) в різних часткових випадках розглядалися в роботах [1], [2], [11]. Ми розглянемо задачу Коші (2) в одновимірному випадку наступного вигляду:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = A(t;x) f(t,x), \qquad f(0;x) = \varphi(x), \tag{7}$$

де $A(t,x) = a(t)\partial^2 + b(t)x\partial + c(t)\partial + d(t)x + h(t)$, а $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial x}$.

Оператори $A_1 = I, A_2 = x\partial, A_3 = \partial, A_4 = \partial^2, A_5 = x$ утворюють базис алгебри Лі L. Основні дужки Лі цих операторів мають вигляд:

$$[A_2, A_3] = -A_3,\ [A_2, A_4] = -2A_4,\ [A_2, A_5] = A_5,$$
$$[A_3, A_4] = 0,\ [A_3, A_5] = A_1,\ [A_4, A_5] = 2A_3,$$
$$[A_1, A_i] = 0, [A_i, A_i] = 0,\ i = 1,...,5$$

Скінченновимірна алгебра Лі L, породжена операторами $A_1 = I$, $A_2 = x\partial$, $A_3 = \partial$, $A_4 = \partial^2$, $A_5 = x$ є розв'язною ступеня 3. Дійсно,

$$L =< A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 >, \qquad L^{(1)} = [L, L] =< A_1, A_3, A_4, A_5 >,$$
$$L^{(2)} = [[L, L], [L, L]] =< I, A_3 >, \qquad L^{(3)} = \{0\}.$$

Оператор $A(t,x)$ має вигляд

$$A(t,x) = h(t)A_1 + b(t)A_2 + c(t)A_3 + a(t)A_4 + d(t)A_5. \tag{8}$$

Розв'язок рівняння (7) будемо шукати у вигляді $f(x,t) = = U(t) f(0;x) = e^{tA}\varphi(X)$.

Запишемо асоційоване до рівняння (7) лінійне операторне рівняння:

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t,x)U(t), \quad U(0) = I. \tag{9}$$

Розв'язок $U(t)$ цього рівняння має вигляд $U(t) = e^{g_1 A_1} e^{g_2 A_2} e^{g_3 A_3} e^{g_4 A_4} e^{g_5 A_5}$.
Враховуючи розклад (8) підставимо $U(t)$ в рівняння (9):

$$h(t)A_1 + b(t)A_2 + c(t)A_3 + a(t)A_4 + d(t)A_5 =$$
$$= g_1' A_1 + g_2'(e^{g_1 adA_1})A_2 + g_3'(e^{g_1 adA_1} e^{g_2 adA_2})A_3 +$$
$$+ g_4'(e^{g_1 adA_1} e^{g_2 adA_2} e^{g_3 adA_3})A_4 +$$
$$+ g_5'(e^{g_1 adA_1} e^{g_2 adA_2} e^{g_3 adA_3} e^{g_4 adA_4})A_5.$$

$(e^{g_1 adA_1})A_2 = A_2$,

$$(e^{g_1 adA_1} e^{g_2 adA_2})A_3 = A_3 - g_2 A_3 + \frac{1}{2!} g_2^2 A_3 - \frac{1}{3!} g_2^3 A_3 + ... = e^{-g_2} A_3,$$
$$(e^{g_1 adA_1} e^{g_2 adA_2} e^{g_3 adA_3})A_4 = e^{-2g_2} A_4,$$
$$(e^{g_1 adA_1} e^{g_2 adA_2} e^{g_3 adA_3} e^{g_4 adA_4})A_5 = g_3 A_1 + 2g_4 e^{-g_2} A_3 + e^{g_2} A_5.$$

Отже, невідомі функції g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 задовольняють матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} h \\ b \\ c \\ a \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & g_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-g_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2g_2} & 2g_4 e^{-g_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{g_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \\ g_3' \\ g_4' \\ g_5' \end{pmatrix}$$

Виконавши перетворення, знайдемо невідомі функції g_1, g_2, g_3, g_4, g_5

$$g_2 = \int_0^t b(t)dt,\ g_3 = \int_0^t e^{g_2} c(t)dt,\ g_5 = \int_0^t e^{-g_2} d(t)dt, \qquad (10)$$

$$g_1 = \int_0^t (h(t) - g_3 e^{-g_2} d(t))dt,\ g_4 = e^{-2\int_0^t d(t)dt} \int_0^t e^{2(g_2 + \int_0^t d(t)dt)} a(t)dt.$$

Використаємо рівності ([11])

$$\exp\left(g(t)x \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) = e^{g(t)} f(xe^{g(t)}),$$
$$\exp\left(g(t) \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) = f(x + g(t)),$$
$$\exp\left(g(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi g(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4g(t)} \right) f(y)dy,$$
$$\exp\big(g(t)x\big) f(x) = f(x) e^{xg(t)}.$$

Таким чином, отримаємо розв'язок задачі Коші (7):

$$f(x,t) = \exp\big(g_1(t)\big) \exp\left(g_2(t)x \frac{\partial}{\partial x} \right) \exp\left(g_3(t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot$$
$$\cdot \exp\left(g_4(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \exp(g_5(t)x)\varphi(x) =$$
$$= \frac{e^{g_1(t) + g_2(t)}}{\sqrt{4\pi g_4(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(xe^{g_2(t)} + g_3(t) - y)^2}{4g_4(t)} \right) \mathrm{e}^{g_5(t)y} \varphi(y)dy.$$

Отриманий в роботі розв'язок задачі Коші (7) за допомогою алгебраїчних методів, можна отримати й іншими традиційними методами. Проте на практиці цей метод завдяки стислості та ясності викладу досить зручний і дозволяє отримати аналітичний розв'язок певних типів диференціальних рівнянь в частинних похідних не використовуючи складних методик. Методи алгебр та груп Лі є досить ефективними також для розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь [10].

ЛІТЕРАТУРА

1. F. Casas, Solution of linear partial differential equation by Lie algebraic methods. – Journal of Computational and Applied Mathematics, 76, 1996. – P. 159–170.

2. G. Dattoli, M. Richetta, G. Schettini, A. Torre. Lie algebraic methods and solutions of linear partial differential equations. – Journal of Mathematical Physics 31, N.12, 1990. – P. 2856-2863.

3. R. Gilmore, Lie Groups, Lie algebras, and some of Their Applications – Krieger, Malabar, FR –1994.

4. F. Granström, Symmetry methods and some nonlinear differential equations

5. N. H. Ibragimov, R. N. Ibragimov, Applications of Lie Group Analysis to Mathematical Modelling in Natural Sciences. - Math. Model. Nat. Phenom. Vol. 7, No. 2, 2012, P. 52–65.

6. E.G. Kalnins, Special functions, Lie theory and partial differential equations. – Revista Columbiana de matematicas, V. 31, 1997. – P. 1–36.

7. W. Magnus, On the exponensial solution of differential equations for a linear operator, Comm. Pure Appl. Math., 7, 1954, 649-673.

8. P.J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer, New York, 2nd ed., 1993.

9. J. Wei and Norman, On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials. – Proc. Amer. Math. Soc., 15, 1964. – P. 327–334.

10. P. Winternitz, Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations, Lectures delivered at School on Recent Problems in Mathematical Physics, Salamanca, Spain, June 15-27, 1992.

11. F. Wolf, Lie algebraic solution of linear Fokker-Planck equations. – Journal of Math. Fhys., 11, 1970. – P. 1235–1237.

к. ф.-м. н, доцент Бондаренко Н.В.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

МЕТОДЫ АЛГЕБР ЛИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассматривается алгебраический метод решения задачи Коши некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Продемонстрировано применение алгебр Ли для решения частного случая линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.

Ключевые слова: Линейное дифференциальное уравнение в частных производных, алгебра Ли, разрешимая алгебра Ли.

Ph.D., Associate Professor Bondarenko N.V.,
Kyiv National University of Construction and Architecture

LIE ALGEBRAIC METHODS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

An algebraic method for solving the Cauchy problem of some class of partial differential equations of parabolic type is considered. The use of Lie algebras for solving a partial case of a linear partial differential equation of the second order is demonstrated.

Keyword: Linear partial differential equation, Lie algebra, solvable Lie algebra.