

УДК 539.3

Погорелова О.С., канд. фіз.-мат. наук**Постнікова Т.Г.**, канд. техн. наук**Гончаренко С.М.**, інж.

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ УДАРНО-ВІБРАЦІЙНОГО МАЙДАНЧИКА ПРИ ЗМІНІ ЙОГО ПАРАМЕТРІВ

Виконано числове дослідження динаміки двомасової віброударної системи з двома ступенями свободи на прикладі ударно-вібраційного майданчика, який широко застосовується у будівельному виробництві. Установлена залежність напіврозмахів тіл майданчика та величини контактної сили від її механічної характеристики. Досліджена втрата стійкості гармонічного одноударного режиму коливань майданчика та виникнення субгармонічного двоударного режиму при деяких значеннях цієї характеристики. Удар моделюється силою контактної взаємодії, що описана законом Герца.

1. Постановка проблеми

Динаміка віброударних процесів у механічних системах становить чималий інтерес для фахівців, що займаються питаннями створення обладнання для сучасного високоефективного будівельного виробництва. Тому цілий ряд дослідників [1,2] займаються питанням вивчення та моделювання руху й сил взаємодії між тілами у віброударних системах.

У статті досліджується динаміка руху двомасової віброударної системи з двома степенями свободи на прикладі ударно-вібраційного майданчика, який призначений для формування залізобетонних виробів та ущільнення будівельних сумішей.

У будівництві використовуються вібраційні та ударно-вібраційні майданчики різних конструкцій [3,4,5]. У статті досліджується динаміка руху низькочастотного ударно-вібраційного майданчика блочного типу СМЖ-538А з частотою коливань 25 Гц без закріплення форми (рис.1). Майданчик випускається серійно, він широко застосовується на підприємствах будівельної індустрії для виробництва продукції з рухомих та малорухомих бетонних сумішей.

Рис. 1

Майданчик складається з чотирьох окремих блоків, оснащених двома вібраторами, що самосинхронізуються. У такому віброударному майданчику імпульси генеруються різними збуджувачами: гармонійні коливання - серійними віброзбуджувачами (вібраторами), ударні - при падінні рухомих частин майданчика на опори, на яких закріплені обмежувачі коливань. При роботі віброударного майданчика існує

можливість задавати необхідні параметри вібрацій і удару, регулювати тривалість і послідовність впливу кожного виду коливань. На столі вібромайданчика на пружну гумову прокладку-обмежувач установлюється форма з бетонною сумішшю. Під час роботи майданчика з певною частотою та прискоренням, яке перевищує прискорення вільного падіння, форма відривається від столу майданчика, і при зустрічному русі відбувається зіткнення форми з блоками, що і створює віброударний режим руху. Приводом є вібробуджувачі загального призначення, які встановлюються по двох на кожен блок. Величина імпульсів при зіткненні залежить від режимів роботи майданчика, співвідношення мас форми з бетонною сумішшю й стола майданчика та жорсткості пружних елементів.

2. Розрахункова схема майданчика та рівняння руху

Для вивчення динаміки коливань майданчика і явища удару між формою й столом майданчика розглянемо найпростіший варіант побудови математичної моделі двомасового ударно-вібраційного майданчика з двома ступенями вільності без закріплення форми (рис. 2).

Стіл майданчика масою m_1 кріпиться до фундаменту двома лінійними віброізолюючими пружинами із сумарною жорсткістю k_1 . Двигуни, що встановлені під столом, генерують збудовуючу силу $F(t)$. До столу кріпиться пружна прокладка (обмежувач коливань) товщиною h із лінійною жорсткістю k_0 , на якій лежить форма масою m_0 . Форма до прокладки не кріпиться й може від неї відриватися.

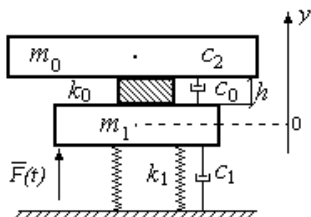


Рис. 2

Зі стану рівноваги форма й майданчик починають прямолінійний вертикальний спільний рух вздовж осі y , який продовжується доти, поки форма не відірветься від майданчика. У стані відриву форма й майданчик рухаються окремо, поки форма не впаде на майданчик. Відбувається удар, під час якого тіла знову рухаються спільно до моменту відриву від майданчика і т.д.

Таким чином існує три стани майданчика – спільний рух форми й стола майданчика на початку руху до моменту відриву; окремий рух тіл під час відриву форми від столу; спільний рух тіл у стані удару в результаті падіння форми на стіл.

При спільному русі до першого відриву форми на тіла діють такі сили: на форму – вага форми з бетоном P_0 і сили опору в бетоні $F_{\text{демп}2}$, пружна

сила в прокладці F_{k0} і сила опору в прокладці $F_{демп0}$; на майданчик – вага столу майданчика P_1 , сила пружності й сила опору у віброізолюючих пружинах F_{k1} і $F_{демп1}$, сила пружності в прокладці F_{k0} і сила опору в прокладці $F_{демп0}$, збуджуюча сила від вібраторів $P(t)$ (рис.3).

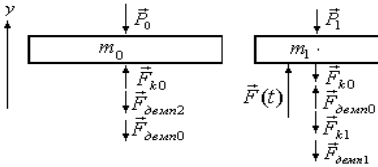


Рис. 3

Складний процес вібраційного ущільнення характеризується необхідністю подолання сил тертя, зчеплення та в'язкого опору. У цьому випадку кінцевий стан бетонної суміші залежить, перше, від зближення великих і дрібних часток заповнювачів, для якого характерне подолання

взаємних сил тертя й зчеплення між частками. По-друге, ущільнення - це перерозподіл бетонного тесту, пов'язаний з його розрідженням. Безумовно, ці сторони одного і того процесу варто розглядати в комплексі. Сили пластичного та в'язкого опору спільно перешкоджають процесу ущільнення, але їхня фізична суть різна. Сили в'язкого опору зменшують вплив сил сухого тертя – цементне тісто виконує роль змащення в процесах ущільнення. Ця обставина і визначила вивчення цілим рядом дослідників сил в'язкого опору і зниження їх значення при вібраційному збудженні [6]. З огляду на великий вплив сил опору на динаміку віброударного майданчика, необхідно ввести три сили опору: у бетонній суміші $F_{демп2}$, у прокладці $F_{демп0}$ і у віброізолюючих пружинах $F_{демп1}$. Сили опору приймаємо пропорційними швидкості з певними коефіцієнтами демпфірування c_2, c_0, c_1 :

$$F_{демп2} = c_2 \dot{y}_0, F_{демп0} = c_0 \dot{y}_0, F_{демп1} = c_2 \dot{y}_1.$$

Початок координат вибираємо у центрі столу майданчика в положенні статичної рівноваги майданчика з формою, що лежить на ньому.

Тоді сили пружності записуємо у вигляді:

$$F_{k0} = k_0 \Delta l_0 = k_0 [h - (y_0 - y_1)];$$

$$F_{k1} = k_1 \Delta l_1 = k_1 (y_1 - \lambda_{cm}),$$

$$\text{де } \lambda_{cm} = \frac{P_0 + P_1}{k_1}.$$

Рівняння руху майданчика з формою мають вигляд:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{y}_0 &= -P_0 - F_{\partial \epsilon m n 2} + F_{k0} - F_{\partial \epsilon m n 0}; \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -P_1 - F_{k1} - F_{\partial \epsilon m n 1} - F_{k0} + F_{\partial \epsilon m n 0} + F(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Зовнішнє навантаження від вібраторів вважається гармонічним $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Вводячи стандартні позначення:

$$\frac{k_0}{m_0} = \omega_0^2, \frac{k_1}{m_1} = \omega_1^2, \frac{c_0}{m_0} = 2\xi_0\omega_0, \frac{c_1}{m_1} = 2\xi_1\omega_1, \frac{c_2}{m_0} = 2\xi_2\omega_0, \frac{m_0}{m_1} = \chi, \quad (2)$$

одержимо рівняння руху майданчика з формою у вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \omega_0^2[h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \omega_0^2 \chi[h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_0 + 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1}(\cos(\omega t) + \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Вихідні умови при $t = 0$ мають вигляд:

$$\varphi = 0, \quad y_1 = 0; \quad \dot{y}_1 = 0; \quad y_0 = h - \lambda_{cm}; \quad \dot{y}_0 = 0. \quad (4)$$

При окремому русі, тобто в стані відриву, на тіла системи діють такі сили: на форму – вага форми з бетоном P_0 і сили опору в бетоні $F_{\partial \epsilon m n 2}$, на майданчик – вага столу майданчика P_1 , сила пружності й сила опору у віброізолюючих пружинах F_{k1} і $F_{\partial \epsilon m n 1}$ та збурююча сила від вібраторів $P(t)$. Рівняння руху в цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g - 2\xi_2\omega_0\dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \frac{F_0}{m_1}\cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Коли форма падає на майданчик, відбувається удар. Під час удару форма й майданчика рухаються спільно, і рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{y}_0 &= -P_0 - F_{\partial \epsilon m n 2} - F_{\partial \epsilon m n 0} + F_{y\partial}; \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -P_1 - F_{k1} - F_{\partial \epsilon m n 1} + F_{\partial \epsilon m n 0} - F_{y\partial} + F(t). \end{aligned} \quad (6)$$

де $F_{y\partial}$ – сила удару.

У [6] було показано, що в прийнятій моделі віброударної системи удар краще моделювати силою, що описується законом Герца [7,8,9].

Тоді $F_{y_0} = K\alpha(t)^{3/2}$, де $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$ – відносне зближення,

$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}$ – константа Герца, тут q , A та B – табличні

константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту, а

$$\delta_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0 \pi}, \quad \delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi},$$

де μ_i и E_i – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для обох тіл.

Рівняння спільного руху в цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \frac{K}{m_0} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0 \dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \frac{K}{m_1} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2\xi_1\omega_1 \dot{y}_1 + 2\xi_0\omega_0\chi \dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

3. Числові дослідження динаміки віброударного майданчика

Характеристики майданчика були взяті відповідно до “Рекомендацій по вибрационному формованію железобетонных изделий” [3,5] (табл. 1).

Таблиця 1

Характеристики віброударного майданчика

Характеристика	Показник
Маса форми з бетоном m_0 , кг	15000,0
Маса стола майданчика m_1 , кг	7400,0
Сумарна жорсткість прокладок k_0 , Н/м	$3,0 \cdot 10^8$
Сумарна жорсткість віброізолюючих пружин k_1 , Н/м	$1,278 \cdot 10^6$
Товщина прокладки h , м	0,0275
Прискорення сили тяжіння g , м/с ²	9,81
Амплітуда зовнішнього навантаження F_0 , Н	$2,44 \cdot 10^5$
Частота зовнішнього навантаження ω , Гц	25
Фаза зовнішнього навантаження φ , рад	0,0
Коефіцієнти демпфірування	
в бетонній суміші ξ_2	0,03
в прокладці ξ_0	0,02
у віброізолюючих пружинах ξ_1	0,02

При моделюванні удару силою Герца механічні характеристики тіл, що співударяються, враховуються достатньо докладно – в розрахунок

входять модулі пружності і коефіцієнти Пуассона обох тіл, а також коефіцієнти, що характеризують геометрію контактуючих поверхонь. Форму вважаємо сталевою з модулем пружності $E_0=2 \cdot 10^{11}$ Н/м² та коефіцієнтом Пуассона $\mu=0,3$. Табличні константи мають значення:

$A=0,1 \frac{1}{\text{м}^2}$, $B=0,1 \frac{1}{\text{м}^2}$, $q=0,318$. Як показали дослідження, характер руху

вібромайданчика і форми залежить від величини модуля пружності гумової прокладки сильно залежить. Як відомо, модуль пружності для різних гум на чотири порядки менше модуля пружності сталі. Однак, при таких значеннях модуля пружності величини сили удару, що діє відповідно до закону Герца, не вистачає для того, щоб відірвати форму від майданчика [6]. Зі збільшенням значення модуля пружності E_1 картина змінюється – в системі достатньо швидко встановлюється гармонічний одноударний режим коливань майданчика і форми. На рис.4 зображені переміщення (рис. 4,а), фазові траєкторії (рис. 4,б,в) та ударна сила контактної взаємодії (рис. 4,г) в такому режимі при значеннях модуля пружності та коефіцієнта Пуассона $E_1=4,3 \cdot 10^8$ Н/м², $\mu=0,4$. На фазових траєкторіях блідосірі лінії відповідають перехідному режиму коливань, а чорні – усталеному.

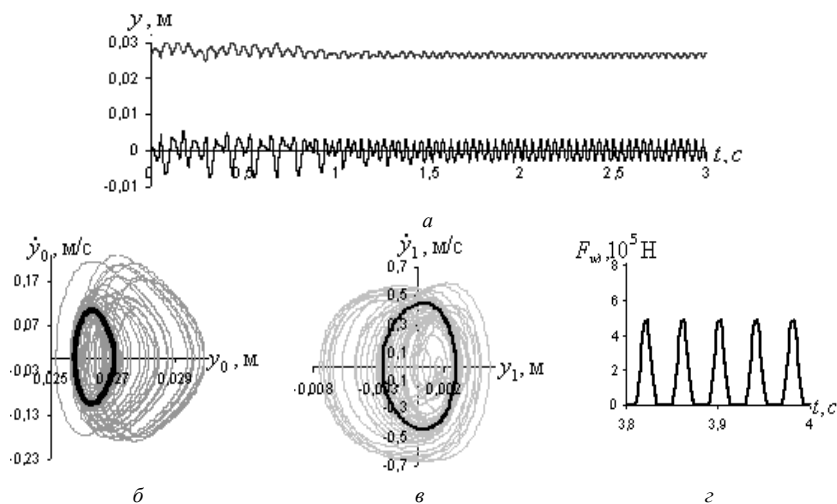


Рис. 4

Але при певних значеннях модуля пружності прокладки E_1 рух віброударного майданчика втрачає стійкість, і режим його коливань

змінюється – в системі реалізується двоударний субгармонічний режим. На рис. 5 зображені переміщення (рис. 5,а), фазові траєкторії (рис. 5,б,в) та контактна сила (рис. 5,г) в такому режимі при $E_1=5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\mu=0,4$.

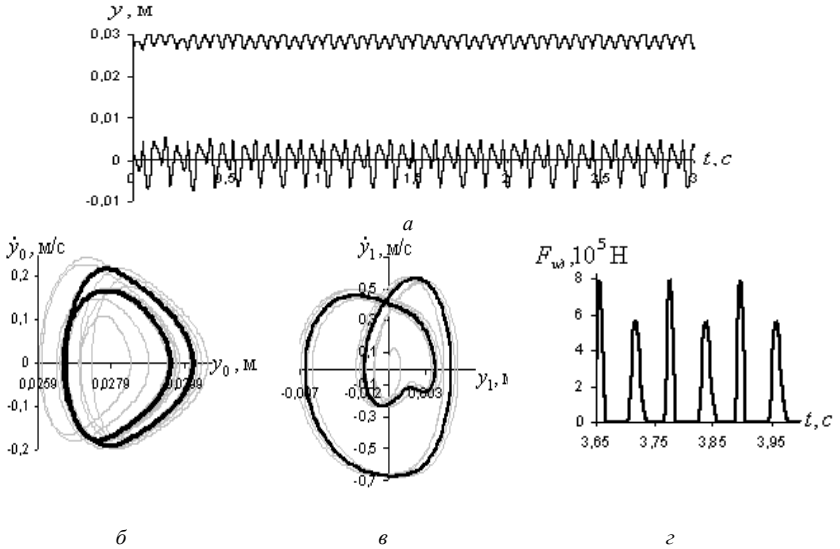


Рис. 5

В цьому випадку період сумарних коливань майданчика $T_{\text{май}0}$ втричі більше за період збудуючої сили $T_{\text{май}0} = 3 \cdot T$. На рис. 6,а тонкою лінією зображений графік зміни в часі сили збурення $P(t)$, а товстою – сили контактної взаємодії $F_{y0}(t)$. Для порівняння на рис. 6,б наведені графіки зміни контактної сили та зовнішнього навантаження при гармонічному одноударному режимі коливань при значеннях модуля пружності та коефіцієнта Пуассона прокладки $E_1=4,3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\mu=0,4$.

В ході числових досліджень було встановлено, що основний гармонічний одноударний режим коливань вібромайданчика втрачає стійкість при значеннях модуля пружності прокладки $E_1=4,35 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ та $E_1=5,70 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$.

На рис. 7 приведені графіки залежності напіврозмахів коливань стола майданчика A_1 (рис. 7,а) та форми A_0 (рис. 7,б) від значень модуля пружності прокладки E_1 у тому випадку, коли рух майданчика починається зі стану рівноваги, тобто виконуються вихідні умови (4). Напіврозмахи обчислюються за звичайними формулами:

$$A_1 = \frac{|y_{1,\max}| + |y_{1,\min}|}{2}, \quad A_0 = \frac{|y_{0,\max}| + |y_{0,\min}|}{2}.$$

де $y_{0,\max}, y_{0,\min}, y_{1,\max}, y_{1,\min}$ отримані відносно своїх математичних сподівань.

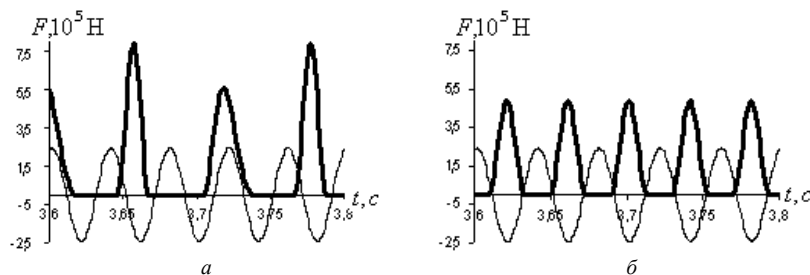


Рис. 6

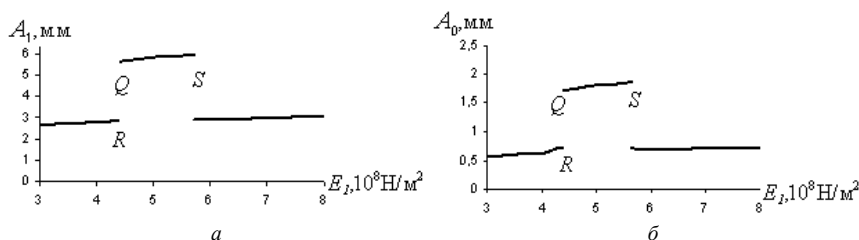


Рис.7

Нижні криві відповідають гармонічному одноударному режиму коливань, верхні – субгармонічному двоударному. Напіврозмахи коливань стола майданчика та форми при вихідних умовах (4) представлені в таблиці 2.

Якщо вихідні умови руху змінити, тобто за початок руху взяти стан системи, якому на графіках рис.7 відповідає точка S на верхніх кривих: $y_0(0) = 0.0271\text{ м}$, $\dot{y}_0(0) = 0.0906\text{ м/с}$, $y_1(0) = 0.00374\text{ м}$, $\dot{y}_1(0) = -0.119\text{ м/с}$ чи точка Q: $y_0(0) = 0.0264\text{ м}$, $\dot{y}_0(0) = 0.112\text{ м/с}$, $y_1(0) = 0.00473\text{ м}$, $\dot{y}_1(0) = -0.203\text{ м/с}$, то побудуємо продовження цих кривих праворуч та ліворуч. Візьмемо нові вихідні умови, які відповідають тому стану, що був одержаний на попередньому кроці та отримуюмо продовження верхніх кривих, і далі рухаємось кроками таким самим чином. Для того, щоб побудувати продовження нижніх кривих, за вихідні умови спочатку візьмемо стан системи, який відповідає точці R. Рухаючись кроками по

цій кривій, отримаємо картину руху, що зображена на рис.8, на якому приведені графіки зміни напіврозмахів коливань стола майданчика A_1 (рис.8,а) та форми A_0 (рис.8,б).

Таблиця 2

Модуль пружності прокладки E_1 , 10^8Н/м^2	Максимум контактної сили Герца, 10^5Н		Напіврозмах стола майданчика, мм	Напіврозмах форми, мм
Гармонічний одноударний режим коливань (нижня крива)				
3,0	4,15		2,67	0,563
4,0	4,72		2,78	0,616
4,2	4,81		2,80	0,680
4,3	4,86		2,81	0,693
4,35	4,89		2,82	0,702
Субгармонічний двоударний режим коливань (верхня крива)				
4,4	7,46	5,11	5,68	1,76
4,5	7,53	5,18	5,70	1,74
5,0	7,90	5,60	5,82	1,79
5,1	7,97	5,70	5,83	1,8
5,2	8,03	5,78	5,84	1,81
5,5	8,24	6,00	5,92	1,84
5,6	8,31	6,05	5,95	1,87
5,65	8,34	6,13	5,95	1,89
5,66	8,33	6,12	5,93	1,85
5,68	8,35	6,14	5,94	1,85
Гармонічний одноударний режим коливань (нижня крива)				
5,7	5,47		2,90	0,707
6,0	5,59		2,91	0,686
7,0	5,95		2,95	0,693
8,0	6,28		2,98	0,709

Верхні криві, що відповідають субгармонічному двоударному режимові коливань, продовжені для тих значень модуля пружності прокладки E_1 , для яких при вихідних умовах (4) існує стійкий гармонічний одноударний режим. Нижні криві також продовжені для тих значень модуля пружності прокладки E_1 , для яких при вихідних умовах (4) існує субгармонічний двоударний режим. Навряд чи побудовані таким чином режими коливань при таких значеннях E_1 можуть бути реалізовані, але з теоретичної точки зору на поведінку нелінійної системи вони заслуговують на увагу.

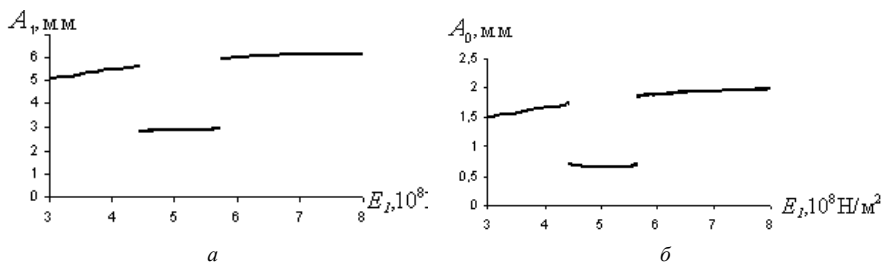


Рис. 8

В таблиці 3 наведені значення сили контактної взаємодії за Герцем та напіврозмахів коливань стола майданчика та форми при продовженні кривих, які відповідають субгармонічному двоударному режимові, ліворуч та праворуч при покроковій зміні вихідних умов. Також наведені результати, що відповідають гармонічному одноударному режиму, який отриманий при покроковій зміні вихідних умов.

Представлені результати досліджень дозволяють визначити, при яких значеннях модуля пружності гумової прокладки E_1 в системі реалізується гармонічний одноударний режим коливань, а при яких – субгармонічний двоударний. Коли значення модуля пружності знаходиться в діапазоні $E_1 \in [3.0; 4.35]$ і при вихідних умовах (4) (стан покою) в системі реалізується гармонічний одноударний режим коливань. При значеннях в діапазоні $E_1 \in [4.35; 5.7]$ при гармонічному зовнішньому навантаженні і таких самих вихідних умовах в системі збуджується двоударний субгармонічний режим. При більших значеннях модуля пружності прокладки, а саме коли $E_1 \in [5.7; 8.0]$, під час роботи майданчика знову реалізується гармонічний одноударний режим коливань.

Треба підкреслити, що при однакових фізичних характеристиках віброударної системи та збуджуючої сили, але при різних вихідних умовах при коливаннях ударно-вібраційного майданчиках теоретично можуть існувати різні динамічні режими: як гармонічний одноударний так і субгармонічний двоударний. Це добре видно на рис. 9, який отриманий з'єднанням рис. 7 та рис. 8.

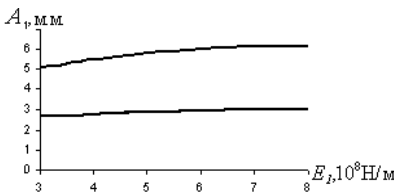
Пояснюється таке явище тим, що віброударна динамічна система являється суттєво нелінійною. А це тягне за собою теоретичну можливість існування різних динамічних станів при різних вихідних умовах.

Для більшої наочності цього на рис. 10 приведені фазові траєкторії руху стола майданчика при всіх однакових значеннях характеристик системи ($E_1 = 3.7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0.4$) і різних значеннях вихідних умов

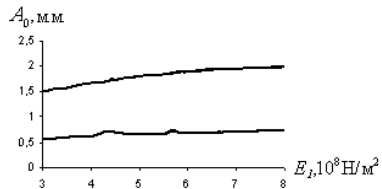
(4) (рис.10,а) та умови $y_0(0) = 0.0259 \text{ м}$, $\dot{y}_0(0) = 0.0596 \text{ м/с}$,
 $y_1(0) = 0.00288 \text{ м}$, $\dot{y}_1(0) = -0.0722 \text{ м/с}$ (рис.10,б).

Таблиця 3

Модуль пружності прокладки E_1 , 10^8Н/м^2	Максимум контактної сили Герца, 10^5Н	Напіврозмах стола майданчика, мм	Напіврозмах форми, мм	
Субгармонічний двохударний режим коливань(верхня крива)				
3,0	6,15	3,72	5,05	1,49
3,7	6,92	4,34	5,36	1,62
3,9	7,11	4,57	5,40	1,64
4,1	7,22	4,81	5,56	1,67
4,3	7,38	5,00	5,63	1,70
Гармонічний одноударний режим коливань (нижня крива)				
4,35	4,95	2,82		0,702
5,0	5,12	2,85		0,650
5,5	5,32	2,88		0,663
5,7	5,47	2,90		0,707
Субгармонічний двохударний режим коливань (верхня крива)				
5,7	8,37	6,15	5,94	1,85
5,8	8,43	6,24	6,03	1,90
5,9	8,49	6,29	5,98	1,87
6,0	8,55	6,38	6,00	1,89
6,5	8,83	6,77	6,01	1,91
7,0	9,15	6,99	6,18	1,97
7,8	9,57	7,51	6,12	1,97
7,9	9,63	7,56	6,11	1,98
8,0	9,68	7,58	6,17	2,00



а



б

Рис.9

Таким чином, за допомогою запропонованого підходу до моделювання руху і сил взаємодії між тілами у віброударних системах можна знаходити межі значень параметрів системи, які б могли забезпечити стійкий ударно-вібраційний режим коливань.

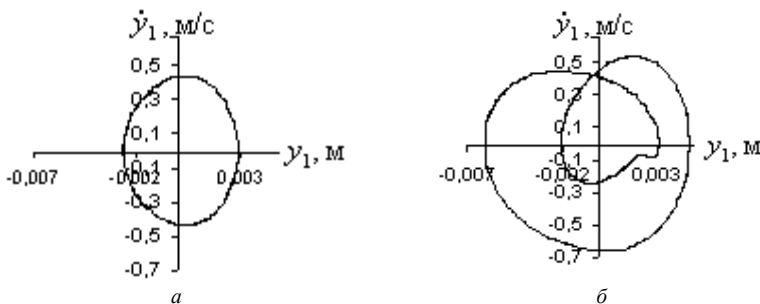


Рис. 10

5. Висновки

Моделювання удару силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца, дозволяє детальніше врахувати механічні властивості тіл, що співударяються. Це в свою чергу дає можливість виявити таке цікаве явище, як втрата стійкості гармонічного одноударного режиму коливань ударно-вібраційного майданчика та перехід системи до субгармонічного двоударного режиму при певних значеннях його механічної характеристики. Покрокова зміна вихідних умов дозволяє отримати два різних режиму коливань при тих самих характеристиках майданчиків. Проведені дослідження дозволяють визначити, при яких значеннях однієї з механічних характеристик системи який режим коливань реалізується в системі.

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.:Наука, 1978. – 352 с.
2. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования, 1997 – 336 с.
3. *Гусев Б.В., Зазимко В.Г.* Вибрационная технология бетона. – К.: Будівельник, 1991. – 160 с.
4. *Назаренко І.І.* Машини для виробництва будівельних матеріалів: Підручник.-К.: КНУБА, 1999.- 488 с.
5. Рекомендации по вибрационному формированию железобетонных изделий//НИИЖБ. – М., 1986. – 78 С.
6. *В.А.Баженов, О.С.Погорелова, Т.Г.Постникова, С.Н.Гончаренко* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах// Проблемы прочности. – (У друку).
7. *В.А.Баженов, О.С.Погорелова, Т.Г.Постникова, О.А.Лукьянченко* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Проблемы прочности. - 2008. - №5. – С. 25-37.
8. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.: Стройиздат, 1965. –448 с.
9. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.