

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
СТАТИКА**

Методичні вказівки
до вивчення курсу
для здобувачів першого (бакалаврського)
рівня вищої освіти спеціальностей
131 «Прикладна механіка»,
133 «Галузеве машинобудування»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
192 «Будівництво та цивільна інженерія»

Київ 2025

УДК 531.3

T11

Укладачі: В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук, професор;
К.Е. Котенко, канд. техн. наук, доцент

Рецензент К.І. Почка, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук,
професор

*Затверджено на засіданні кафедри теоретичної механіки,
протокол № 2 від 19 листопада 2024 року.*

В авторській редакції.

Теоретична механіка. Статика : методичні вказівки до вивчення
T11 курсу / уклад. : В.В. Гайдайчук, К.Е. Котенко. – Київ : КНУБА,
2025. – 40 с.

Містять приклади задач з теоретичної механіки та методику їх
розв'язання з використанням комп'ютерного програмування.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 133
«Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика,
електротехніка та електромеханіка», 151 «Автоматизація та
комп'ютерно-інтегровані технології» і 192 «Будівництво та цивільна
інженерія».

© КНУБА, 2025

Зміст

Загальні положення.....	4
1. Визначення реакцій опор твердого тіла.....	5
1.1. Короткі відомості з теорії	5
1.2. Порядок розв'язання задачі	6
1.3. Умова і приклад виконання задачі	6
2. Визначення реакцій опор складеної конструкції (системи двох тіл).....	12
2.1. Порядок розв'язання задачі	13
2.2. Умова і приклад виконання задачі... ..	13
3. Визначення реакцій опор плоскої ферми і зусиль в її стержнях	20
3.1. Порядок розв'язання задачі	20
3.2. Умова і приклад виконання задачі	21
4. Довільна просторова система сил. Визначення реакцій в'язей твердого тіла.....	30
4.1. Короткі відомості з теорії	30
4.2. Порядок розв'язання задачі	30
4.3. Умова і приклад виконання задачі	31
Список літератури.....	39

Загальні положення

Теоретична механіка є однією із найважливіших дисциплін фізико-математичного циклу, на основних положеннях якої ґрунтуються такі загально-інженерні дисципліни, як опір матеріалів, теорія пружності, теорія механізмів і машин, деталі машин, будівельна механіка. Її закони знаходять застосування в машинобудуванні, авіації, космонавтиці та інших галузях. В цьому відношенні засвоєння її теоретичного матеріалу і практичного використання є необхідними умовами професійної досконалості фахівців для проведення розрахунків міцності, жорсткості і стійкості елементів машин, механізмів, будівельних конструкцій.

Розділ «СТАТИКА» є важливою частиною фундаментальної основи цієї дисципліни. В цьому розділі вивчаються умови рівноваги матеріальних тіл і методи перетворення систем діючих сил до найпростішого виду.

Основною метою даної роботи є визначення і застосування ефективних підходів і формування методичних умов для поглибленого засвоєння студентами теоретичного матеріалу розділу «СТАТИКА», його поширеного практичного використання. Розділ включає розрахунки ферм, рам, каркасів та інших будівельних конструкцій.

Ці методичні вказівки розглядаються як введення до застосування однієї із найрозповсюджених математичних систем комп'ютерного програмування *MathCAD* для розв'язку задач різного ступеня складності в курсі «Теоретична механіка».

Завданням роботи є навчити студентів використанню системи *MathCAD* для аналізу поведінки конструкцій відповідно до поставлених задач теоретичної механіки.

З навчального погляду розв'язання та виконання аналізу задач «СТАТИКИ» з використанням пакету *MathCAD* сприяє поглибленому засвоєнню студентами теоретичних методів розв'язання типових задач і відпрацюванню навичок їх практичного використання.

Наведені нижче приклади розв'язання задач включають визначення реакцій опор твердого тіла, складеної конструкції, розрахунки плоских статично-визначених ферм, визначення реакцій в'язей просторових конструкцій.

1. Визначення реакцій опор твердого тіла

1.1. Короткі відомості з теорії

Категорія задач на визначення реакцій опор твердого тіла потребує використання студентами базових положень рівноваги довільної плоскої системи сил.

Аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил виражаються наступними залежностями:

перша (або головна) форма

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил на кожну з двох координатних осей та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки на площині дії сил дорівнювали нулю;

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad (1.1)$$

друга форма

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил системи відносно двох точок A і B та сума проєкцій всіх сил на координатну вісь Ox , не перпендикулярну до прямої AB , дорівнювали нулю;

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad (1.2)$$

третя форма

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил системи відносно трьох точок A , B і C , що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю.

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad (1.3)$$

1.2. Порядок розв'язання задачі

Задачі на рівновагу довільної плоскої системи сил, що прикладена до конструкції, рекомендується розв'язувати таким чином:

1. Зобразити розрахункову схему згідно з вказаними розмірами та показати на ній активні сили, що діють на конструкцію.
2. Замінити в'язі відповідними реакціями.
3. Скласти аналітичні рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил.
4. Розв'язати отриману систему рівнянь рівноваги.
5. Скласти перевірочне рівняння моментів сил.
6. Підставити у перевірочне рівняння числові значення отриманих реакцій. При цьому необхідно, щоб похибка розрахунку у перевірочному рівнянні не перевищувала $\pm 0,001$.

1.3. Умова і приклад виконання задачі

Балка ABC закріплена в точці A нерухомим циліндричним шарніром і утримується в точці B шарнірно-рухомою опорою. Балка знаходиться в рівновазі під дією пари сил з моментом M , зосередженої сили P і розподіленого навантаження, інтенсивністю q (рис. 1.1).

Необхідно визначити реакції в'язей в точках A і B .

Дано:

схема конструкції (рис. 1.1);

$P=25$ кН; $M=15$ кН·м; $q=7$ кН/м

$a=3$ м; $b=4,4$ м; $s=2,5$ м; $\alpha=40^\circ$; $\beta=60^\circ$

Визначити реакції опор в точках A та B : X_A —?, Y_A —?, R_B —?

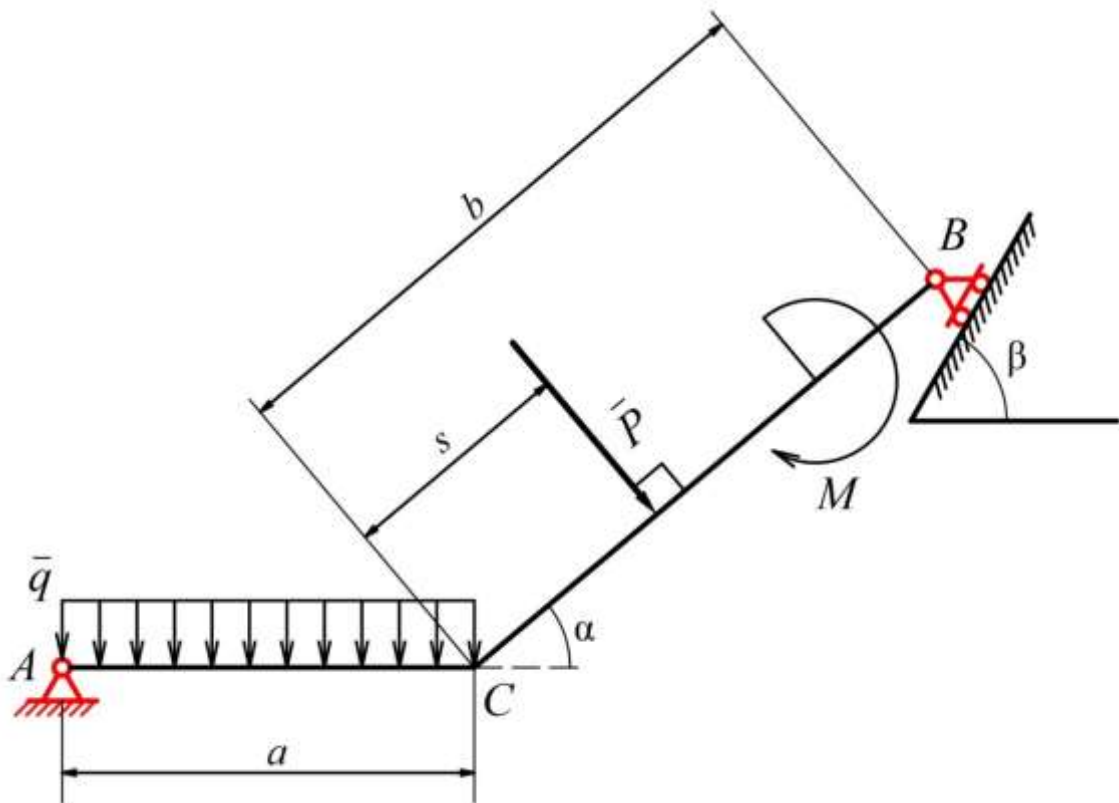


Рис. 1.1. Розрахункова схема балки

Рівномірно розподілене навантаження, інтенсивністю q , замінимо рівнодіючою Q :

$$Q = q \cdot a = 7 \cdot 3 = 21 \text{ кН.}$$

Замінимо опори (в'язі) їх реакціями (рис. 1.2) і розглянемо зрівноважену систему сил, прикладених до конструкції, яка складається із: активних сил P , Q , моменту M , а також із невідомих реакцій опор X_A, Y_A, R_B . Ця система сил є довільною плоскою.

Для визначення невідомих з умови задачі використаємо першу (або головну) форму аналітичних умов рівноваги і складемо рівняння:

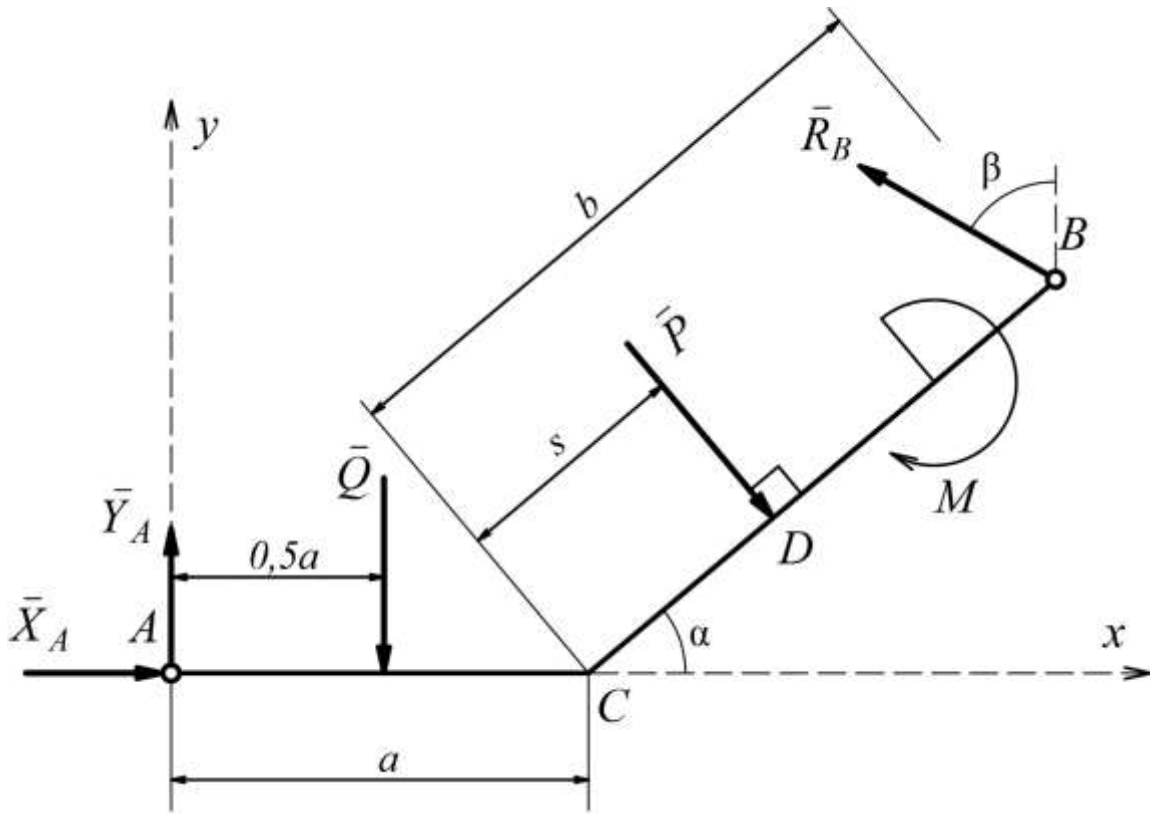


Рис. 1.2. Конструктивна схема за умов звільнена від в'язей

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad X_A - R_B \cdot \sin \beta + P \cdot \sin \alpha = 0; \quad (1.4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cdot \cos \beta - Q - P \cdot \cos \alpha = 0; \quad (1.5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad R_B [a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos(\beta - \alpha)] - M - \frac{1}{2} Q \cdot a - P [a \cdot \cos \alpha + s] = 0 \quad (1.6)$$

Розв'яжемо систему рівнянь і визначимо невідомі величини реакцій: із рівняння (1.6) знаходимо R_B :

$$R_B = \frac{M + \frac{1}{2} Q \cdot a + P [a \cdot \cos \alpha + s]}{[a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos(\beta - \alpha)]} = \frac{15 + \frac{1}{2} 21 \cdot 3 + 25 [3 \cdot \cos 40 + 2,5]}{[3 \cdot \cos 60 + 4,4 \cdot \cos(20)]} = 29,541 \text{ кН.}$$

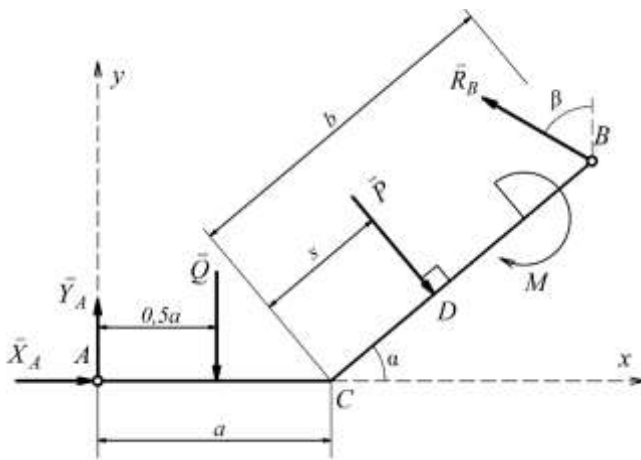
Із рівняння (1.4) визначимо X_A :

$$X_A = R_B \cdot \sin \beta - P \cdot \sin \alpha = 29,540 \cdot 0,866 - 25 \cdot 0,643 = 25,583 - 16,069 = 9,514 \text{ кН}$$

Визначимо Y_A із рівняння (1.5):

$$Y_A = Q + P \cdot \cos \alpha - R_B \cdot \cos \beta = 21 + 25 \cdot 0,766 - 29,540 \cdot \frac{1}{2} = 25,380 \text{ кН}$$

Виконуємо перевірку отриманих величин реакцій опор балки, складаючи перевірочне рівняння суми моментів сил системи відносно точки D :



$$\sum_{i=1}^n M_D(\bar{F}_i) = 0:$$

Рис. 1.3. Схема для перевірки розрахунку

$$\begin{aligned} X_A \cdot s \cdot \sin 40^\circ - Y_A \cdot (a + s \cdot \cos 40^\circ) + Q \cdot \left(\frac{a}{2} + s \cdot \cos 40^\circ \right) + R_B \cdot \sin 70^\circ \cdot (b - s) - M = \\ = 9,514 \cdot 2,5 \cdot 0,6428 - 25,380 \cdot (3 + 2,5 \cdot 0,7660) + 21 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2,5 \cdot 0,7660 \right) + \\ + 29,541 \cdot 0,9396 \cdot 1,9 - 15 = -0,00009272 \approx 0. \end{aligned}$$

Отже розрахунок величин реакцій опор виконано правильно.

Результати розрахунку зведемо в табл. 1.1:

Таблиця 1.1

Результати розрахунку величин реакцій опор, кН

X_A	Y_A	R_B
9,514	25,380	29,541

Розв'яжемо цю задачу, застосувавши систему комп'ютерного програмування *MathCAD*. Для цього введемо числові значення вихідних даних, задамо початок наближення невідомих реакцій і введемо ключове слово *Given*, що позначає початок блоку розв'язання. Нижче слова *Given* запишемо систему рівнянь рівноваги, а потім, використовуючи процедуру-функцію *Find*, знайдемо шукані величини опорних реакцій.

Введемо вихідні дані для розрахунку:

$$\begin{array}{llll} a := 3 & b := 4.4 & s := 2.5 & \alpha := \frac{2\pi}{9} \\ M := 15 & q := 7 & P := 25 & \beta := \frac{\pi}{3} \end{array}$$

Визначимо рівнодіючу рівномірно розподіленого навантаження, інтенсивністю q :

$$Q := q \cdot a \quad Q = 21$$

Задаємо початкове наближення для невідомих реакцій.

Оскільки отримана система рівнянь є системою лінійних алгебраїчних рівнянь, то початкове наближення невідомих величин можна задавати довільно.

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ R_B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задаємо початок блоку рішень систем рівнянь *Given* і сформуємо систему рівнянь рівноваги:

Given

$$\begin{array}{l} X_A - R_B \cdot \sin(\beta) + P \cdot \sin(\alpha) = 0 \\ Y_A + R_B \cdot \cos(\beta) - Q - P \cdot \cos(\alpha) = 0 \\ R_B \cdot (a \cdot \cos(\beta) + b \cdot \cos(\beta - \alpha)) - P \cdot (a \cdot \cos \alpha + s) - 0.5 \cdot Q \cdot a - M = 0. \end{array}$$

Обчислюємо шукані реакції опор за допомогою процедури *Find*:

$$\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ RB \end{pmatrix} := \text{Find} \left(\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ RB \end{pmatrix} \right) \quad \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ RB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.514 \\ 25.381 \\ 29.541 \end{pmatrix}$$

Виконаємо в Mathcad перевірку отриманих опорних реакцій, склавши рівняння суми моментів сил відносно т. *D*:

$$XA \cdot s \cdot \sin(\alpha) - YA \cdot (a + s \cdot \cos(\alpha)) + Q \cdot \left(\frac{a}{2} + s \cdot \cos(\alpha) \right) + RB \cdot 0.93969 \cdot (b - s) - M = -1.471 \times 10^{-4}$$

Таким чином в системі програмування потрібно зробити:

$$\begin{aligned} a &:= 3 & b &:= 4.4 & s &:= 2.5 & \alpha &:= \frac{2\pi}{9} \\ M &:= 15 & q &:= 7 & P &:= 25 & \beta &:= \frac{\pi}{3} \\ Q &:= q \cdot a & Q &= 21 & & & & \\ \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ RB \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Given

$$XA - RB \cdot \sin(\beta) + P \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$YA + RB \cdot \cos(\beta) - Q - P \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$RB \cdot (a \cdot \cos(\beta) + b \cdot \cos(\beta - \alpha)) - P \cdot (a \cdot \cos(\alpha) + s) - 0.5 \cdot a \cdot Q - M = 0$$

$$\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ RB \end{pmatrix} := \text{Find} \left(\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ RB \end{pmatrix} \right) \quad \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ RB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.514 \\ 25.381 \\ 29.541 \end{pmatrix}$$

$$XA \cdot s \cdot \sin(\alpha) - YA \cdot (a + s \cdot \cos(\alpha)) + Q \cdot \left(\frac{a}{2} + s \cdot \cos(\alpha) \right) + RB \cdot 0.93969 \cdot (b - s) - M = -1.471 \times 10^{-4}$$

2. Визначення реакцій опор складеної конструкції (системи двох тіл)

У розділі «СТАТИКА» поряд з рівновагою одного тіла розглядаються і рівновага системи тіл, тобто сукупності твердих тіл, що торкаються одне одного своїми поверхнями або з'єднані одне з другим шарнірами.

Важливим завданням статички системи твердих тіл є визначення реакцій опор (в'язей). Основним способом цього визначення є їх роз'єднування, коли розглядається рівновага окремих тіл системи. Задача, що розглядається в цьому розділі методичних вказівок, представляє задачу на визначення реакцій опор складеної з двох частин конструкції (системи тіл), з'єднаних шарніром C (рис. 2.1).

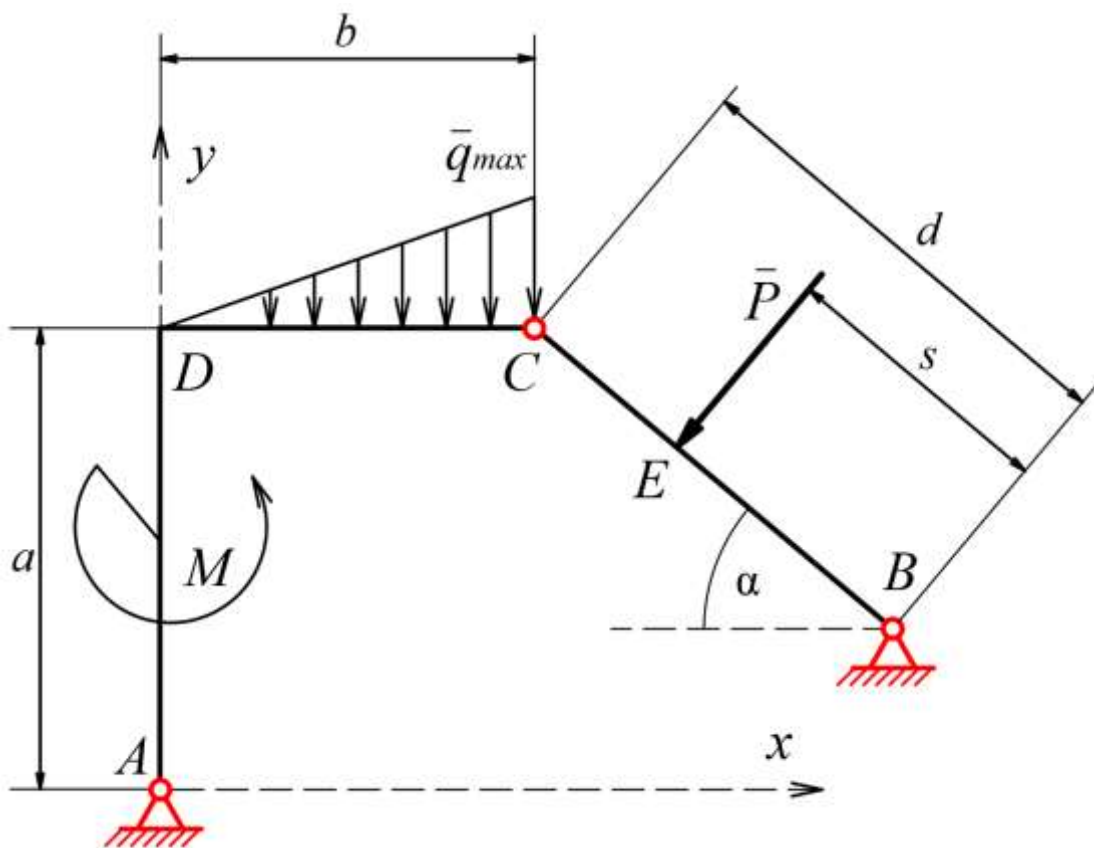


Рис. 2.1. Схема складеної конструкції

2.1. Порядок розв'язання задачі

Задачі на рівновагу довільної плоскої системи сил, що прикладена до складеної конструкції, рекомендується розв'язувати наступним чином:

1. Зобразити розрахункову схему згідно з вказаними розмірами та показати на ній активні сили, що діють на конструкцію.
2. Замінити в'язі відповідними реакціями.
3. Умовно розрізати конструкцію на дві частини по шарніру C і показати реакції відкинutoї частини.
4. Скласти рівняння рівноваги для кожної з частин, при цьому під час розгляду другої частини конструкції потрібно перенаправити реакції відкинutoї частини.
5. Розв'язати отриману систему рівнянь рівноваги.
6. Скласти перевірочне рівняння моментів сил для всієї конструкції.
7. Отриманий результат в перевірочному рівнянні є похибкою розрахунку. Вона у перевірочному рівнянні не повинна перевищувати $\pm 0,001$.

2.2. Умова і приклад виконання задачі

Складена конструкція складається із двох частин: жорсткого кутника ADC і стержня BC , з'єднаних між собою шарніром C . Конструкція знаходиться у рівновазі під дією пари сил з моментом M , зосередженої сили P і розподіленого навантаження, інтенсивністю q , що діє на ділянці DC кутника ADC по лінійному закону. Визначити величини реакцій опор складеної конструкції під час заданого активного навантаження.

Дано:

схема складеної конструкції (рис. 2.1);

навантаження: $P=25$ кН; $M=10$ кН·м; $q=6$ кН/м

геометричні розміри і кути: $a=3$ м; $b=2,2$ м; $s=1,8$ м; $d=3$ м; $\alpha=30^\circ$

Потрібно визначити реакції опор у точках A і B : $X_A - ?$, $Y_A - ?$, $X_B - ?$, $Y_B - ?$

Для визначення реакцій опор замінимо опори (в'язі) їхніми реакціями (рис. 2.2) і умовно розділимо конструкцію по шарніру C . Розглянемо окремо рівновагу кутника ADC і стержня BC .

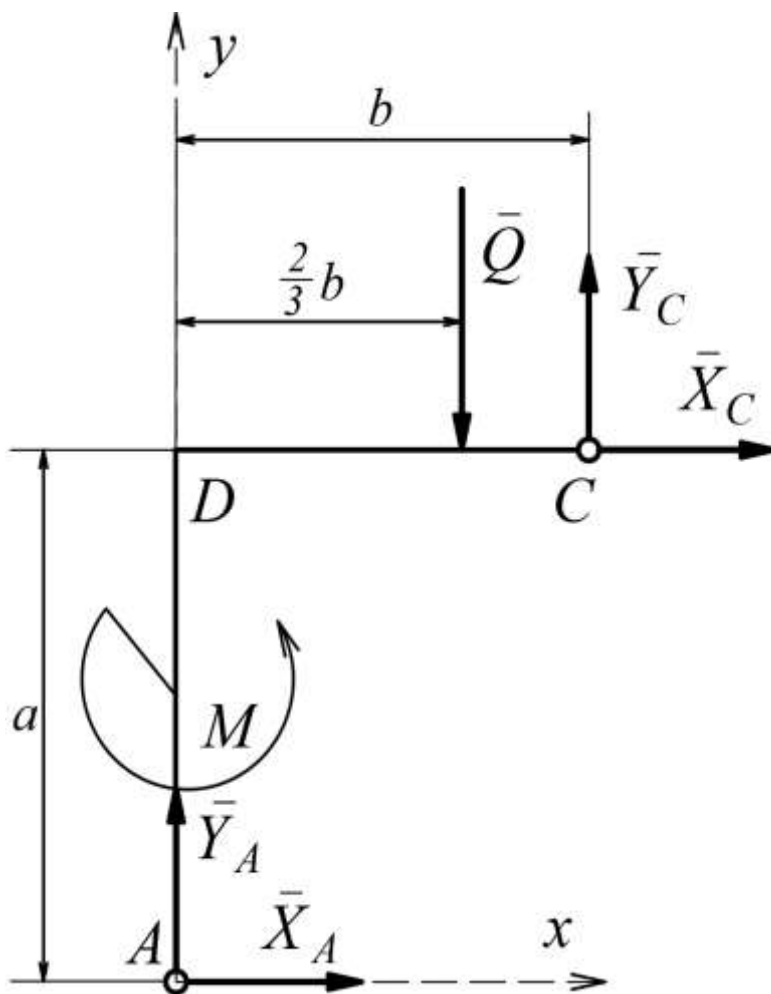


Рис. 2.2. Частина ADC конструкції, звільнена від в'язей

Замінимо в'язь в т. A реакціями X_A, Y_A , а дію відкинутої частини (стержень) BC замінено реакціями відкинутої частини X_C, Y_C . Розглянемо систему зрівноважуваних сил, прикладених до частини

ADC складеної конструкції, що складається із активної сили Q , моменту M , а також реакцій X_A, Y_A, X_C, Y_C . Запишемо рівняння рівноваги цієї системи сил, використавши першу (або головну) форму аналітичних умов рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: \quad X_A + X_C = 0 \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: \quad Y_A + Y_C - Q = 0 \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0: M + Y_C \cdot b - X_C \cdot a - Q \cdot \frac{2}{3}b = 0 \quad (2.3)$$

Трикутне розподілене навантаження з інтенсивністю q замінимо рівнодіючою Q :

$$Q = \frac{1}{2}q \cdot b = \frac{1}{2}6 \cdot 2,2 = 6,6 \text{ кН}$$

для частини BC (рис. 2.3): напрям векторів реакцій відкинутої частини \bar{X}_C і \bar{Y}_C змінимо на протилежний.

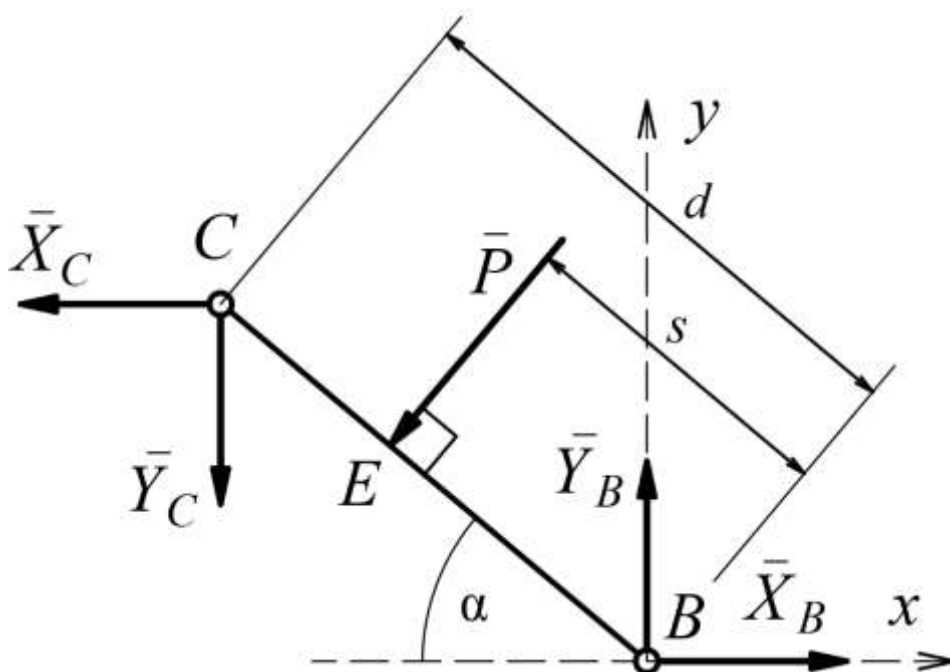


Рис. 2.3. Частина BC конструкції, звільнена від в'язей

До частини BC складеної конструкції прикладена система зрівноважуваних сил, яка складається із активної сили P , а також реакцій X_B, Y_B, X_C, Y_C . Запишемо рівняння рівноваги цієї системи сил,

знову використавши першу (або головну) форму аналітичних умов рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: \quad X_B - X_C - P \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: \quad Y_B - Y_C - P \cdot \sin 60^\circ = 0 \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0: \quad P \cdot s + X_C \cdot d \cdot \sin 30^\circ + Y_C \cdot d \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad (2.6)$$

Розв'яжемо систему із шести лінійних рівнянь. Підставляючи в записані рівняння відповідні числові значення сил, отримуємо із рівнянь (2.3) і (2.6) величини реакцій X_C, Y_C :

$$\begin{cases} M + Y_C \cdot b - X_C \cdot a - Q \cdot \frac{2}{3}b = 0 \\ P \cdot s + X_C \cdot d \cdot \sin 30^\circ + Y_C \cdot d \cdot \cos 30^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_C = \frac{2,2 \cdot Y_C + 0,32}{3} \\ Y_C = -12,212 \end{cases}$$

$$X_C = -8,849 \text{ кН}, \quad Y_C = -12,212 \text{ кН}.$$

$$\text{Із рівняння (2.1) знаходимо: } X_A = -X_C = 8,849 \text{ кН},$$

$$\text{а із рівняння (2.2): } Y_A = Q - Y_C = 18,812 \text{ кН}.$$

Далі, із рівняння (2.4) визначаємо реакцію X_B :

$$X_B = X_C + P \cdot \cos 60^\circ,$$

$$X_B = -8,848 + 25 \cdot 0,5 = 3,651 \text{ кН}.$$

Підставляємо в рівняння (2.5) величини сил і знайдену величину реакції Y_C знаходимо Y_B : $Y_B = Y_C + P \cdot \sin 60^\circ$

$$Y_B = -12,212 + 25 \cdot 0,866 = 9,439 \text{ кН}.$$

Далі складемо рівняння моментів сил системи відносно шарніру С для цільної конструкції (рис. 2.4) і виконаємо перевірку розрахунку.

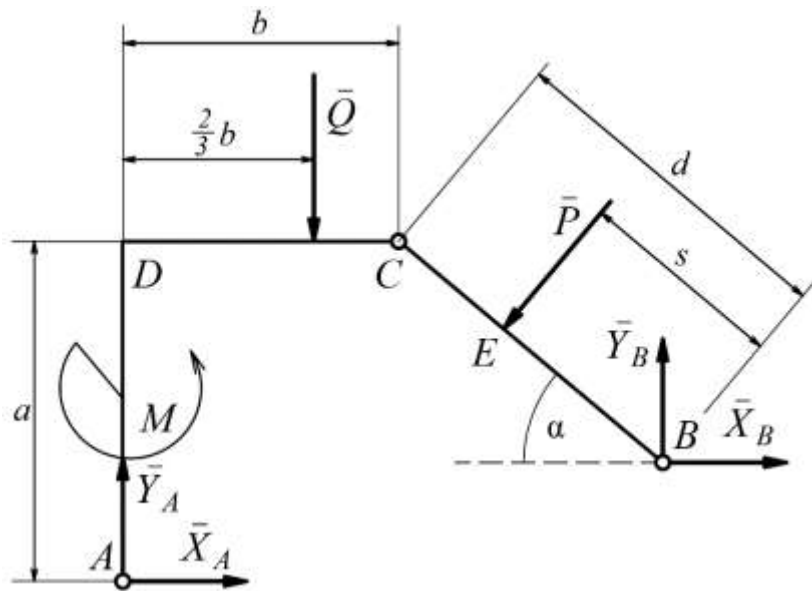


Рис. 2.4. Схема конструкції ACB для перевірки

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0:$$

$$\begin{aligned} M + X_A \cdot a - Y_A \cdot b + Q \cdot \left(\frac{1}{3}b\right) - P \cdot (d - s) + X_B \cdot d \cdot \sin 30^\circ + Y_B \cdot d \cdot \cos 30^\circ = \\ = 10 + 8,849 \cdot 3 - 18,812 \cdot 2,2 + 6,6 \cdot \frac{2,2}{3} - 25 \cdot 1,2 + 3,651 \cdot 3 \cdot 0,5 + 9,439 \cdot 3 \cdot 0,866 = \\ = 71,380 - 71,381 = -0,001. \end{aligned}$$

Отримана похибка розрахунку складає: $-0,001 \approx 0$.

Отже розрахунки величин реакцій опор виконані правильно.

Результати розрахунку наведені в табл. 2.1:

Таблиця 2.1

Результати розрахунку

Реакції опор, кН				Реакції відкинутої частини, кН	
X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C
8,849	18,812	3,651	9,439	$\pm 8,849$	$\pm 12,212$

Тепер розв'яжемо задачу на визначення реакцій опор складеної конструкції за допомогою системи комп'ютерного програмування *MathCAD*. Для цього введемо числові значення вихідних даних, задамо початкове наближення невідомих реакцій і використаємо блок символного розв'язання алгебраїчних рівнянь *Given – Find*.

Вихідні дані задачі для розрахунку:

$$\begin{array}{llll} a := 3 & b := 2.2 & s := 1.8 & d := 3 \\ M := 10 & q := 6 & P := 25 & \alpha := \frac{\pi}{6} \end{array}$$

Визначаємо рівнодіючу рівномірно розподіленого навантаження, інтенсивністю q :

$$Q := \frac{1}{2} q \cdot a \quad Q = 6,6.$$

Задаємо початкове наближення для невідомих реакцій.

Оскільки отримана система рівнянь є системою лінійних алгебраїчних рівнянь, то початкове наближення невідомих величин можна задавати довільно.

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_C \\ Y_C \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Далі задаємо початок блоку розв'язку систем рівнянь *Given* і запишемо систему із шести рівнянь рівноваги:

Given

$$X_A + X_C = 0$$

$$Y_A + Y_C - Q = 0$$

$$-X_C \cdot a + Y_C \cdot b + M - Q \cdot \frac{2b}{3} = 0$$

$$-X_C + X_B - P \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$Y_B - P \cdot \cos(\alpha) - Y_C = 0$$

$$Y_C \cdot d \cdot \cos(\alpha) + X_C \cdot d \cdot \sin(\alpha) + P \cdot s = 0.$$

Обчислюємо невідомі реакції опор за допомогою *Find*:

$$\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ XB \\ YB \\ XC \\ YC \end{pmatrix} := \text{Find} \left(\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ XB \\ YB \\ XC \\ YC \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ XB \\ YB \\ XC \\ YC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.849 \\ 18.812 \\ 3.651 \\ 9.439 \\ -8.849 \\ -12.212 \end{pmatrix}$$

Перевірочне рівняння суми моментів сил відносно т. С в Mathcad:

$$XA \cdot a - YA \cdot b + Q \cdot \left(\frac{b}{3}\right) + XB \cdot d \cdot \sin(\alpha) + YB \cdot d \cdot \cos(\alpha) - P(d - s) = -7.105 \times 10^{-15}$$

Таким чином в системі програмування потрібно виконати етапи:

$$a := 3 \quad b := 2.2 \quad d := 3 \quad s := 1.8 \quad \alpha := \frac{\pi}{6}$$

$$M := 10 \quad P := 25 \quad q := 6$$

$$Q := (q \cdot 0.5b) \quad Q = 6.6$$

$$\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ XB \\ YB \\ XC \\ YC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$XA + XC = 0$$

$$YA + YC - Q = 0$$

$$-XC \cdot a + YC \cdot b + M - Q \cdot \frac{2 \cdot b}{3} = 0$$

$$-XC + XB - P \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$YB - P \cdot \cos(\alpha) - YC = 0$$

$$YC \cdot d \cdot \cos(\alpha) + XC \cdot d \cdot \sin(\alpha) + P \cdot s = 0$$

$$\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ XB \\ YB \\ XC \\ YC \end{pmatrix} := \text{Find} \left(\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ XB \\ YB \\ XC \\ YC \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ XB \\ YB \\ XC \\ YC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.849 \\ 18.812 \\ 3.651 \\ 9.439 \\ -8.849 \\ -12.212 \end{pmatrix}$$

$$XA \cdot a - YA \cdot b + M + Q \cdot \frac{b}{3} + XB \cdot d \cdot \sin(\alpha) + YB \cdot d \cdot \cos(\alpha) - P \cdot (d - s) = -7.105 \times 10^{-15}$$

3. Визначення реакцій опор плоскої ферми і зусиль в її стержнях

3.1. Порядок розв'язання задач Спосіб вирізання вузлів

1. Викреслити схему ферми з прикладеними до неї навантаженнями.
2. Замінити дію в'язей відповідними реакціями.
3. Розрахувати опорні реакції ферми, розглядаючи рівновагу її як твердого тіла, яке знаходиться під дією плоскої довільної системи сил.
4. Показати вектори зусиль в кожному стержні ферми.
5. Визначити вузол ферми, який має не більше двох стержнів з невідомими зусиллями і з нього почати розрахунок.
6. Скласти рівняння рівноваги для кожного вузла, умовно по черзі вирізаючи вузли з ферми.
7. Розв'язуючи рівняння, визначити невідомі зусилля в стержнях ферми.
8. Виконати етапи програмування в системі *MathCAD*.

Спосіб перерізів (або метод Ріттера)

1. Визначити опорні реакції ферми.
2. Розрізати умовно ферму на дві частини так, щоб у перерізі кількість стержнів не перевищувала три, і замінити дію відкинутої частини її реакціями (зусиллями, які потрібно знайти).
3. Зобразити розрахункову схему частини ферми, що розглядається, на якій показати всі зовнішні сили, що діють на цю частину, а також опорні реакції і зусилля в перерізаних стержнях.
4. Використовуючи одну із трьох форм аналітичних умов рівноваги плоскої довільної системи сил, скласти рівняння рівноваги для частини ферми, що розглядається. При цьому рівняння суми моментів сил скласти відносно точки Ріттера.
5. Розв'язати систему рівнянь і знайти невідомі величини зусиль.

3.2. Умова і приклад виконання задачі

Визначити величини реакцій опор мостової ферми AB від заданого навантаження, а також зусилля в її стержнях способом вирізання вузлів. Додатково визначити зусилля в трьох стержнях ферми методом Ріттера: 8, 9, 10. Вагою стержнів знехтувати.

Дано:

схема конструкції ферми (рис. 1.9);

$P_1=25$ кН; $P_2=35$ кН; $P_3=55$ кН;

$a=1$ м; $b=\sqrt{3}$ м; $\alpha=60^\circ$; $\beta=60^\circ$; $\gamma=40^\circ$

Визначити реакції опор A та B і зусилля: $R_A - ?$, $X_B - ?$, $Y_B - ?$, $S_1 \div S_{13} - ?$

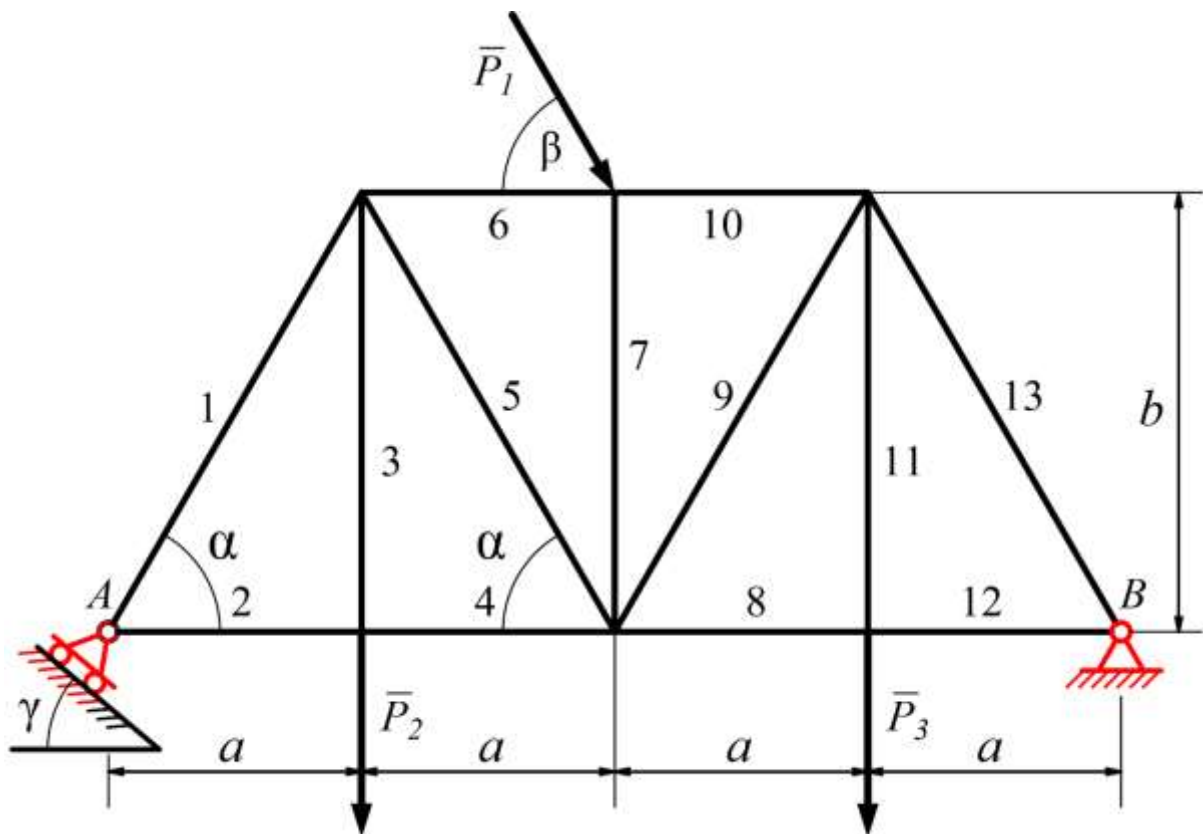


Рис. 3.1. Мостова ферма

Ферма містить 8 вузлів, з'єднаних 13 стержнями, і є статично визначеною, тобто виконується умова $m = 2n - 3$, де m – кількість стержнів, n – кількість вузлів.

Розглянемо рівновагу ферми (рис. 3.2). Проведемо систему координат xAy і зобразимо діючі на неї зовнішні сили: активні P_1, P_2, P_3 і реакції в'язей. Реакцію шарнірно-рухомої R_A опори направимо перпендикулярно опорній площині, а реакцію нерухомої шарнірної опори зобразимо двома складовими X_B і Y_B .

На першому етапі розрахунку знайдемо невідомі реакції опор: X_A, Y_A та R_B . Розглянемо довільну плоску систему сил $R_A, X_B, Y_B, P_1, P_2, P_3$, прикладених до ферми (рис. 3.2).

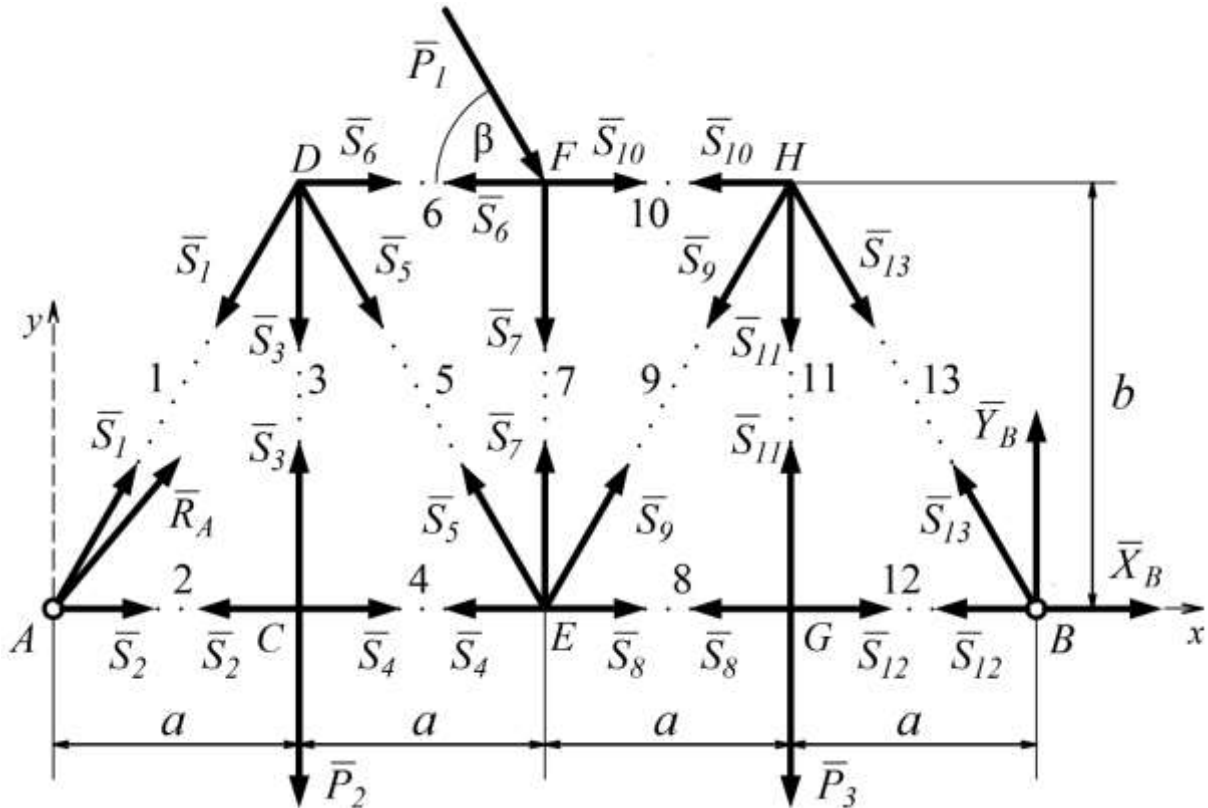


Рис. 3.2. Розрахункова схема ферми

Застосовуючи головну форму аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил, складаємо рівняння 3.1 – 3.3:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: R_A \cdot \sin \gamma + P_1 \cdot \cos \beta + X_B = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: Y_B + R_A \cdot \cos \gamma - P_1 \cdot \sin \beta - P_2 - P_3 = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}k) = 0: Y_B \cdot 4a - P_2 \cdot a - P_1 \cdot \sin \beta \cdot 2a - P_1 \cdot \cos \beta \cdot b - P_3 \cdot 3a = 0 \quad (3.3)$$

Із складених рівнянь рівноваги (3.1 – 3.3) знаходимо невідомі величини реакцій опор:

$$(3.3): Y_B = \frac{P_2 \cdot a + P_1 \cdot \sin \beta \cdot 2a + P_1 \cdot \cos \beta \cdot b + P_3 \cdot 3a}{4a} =$$

$$= \frac{35 + 25 \cdot 0,866 \cdot 2 + 25 \cdot 0,5 \cdot 1,732 + 55 \cdot 3}{4} = 66,238 \text{ кН};$$

$$(3.2): R_A = \frac{P_1 \cdot \sin \beta - Y_B + P_2 + P_3}{\cos \gamma} = \frac{25 \cdot 0,866 - 66,238 + 35 + 55}{0,76604} = 59,282 \text{ кН};$$

$$(3.1): X_B = -P_1 \cdot \cos \beta - R_A \cdot \sin \gamma = -25 \cdot 0,5 - 59,282 \cdot 0,642787 = -50,606 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку отриманих величин реакцій опор.

Для цього складемо рівняння суми моментів сил $R_A, X_B, Y_B, P_1, P_2, P_3$, відносно т. F :

$$\sum_{k=1}^n M_F(\bar{F}_k) = 0$$

$$-R_A \cdot \cos \gamma \cdot 2a + R_A \cdot \sin \gamma \cdot b + P_2 \cdot a - P_3 \cdot a + X_B \cdot b + Y_B \cdot 2a =$$

$$= -59,282 \cdot 0,76604 \cdot 2 + 59,282 \cdot 0,642787 \cdot 1,732 + 35 - 55 - 50,606 \cdot 1,732 +$$

$$+ 66,238 \cdot 2 = -90,825 + 65,999 + 35 - 55 - 87,649 + 132,476 =$$

$$= 233,475 - 233,474 = 0,001 \approx 0.$$

Результати розрахунку реакцій опор наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

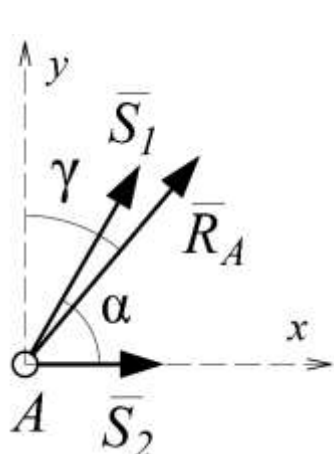
Результати розрахунку величин реакцій опор

Реакції опор, кН		
R_A	X_B	Y_B
59,282	-50,606	66,238

Згідно з умовою задачі для знаходження зусиль у стержнях ферми застосовуємо на другому етапі розрахунку **метод вирізання вузлів**. Стержні, що з'єднанні у вузлах, є для них в'язями. Відкинемо подумки в'язі і замінимо їх дію реакціями – зусиллями в стержнях, як показано на розрахунковій схемі. Робимо припущення, що стержні розтягнуті і відповідно (рис. 3.2) направляємо вектори невідомих зусиль вздовж стержнів до їх центра.

Розрахунок починаємо з вузла, в якому не більше двох невідомих зусиль. Почергово умовно вирізаємо вузли з ферми і для кожного вузла складаємо рівняння рівноваги плоскої збіжної системи сил. Розв'язуючи систему з двох рівнянь в кожному вузлі, знаходимо невідомі величини зусиль.

Спочатку умовно вирізаємо вузол A (рис. 3.3) і із складених рівнянь рівноваги плоскої збіжної системи сил (3.4, 3.5) знаходимо величини зусиль S_1 та S_2 :



$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: S_2 + S_1 \cdot \cos \alpha + R_A \cdot \sin \gamma = 0 \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: S_1 \cdot \sin \alpha + R_A \cdot \cos \gamma = 0 \quad (3.5)$$

$$S_1 = -\frac{R_A \cos \gamma}{\sin \alpha} = -52,438 \text{ кН};$$

$$S_2 = -S_1 \cdot \cos \alpha - R_A \cdot \sin \gamma = -11,887 \text{ кН}.$$

Рис. 3.3. Вузол A

Далі розглядаємо вузол ферми C (рис.3.4). Знаходимо із 3.6, 3.7 невідомі зусилля S_3 та S_4 :

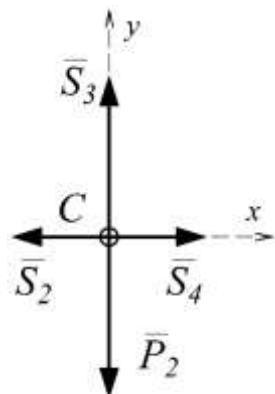


Рис. 3.4. Вузол C

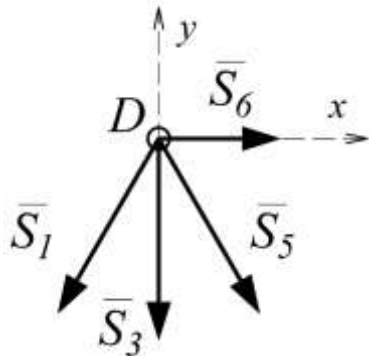
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: S_4 - S_2 = 0 \quad (3.6)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: S_3 - P_2 = 0 \quad (3.7)$$

$$S_4 = S_2 = -11,887 \text{ кН};$$

$$S_3 = P_2 = 35 \text{ кН}.$$

Розглядаємо вузол D (рис. 3.5) і знаходимо з рівнянь 3.8, 3.9 невідомі зусилля S_5 та S_6 :



$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: S_6 + S_5 \cdot \cos \alpha - S_1 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (3.8)$$

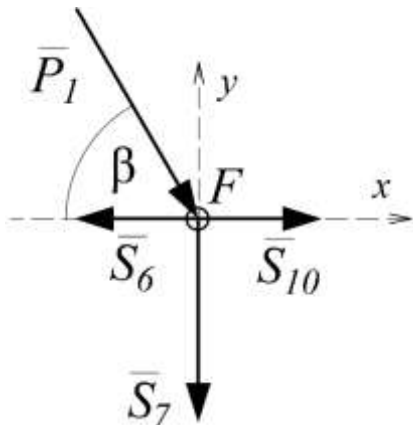
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: -S_3 - S_1 \cdot \sin \alpha - S_5 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (3.9)$$

$$S_5 = \frac{-S_3 - S_1 \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = 12,024 \text{ кН};$$

$$S_6 = S_1 \cdot \cos \alpha - S_5 \cdot \cos \alpha = -32,231 \text{ кН}.$$

Рис. 3.5. Вузол D

Розглядаємо вузол ферми F (рис.3.6). Знаходимо зусилля S_7 та S_{10} із рівнянь 3.10, 3.11:



$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: S_{10} + P_1 \cdot \cos \beta - S_6 = 0; \quad (3.10)$$

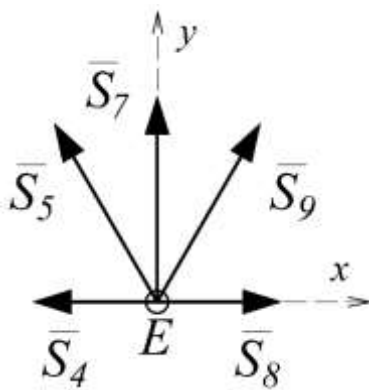
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0: -S_7 - P_1 \cdot \sin \beta = 0 \quad (3.11)$$

$$S_7 = -P_1 \cdot \sin \beta = -21,651 \text{ кН};$$

$$S_{10} = S_6 - P_1 \cdot \cos \beta = -44,731 \text{ кН}.$$

Рис. 3.6. Вузол F

Розглядаємо вузол ферми E (рис.3.7). Знаходимо зусилля S_8 та S_9 із рівнянь 3.12, 3.13:



$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: S_8 + S_9 \cdot \cos \alpha - S_4 - S_5 \cdot \cos \alpha = 0; \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0: S_7 + S_8 \cdot \sin \alpha + S_9 \cdot \sin \alpha - S_5 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (3.13)$$

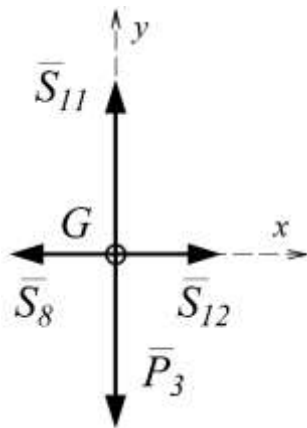
$$S_9 = \frac{-S_7 \cdot \sin \alpha - S_8 \cdot \sin \alpha + S_5 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-12,970 \text{ кН} + 15,970 \text{ кН} \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = 0$$

$$S_8 = \frac{S_4 - S_5 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{15,970 \text{ кН} - 15,970 \text{ кН} \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = -12,363 \text{ кН}.$$

$$S_5 = -S_7 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

Рис. 3.7. Вузол E

Розглядаємо вузол ферми G (рис. 3.8) і знайдемо невідомі зусилля S_{11} та S_{12} із рівнянь 3.14, 3.15:



$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: S_{12} - S_8 = 0 \quad (3.14)$$

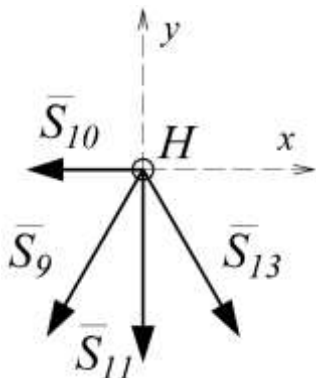
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: S_{11} - P_3 = 0 \quad (3.15)$$

$$S_{12} = S_8 = -12,363 \text{ кН};$$

$$S_{11} = P_3 = 55 \text{ кН}.$$

Рис. 3.8. Вузол G

Розглядаємо вузол ферми H (рис.3.9) і знайдемо невідоме зусилля S_{13} :



$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: S_{13} \cdot \cos \alpha - S_{10} - S_9 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (3.16)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: -S_9 \cdot \sin \alpha - S_{11} - S_{13} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (3.17)$$

$$S_{13} = \frac{S_{10} + S_9 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = -76,485 \text{ кН}.$$

Рис. 3.9. Вузол H

Результати розрахунку запишемо в загальну табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Результати розрахунку реакцій опор і зусиль в стержнях ферми

Реакції опор, кН			Зусилля в стержнях ферми, кН												
R_A	X_B	Y_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}
59,282	-50,606	66,238	-52,438	-11,887	35	-11,887	12,024	-32,231	-21,651	-12,363	12,976	-44,731	55	-12,363	-76,485

Стержні розтягуються: 3; 5; 9; 11.

Стержні стискаються: 1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 12; 13.

Стержні не деформуються: відсутні.

Розв'язання методом Ріттера:

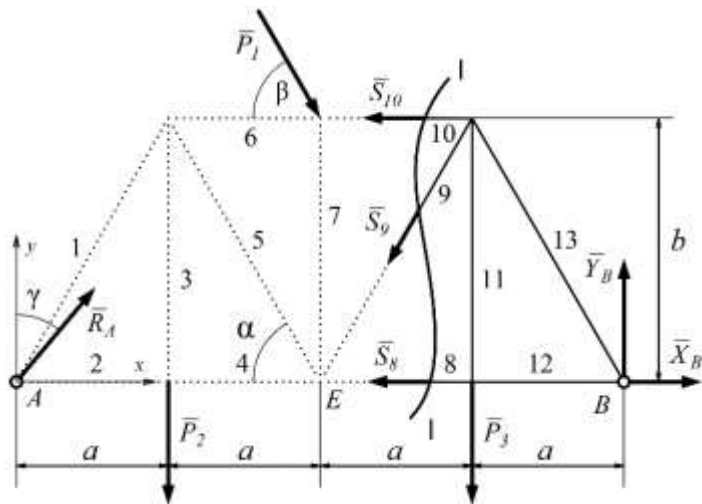


Рис. 3.10. Схема ферми для розрахунку методом Ріттера

Використавши отримані на першому етапі розрахунку величини реакцій опор R_A та X_B, Y_B , знайдемо невідомі зусилля в стержнях: 8, 9, 10. Покажемо переріз $I-I$ по цим стержням і ліву від перерізу частину ферми умовно відкинемо. Дію ліві частини ферми на праву замінимо силами $\bar{S}_8, \bar{S}_9, \bar{S}_{10}$ (рис. 3.10), направивши вектори вздовж відповідних стержнів.

Розглянемо рівновагу правої частини ферми, враховуючи активну силу P_3 і реакції опори $B: X_B; Y_B$. Сили $P, X_B; Y_B, S_8, S_9, S_{10}$ складають довільну плоску систему сил. Використовуючи першу форму аналітичних умов рівноваги для цієї системи сил, складемо рівняння рівноваги. При цьому рівняння суми моментів сил складемо відносно т. E – точки Ріттера.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -S_8 - S_9 \cdot \cos \alpha - S_{10} + X_B = 0; \quad (3.18)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_B - S_9 \cdot \sin \alpha - P_3 = 0; \quad (3.19)$$

$$\sum_{k=1}^n M_E(\bar{F}_k) = 0; \quad S_{10} \cdot b + Y_B \cdot 2a - P_3 \cdot a = 0; \quad (3.20)$$

Розв'язуючи рівняння 3.18 – 3.20 знаходимо величини шуканих зусиль.

Із рівняння (3.20): $S_{10} = -44,731$ кН.

Із рівняння (3.19): $S_9 = 12,976$ кН, а із (3.18): $S_8 = -12,363$ кН.

Здійснимо розв'язок цієї задачі за допомогою пакету *MathCAD*. Вихідні дані задачі для розрахунку:

ORIGIN := 1

$$\begin{array}{lllll}
 a := 1 & b := \sqrt{3} & P_1 := 25 & P_2 := 35 & P_3 := 55 \\
 M := 10 & q := 6 & \alpha := a \tan\left(\frac{b}{a}\right) & \beta := \frac{\pi}{3} & \gamma := \frac{2\pi}{9}
 \end{array}$$

Початкове наближення невідомих:

$$D := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\
 (S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \ S_8 \ S_9 \ S_{10} \ S_{11} \ S_{12} \ S_{13} \ R_A \ X_B \ Y_B) := D$$

Використаємо блок *Given – Find*

Given

$$\begin{array}{ll}
 S_2 + S_1 \cdot \cos(\alpha) + R_A \cdot \sin(\gamma) = 0 & S_1 \cdot \sin(\alpha) + R_A \cdot \cos(\gamma) = 0 \\
 -S_2 + S_4 = 0 & S_3 - P_2 = 0 \\
 -S_1 \cdot \cos(\alpha) + S_5 \cdot \cos(\alpha) + S_6 = 0 & -S_1 \cdot \sin(\alpha) - S_3 - S_5 \cdot \sin(\alpha) = 0 \\
 -S_4 - S_5 \cdot \cos(\alpha) + S_9 \cdot \cos(\alpha) + S_8 = 0 & S_7 + S_5 \cdot \sin(\alpha) + S_9 \cdot \sin(\alpha) = 0 \\
 P_1 \cdot \cos(\beta) - S_6 + S_{10} = 0 & -P_1 \cdot \sin(\beta) - S_7 = 0 \\
 -S_8 + S_{12} = 0 & S_{11} - P_3 = 0 \\
 -S_9 \cdot \cos(\alpha) + S_{13} \cdot \cos(\alpha) - S_{10} = 0 & -S_9 \cdot \sin(\alpha) - S_{11} - S_{13} \cdot \sin(\alpha) = 0 \\
 X_B - S_{12} - S_{13} \cdot \cos(\alpha) = 0 & S_{13} \cdot \sin(\alpha) + Y_B = 0
 \end{array}$$

Результати розрахунку:

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ R_A \\ X_B \\ Y_B \end{array} \right) \\
 \quad := \text{Find} \\
 \left(\left(\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ R_A \\ X_B \\ Y_B \end{array} \right) \right) \\
 \quad = \\
 \left(\left(\begin{array}{l} -52.438 \\ -11.887 \\ 35 \\ -11.887 \\ 12.024 \\ -32.231 \\ -21.651 \\ -12.363 \\ 12.976 \\ -44.731 \\ 55 \\ -12.363 \\ -76.485 \\ 59.282 \\ -50.606 \\ 66.238 \end{array} \right) \right)
 \end{array}$$

Етапи виконання і результати у програмному середовищі Mathcad:

```

ORIGIN := 1
a := 1          b := sqrt(3)      P1 := 25    P2 := 35    P3 := 55
alpha := atan(b/a)  beta := pi/3      gamma := 2pi/9
D := (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(S1 S2 S3 S4 S5 S6 S7 S8 S9 S10 S11 S12 S13 RA XB YB) := D
    
```

Given

$$\begin{aligned}
 S2 + S1 \cos(\alpha) + RA \cdot \sin(\gamma) &= 0 & S1 \sin(\alpha) + RA \cos(\gamma) &= 0 \\
 -S2 + S4 &= 0 & S3 - P2 &= 0 \\
 -S1 \cos(\alpha) + S5 \cos(\alpha) + S6 &= 0 & -S1 \sin(\alpha) - S3 - S5 \sin(\alpha) &= 0 \\
 -S4 - S5 \cos(\alpha) + S9 \cos(\alpha) + S8 &= 0 & S7 + S5 \sin(\alpha) + S9 \sin(\alpha) &= 0 \\
 P1 \cos(\beta) - S6 + S10 &= 0 & -P1 \sin(\beta) - S7 &= 0 \\
 -S8 + S12 &= 0 & S11 - P3 &= 0 \\
 -S9 \cos(\alpha) + S13 \cos(\alpha) - S10 &= 0 & -S9 \sin(\alpha) - S11 - S13 \sin(\alpha) &= 0 \\
 XB - S12 - S13 \cos(\alpha) &= 0 & S13 \sin(\alpha) + YB &= 0
 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \\ S4 \\ S5 \\ S6 \\ S7 \\ S8 \\ S9 \\ S10 \\ S11 \\ S12 \\ S13 \\ RA \\ XB \\ YB \end{pmatrix}$	$\stackrel{:=}{=} \text{Find}$	$\begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \\ S4 \\ S5 \\ S6 \\ S7 \\ S8 \\ S9 \\ S10 \\ S11 \\ S12 \\ S13 \\ RA \\ XB \\ YB \end{pmatrix}$	$=$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 20px;"></th> <th style="width: 20px;">1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>-52.438</td></tr> <tr><td>2</td><td>-11.887</td></tr> <tr><td>3</td><td>35</td></tr> <tr><td>4</td><td>-11.887</td></tr> <tr><td>5</td><td>12.024</td></tr> <tr><td>6</td><td>-32.231</td></tr> <tr><td>7</td><td>-21.651</td></tr> <tr><td>8</td><td>-12.363</td></tr> <tr><td>9</td><td>12.976</td></tr> <tr><td>10</td><td>-44.731</td></tr> <tr><td>11</td><td>55</td></tr> <tr><td>12</td><td>-12.363</td></tr> <tr><td>13</td><td>-76.485</td></tr> <tr><td>14</td><td>59.282</td></tr> <tr><td>15</td><td>-50.606</td></tr> <tr><td>16</td><td>66.238</td></tr> </tbody> </table>		1	1	-52.438	2	-11.887	3	35	4	-11.887	5	12.024	6	-32.231	7	-21.651	8	-12.363	9	12.976	10	-44.731	11	55	12	-12.363	13	-76.485	14	59.282	15	-50.606	16	66.238
	1																																					
1	-52.438																																					
2	-11.887																																					
3	35																																					
4	-11.887																																					
5	12.024																																					
6	-32.231																																					
7	-21.651																																					
8	-12.363																																					
9	12.976																																					
10	-44.731																																					
11	55																																					
12	-12.363																																					
13	-76.485																																					
14	59.282																																					
15	-50.606																																					
16	66.238																																					

4. Довільна просторова система сил. Визначення реакцій в'язей твердого тіла

4.1. Короткі відомості з теорії

Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил виражаються наступними рівняннями (4.1):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; & \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0; & \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} &= 0; & \sum_{i=1}^n M_{iy} &= 0; & \sum_{i=1}^n M_{iz} &= 0; \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми моментів відносно цих осей дорівнювали нулю.

Момент сили відносно осі визначається як алгебраїчна величина, абсолютне значення якої дорівнює взятому з відповідним знаком добутку модуля проєкції сили на площину \overline{F}_π , що перпендикулярна до осі, на відстань від точки перетину осі з площиною, до лінії дії проєкції сили на плече h (4.2):

$$M_z(\overline{F}) = \pm \overline{F}_\pi \cdot h \quad (4.2)$$

4.2. Порядок розв'язання задач

1. Викреслити розрахункову схему просторової конструкції і показати на ній активні сили і реакції в'язей.
2. Скласти систему рівнянь рівноваги проєкцій сил на координатні вісі і моментів сил відносно цих осей.
3. Виконати розрахунки, розв'язавши систему рівнянь та визначивши невідомі величини.
4. Зробити перевірку, склавши рівняння моментів сил відносно новообраної системи координат.
5. Виконати розрахунки і зробити перевірку в системі *MathCAD*.

4.3. Умова і приклад виконання задачі

Просторова конструкція складається з двох тонких прямокутних плит $ABCD$ і $CDKL$ (рис. 4.1), які жорстко з'єднані під прямим кутом одна до одної. Плити знаходяться в рівновазі і закріплені сферичним шарніром у точці A , циліндричним шарніром (петлею) в т. B та невагомим стержнем в т. C . На конструкцію діють пара сил з моментом M_1 , активні сили T_1, T_2, T_3 , сили тяжіння горизонтальної плити – G_1 і вертикальної – G_2 . Потрібно визначити реакції в'язей в точках A, B і зусилля в стержні CC' .

Дано:

схема конструкції (рис. 4.1); $a = 3\text{ м}$; $b = 3\sqrt{3}\text{ м}$; $s = 1\text{ м}$; $d = 1,5\text{ м}$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6}; \alpha_2 = \frac{\pi}{3}; \beta = \frac{\pi}{3}; \varphi = \frac{\pi}{6}; \gamma = \frac{\pi}{4}$$

$M_1 = 5\text{ кНм}$; $G_1 = 20\text{ кН}$; $G_2 = 30\text{ кН}$; $T_1 = 10\text{ кН}$; $T_2 = 5\text{ кН}$; $T_3 = 15\text{ кН}$.

Визначити реакції в'язей: $X_A - ?$; $Y_A - ?$; $Z_A - ?$; $Y_B - ?$; $Z_B - ?$; $S - ?$

Приклад виконання

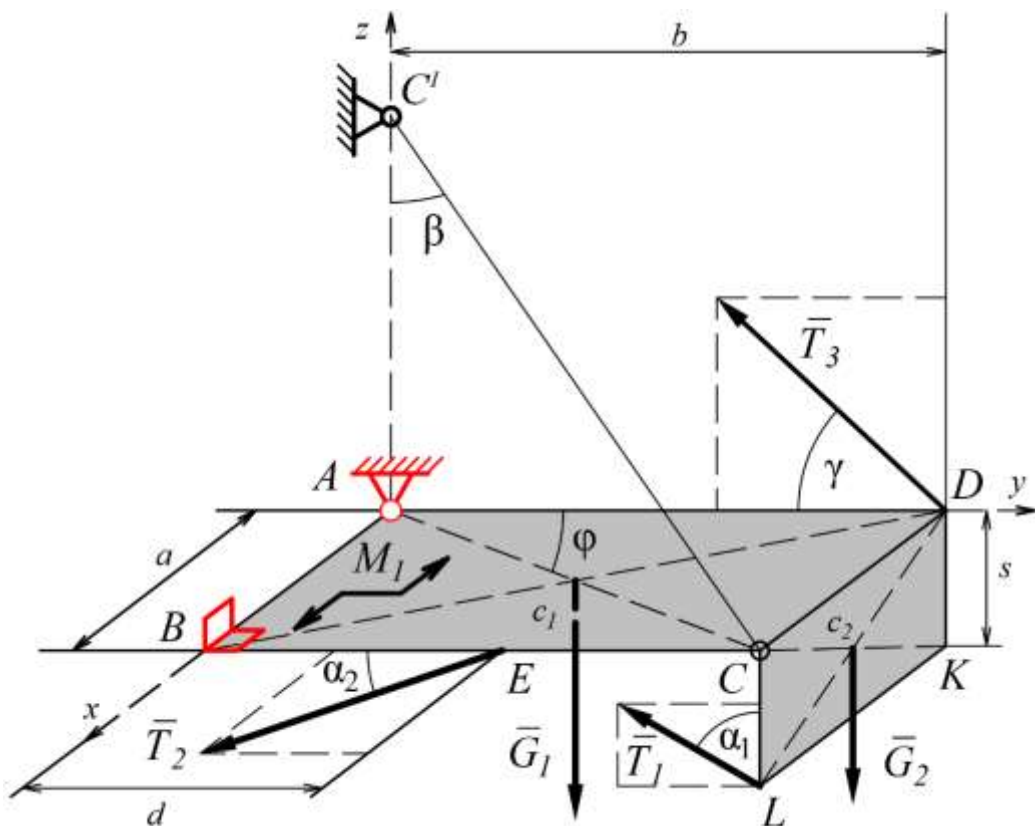


Рис. 4.1. Просторова конструкція

Розв'язання.

Скориставшись принципом звільнення від в'язей, замінимо опори в точках A і B та стержень CC' їхніми реакціями і направимо вектори $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{Y}_B, \bar{Z}_B, \bar{S}$, як показано на рис. 4.2. При цьому зробимо припущення, що стержень CC' розтягнутий. Далі розглянемо довільну просторову систему сил, яка діє на конструкцію. Покажемо систему координат xAy і відповідні кути $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \varphi, \gamma$.

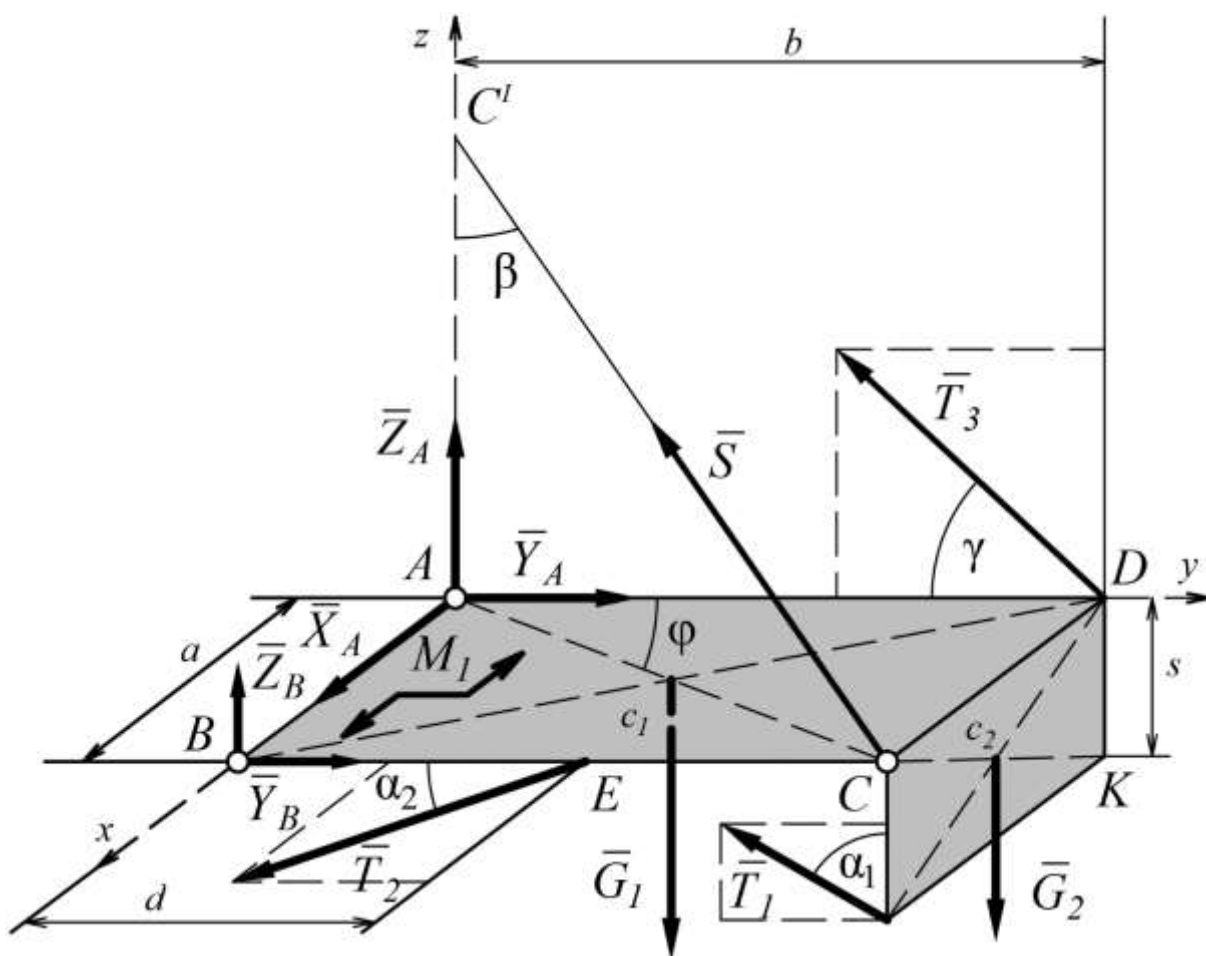


Рис. 4.2. Розрахункова схема просторової конструкції

Правильні напрямки реакцій визначимо по знаку величини реакції, отриманій у відповіді, наприкінці розрахунку: знак плюс означає, що обраний напрямок правильний, знак мінус – реакція має протилежний напрямок.

Далі у системі координат xAy_z записуємо шість рівнянь (4.3–4.8) аналітичних умов рівноваги довільної просторової системи сил $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B, \vec{S}$.

Рівняння проєкцій сил на осі системи координат xAy_z :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + T_2 \cdot \sin(\alpha_2) - S \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\varphi) = 0; \quad (4.3)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - T_2 \cdot \cos(\alpha_2) - T_1 \cdot \sin(\alpha_1) - T_3 \cdot \cos(\gamma) - S \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\varphi) = 0; \quad (4.4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad T_1 \cdot \cos(\alpha_1) - G_1 - G_2 + Z_A + Z_B + S \cdot \cos(\beta) + T_3 \cdot \sin(\gamma) = 0; \quad (4.5)$$

Рівняння моментів сил відносно координатних осей Ax, Ay, Az :

$$\sum_{k=1}^n M_{kx} = 0; \quad T_1 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot b - T_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot s + T_3 \cdot \sin(\gamma) \cdot b - G_1 \cdot \frac{1}{2}b - G_2 \cdot b + S \cdot \cos(\beta) \cdot b = 0; \quad (4.6)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{ky} = 0; \quad G_1 \cdot \frac{a}{2} + G_2 \cdot \frac{a}{2} - Z_B \cdot a - T_1 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot a - S \cdot \cos(\beta) \cdot a = 0; \quad (4.7)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{kz} = 0; \quad M_1 + Y_B - T_2 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot d - T_2 \cdot \cos(\alpha_2) \cdot a - T_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot a + S \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\varphi) \cdot b - S \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\varphi) \cdot a = 0 \quad (4.8)$$

Визначимо невідомі величини реакції з системи рівнянь (4.3 – 4.8):

Із рівняння (4.6):

$$S = \frac{T_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot b - T_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot s + T_3 \cdot \sin \gamma \cdot b - G_1 \cdot \frac{1}{2}b - G_2 \cdot b}{\cos \beta \cdot b} = 43,391 \text{ кН};$$

Із рівняння (4.3): $X_A = S \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\varphi) - T_2 \cdot \sin(\alpha_2) = 14,459 \text{ кН};$

Із рівняння (4.7) поділивши на a :

$$Z_B = G_1 \cdot \frac{1}{2} + G_2 \cdot \frac{1}{2} - T_1 \cdot \cos(\alpha_1) - S \cdot \cos(\beta) = -5,356 \text{ кН};$$

Із рівняння (4.8) поділивши на a :

$$Y_B = T_2 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot d + T_2 \cdot \cos(\alpha_2) + T_1 \cdot \sin(\alpha_1) - M_1 - \\ - S \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{b}{a} + S \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\varphi) = 7,998 \text{ кН};$$

Із рівняння (4.4):

$$Y_A = T_2 \cdot \cos(\alpha_2) + T_1 \cdot \sin(\alpha_1) + T_3 \cdot \cos(\gamma) + S \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\varphi) - Y_B = \\ = 42,651 \text{ кН};$$

Із рівняння (4.5):

$$Z_A = G_1 + G_2 - T_1 \cdot \cos(\alpha_1) - Z_B - S \cdot \cos(\beta) - T_3 \cdot \sin(\gamma) = 14,393 \text{ кН}.$$

Отримані результати розрахунку запишемо в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Результати розрахунку

Величини розрахованих зусиль, кН					
X_A	Y_A	Z_A	Y_B	Z_B	S
14,459	42,651	14,393	7,998	-5,356	43,391

Таким чином стержень CC' розтягується.

Для перевірки правильності розв'язку складемо рівняння моментів сил (4.9 – 4.11) відносно новообраної системи координат $x_1 O y_1 z_1$ рис. 4.3. Систему координат $x_1 O y_1 z_1$ оберемо таким чином, щоб її початок знаходився по середині відрізка CD .

$$\sum_{k=1}^n M_{kx_1} = 0; \quad G_1 \cdot \frac{b}{2} - Z_A \cdot b - Z_B \cdot b - T_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot s = 0; \quad (4.9)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{ky_1} = 0; \quad Z_A \cdot \frac{1}{2} a - Z_B \cdot \frac{1}{2} a - S \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{1}{2} a + \\ + T_3 \cdot \sin(\gamma) \cdot \frac{1}{2} a - T_1 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot \frac{1}{2} a = 0; \quad (4.10)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{kz_1} = 0; \quad M_1 + T_2 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot (b-d) - T_2 \cdot \cos(\alpha_2) \cdot 0,5a -$$

$$-Y_A \cdot 0,5a + Y_B \cdot 0,5a + X_A \cdot b - T_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot 0,5a + \quad (4.11)$$

$$+T_3 \cdot \cos(\gamma) \cdot 0,5a - S \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\varphi) \cdot 0,5a = 0;$$

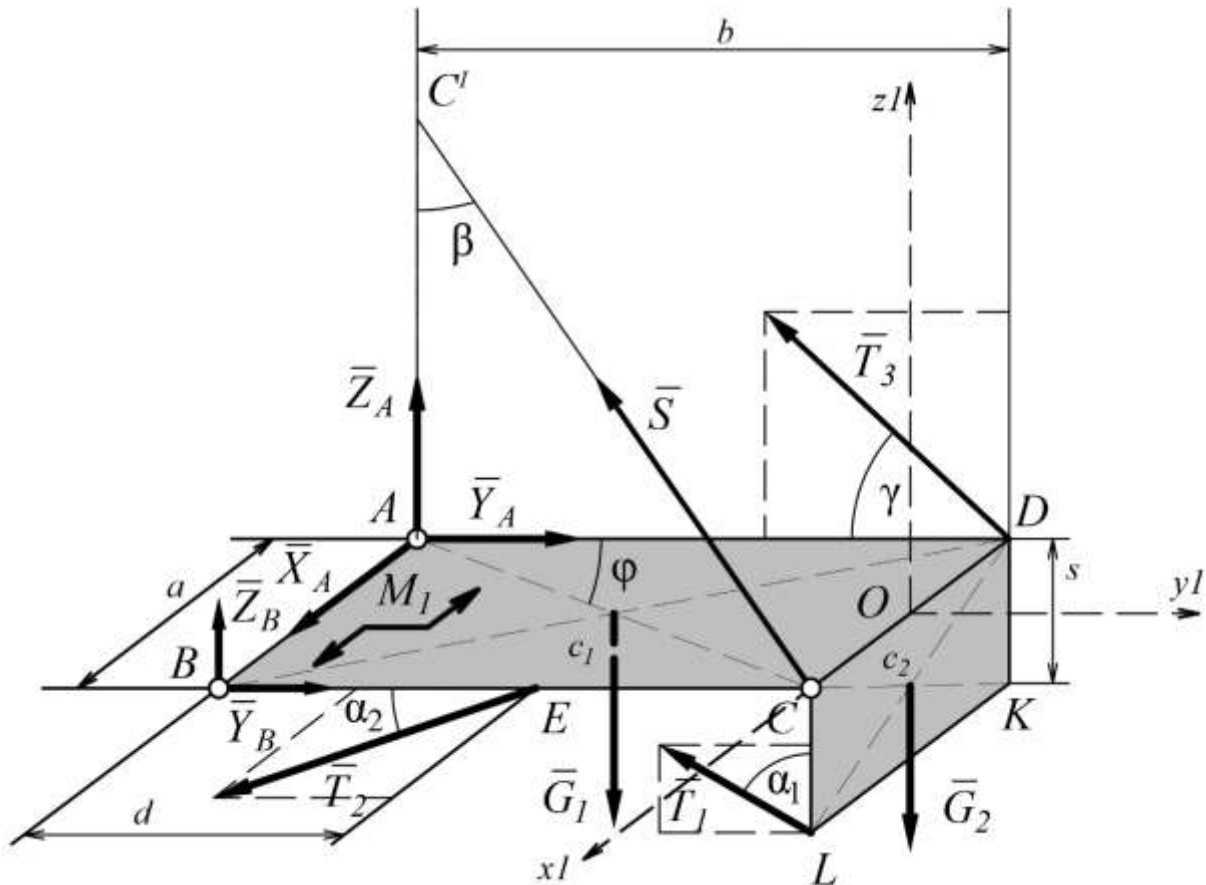


Рис. 4.3. Схема конструкції для перевірки розрахунку

Підставимо в складені рівняння моментів сил (4.9 – 4.11) розраховані величини зусиль.

Рівняння 4.9:

$$20 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} - 14,393 \cdot 3\sqrt{3} + 5,356 \cdot 3\sqrt{3} - 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

$$= 51,960 - 74,788 + 27,830 - 5 = 0,002 \approx 0;$$

Рівняння 4.10:

$$14,393 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 5,356 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - 43,391 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 =$$

$$= 14,393 + 5,356 - 21,696 + 10,605 - 8,660 = 0,002 \approx 0;$$

Рівняння 4.11:

$$\begin{aligned} & 5 + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (3\sqrt{3} - 1,5) - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - 42,651 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \\ & + 7,998 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 14,459 \cdot 3\sqrt{3} - 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \\ & + 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - 43,391 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \\ & = 5 + 16,005 - 3,75 - 63,977 + 11,997 + 75,131 - 7,500 + \\ & + 15,910 - 48,815 = 0,001 \approx 0 \end{aligned}$$

Виконана перевірка підтверджує, що розрахунок виконано правильно.

Розв'яжемо цю задачу у системі *MathCAD*.

Задамо вихідні дані задачі для розрахунку:

ORIGIN := 1

a := 1 b := 3√3 s := 1 d := 1.5

$\alpha_1 := \frac{\pi}{6}$ $\alpha_2 := \frac{\pi}{3}$ $\beta := \frac{\pi}{3}$ $\gamma := \frac{\pi}{4}$ $\varphi := \frac{\pi}{6}$

G1 := 20 G1 := 30 T1 := 10 T2 := 5 T3 := 15 M1 := 5

Виконаємо початкове наближення невідомих:

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_B \\ Y_B \\ S \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Використаємо блок символічного розв'язання алгебраїчних рівнянь *Given – Find*

Given

$$X_A + T_2 \cdot \sin(\alpha_2) - S \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\varphi) = 0$$

$$Y_A + Y_B - T_2 \cdot \cos(\alpha_2) - T_1 \cdot \sin(\alpha_1) - T_3 \cdot \cos(\gamma) - S \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\varphi) = 0$$

$$T_1 \cdot \cos(\alpha_1) - G_1 - G_2 + Z_A + Z_B + S \cdot \cos(\beta) + T_3 \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$T_1 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot b - T_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot s + T_3 \cdot \sin(\gamma) \cdot b - G_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot b - G_2 \cdot b + S \cdot \cos(\beta) \cdot b = 0$$

$$G_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot a + G_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot a - Z_B \cdot a - T_1 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot a - S \cdot \cos(\beta) \cdot a = 0$$

$$M_1 + Y_B \cdot a - T_2 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot d - T_2 \cdot \cos(\alpha_2) \cdot a - T_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot a + S \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\varphi) \cdot b - S \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\varphi) \cdot a = 0$$

Результати розрахунку:

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_B \\ Y_B \\ S \end{pmatrix} := \text{Find} \left(\begin{pmatrix} 14.459 \\ 42.651 \\ 14.393 \\ 7.998 \\ -5.356 \\ 43.391 \end{pmatrix} \right)$$

Перевірка:

$$G_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot b - Z_A \cdot b - T_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot s = 1.51 \times 10^{-14}$$

$$Z_A \cdot \frac{1}{2} \cdot a - Z_B \cdot \frac{1}{2} \cdot a - S \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{1}{2} \cdot a + T_3 \cdot \sin(\gamma) \cdot \frac{1}{2} \cdot a -$$

$$-T_1 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot \frac{1}{2} \cdot a = -3.553 \times 10^{-15}$$

$$M_1 + T_2 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot (b - d) - T_2 \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \frac{1}{2} \cdot a - Y_A \cdot \frac{1}{2} \cdot a + Y_B \cdot \frac{1}{2} \cdot a + X_A \cdot b -$$

$$-T_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \frac{1}{2} \cdot a + T_3 \cdot \cos(\gamma) \cdot \frac{1}{2} \cdot a - S \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{2} \cdot a = -4.263 \times 10^{-14}$$

Комп'ютерне програмування задачі у системі Mathcad

ORIGIN := 1

$$a := 3 \quad b := 3\sqrt{3} \quad s := 1 \quad d := 1.5$$

$$\alpha_1 := \frac{\pi}{6} \quad \alpha_2 := \frac{\pi}{3} \quad \beta := \frac{\pi}{3} \quad \gamma := \frac{\pi}{4} \quad \varphi := \frac{\pi}{6}$$

$$G_1 := 20 \quad G_2 := 30 \quad T_1 := 10 \quad T_2 := 5 \quad T_3 := 15 \quad M_1 := 5$$

$$\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \\ YB \\ ZB \\ S \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$XA + T_2 \cdot \sin(\alpha_2) - S \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\varphi) = 0$$

$$YA + YB - T_2 \cos(\alpha_2) - T_1 \sin(\alpha_1) - T_3 \cos(\gamma) - S \sin(\beta) \cos(\varphi) = 0$$

$$T_1 \cos(\alpha_1) - G_1 - G_2 + ZA + ZB + S \cos(\beta) + T_3 \sin(\gamma) = 0$$

$$T_1 \cos(\alpha_1) \cdot b - T_1 \sin(\alpha_1) \cdot s + T_3 \sin(\gamma) \cdot b - G_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot b - G_2 \cdot b + S \cos(\beta) \cdot b = 0$$

$$G_1 \cdot 0.5 \cdot a + G_2 \cdot 0.5 \cdot a - ZB \cdot a - T_1 \cos(\alpha_1) \cdot a - S \cos(\beta) \cdot a = 0$$

$$M_1 + YB \cdot a - T_2 \sin(\alpha_2) \cdot d - T_2 \cos(\alpha_2) \cdot a - T_1 \sin(\alpha_1) \cdot a + S \sin(\beta) \sin(\varphi) \cdot b - S \sin(\beta) \cos(\varphi) \cdot a = 0$$

$$\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \\ YB \\ ZB \\ S \end{pmatrix} := \text{Find} \left(\begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \\ YB \\ ZB \\ S \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \\ YB \\ ZB \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.459 \\ 42.651 \\ 14.393 \\ 7.998 \\ -5.356 \\ 43.391 \end{pmatrix}$$

ПЕРЕВІРКА

$$G_1 \cdot 0.5 \cdot b - ZA \cdot b - ZB \cdot b - T_1 \sin(\alpha_1) \cdot s = 1.51 \times 10^{-14}$$

$$ZA \cdot 0.5 \cdot a - ZB \cdot 0.5 \cdot a - S \cos(\beta) \cdot 0.5 \cdot a + T_3 \sin(\gamma) \cdot 0.5 \cdot a - T_1 \cos(\alpha_1) \cdot 0.5 \cdot a = -3.553 \times 10^{-15}$$

$$M_1 + T_2 \sin(\alpha_2) \cdot (b - d) - T_2 \cos(\alpha_2) \cdot 0.5 \cdot a - YA \cdot 0.5 \cdot a + YB \cdot 0.5 \cdot a + XA \cdot b - T_1 \sin(\alpha_1) \cdot 0.5 \cdot a + T_3 \cos(\gamma) \cdot 0.5 \cdot a - S \sin(\beta) \cos(\varphi) \cdot 0.5 \cdot a = -4.263 \times 10^{-14}$$

Список літератури

1. *Булгаков В.М.* Теоретична механіка : навчальний посібник. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт / за ред. С.І. Кучеренка. – Ніжин : вид-во «Міланік», 2009. – 639 с.
2. *Дзись В.Г.* Програмування в Mathcad : довідник / В.Г. Дзись, О.В. Левчук., Л.І. Новицька та ін. – Вінниця : Видавничий центр ВНАУ, 2015.– 187 с.
3. *Лобас Л.Г.* Теоретична механіка : підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів / Л.Г. Лобас. – Київ : ДЕТУТ, 2008. – 406 с.
4. *Лук'янченко О.О.* Теоретична механіка. Статика / Theoretical mechanics. Statics : методичні вказівки для студентів / О.О. Лук'янченко, С.М. Любченко, О.М. Палій. – Київ : КНУБА, 2021. – 42 с.
5. *Павловський М.А.* Теоретична механіка : підручник. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
6. *Приятельчук В.О.* Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : навчальний посібник / В.О. Приятельчук, В.І. Риндюк, В.О. Федотов. – Вінниця : ВДТУ, 2002. – 108 с.

Навчально-методичне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА

Методичні вказівки
до вивчення курсу
для здобувачів першого (бакалаврського)
рівня вищої освіти спеціальностей
131 «Прикладна механіка»,
133 «Галузеве машинобудування»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
192 «Будівництво та цивільна інженерія»

Укладачі: **Гайдайчук** Віктор Васильович,
Котенко Костянтин Едуардович

Випусковий редактор *Л. С. Тавлуй*
Комп'ютерне верстання *К. А. Мавроді*

Підписано до друку 25.02.2025. Формат 60 x 84_{1/16}
Ум. друк. арк. 2,32. Обл.-вид. арк. 2,5.
Електронний документ. Вид. № 1/III-25

Видавець і виготовлювач:
Київський національний університет будівництва і архітектури
Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002

