

Київський національний університет будівництва і архітектури

**ТЕОРЕТИЧНЕ ОБГРУНТУВАННЯ ФАКТОРА СТІЙКОСТІ
ЦЕНТРАЛЬНО-СТИСНУТИХ СТАЛЕВИХ КОЛОН З УРАХУВАННЯМ
ПОЧАТКОВИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ**

Проведені теоретичні дослідження, в яких розглянуто стійкість центрально-стиснүтих сталевих колон. Враховано, що при втраті стійкості елемента виникають максимальні деформації, які залежать від початкових залишкових деформацій, початкових деформацій вигину, деформацій стиску, деформацій вигину стрижня при втраті стійкості. Через модуль Кармана враховано вплив розвитку пружно-пластичних деформацій в перерізі колони. Отримано рівняння для визначення коефіцієнта поздовжнього згину для центрально-стиснүтих колон, котрі мають різну гнучкість, та враховують початкові недосконалості та розвиток пластичних деформацій.

Ключові слова: стійкість, сталеві елементи, гнучкість, коефіцієнт поздовжнього вигину, коефіцієнт для поздовжнього вигину, початковий вигин, початкові залишкові деформації, пластична деформація, приведений модуль, дотичний модуль, формула Ейлера, Модуль Кармана.

Актуальність роботи. Сталеві конструкції різноманітного призначення набувають широкого впровадження у різних галузях промисловості. Це в першу чергу пов'язано з появою високомеханізованих виробництв з виготовленням сталевих конструкцій, які використовують автоматизовані роботизовані лінії різки металу, холодного формування і зварювання. Така зміна виробництва відкрила можливість більш точного виготовлення конструкцій із тонкостінних профілів холодного формування. У зв'язку з появою можливості виготовлення профілів різної конфігурації і тонкостінності проблема розрахунку на стійкість сталевих стрижнів і колон набула ще більшої актуальності. У зв'язку з цим, в нових нормативних документах виконано переход до розрахунку центрально-стиснүтих стрижнів з урахуванням різної форми перерізу, що наближає цей розрахунок до європейських норм. Важливим є розуміння, що впливає на стійкість центрально-стиснүтих стрижнів з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій, початкових ексцентриситетів, початкових залишкових напружень.

Широке використання тонкостінних гнутих профілів в елементах каркасів будівель (ферми, колони, рами) різноманітного призначення, а також наближення вітчизняних діючих норм до європейських, висуває необхідність більш детального вивчення факторів, які впливають на втрату стійкості центрально-стиснүтих стрижнів відкритого перерізу, зокрема зі швелерів. При

цьому, однією з головних задач є визначення впливу та стійкість таких елементів розвитку пластичних деформацій.

Питання більш досконалого вивчення стійкості конструкцій та їх елементів має багату історію вдосконалення розрахункового апарату щодо створення надійного методологічного підходу з визначення несучої спроможності сталевих стрижнів під час дії стискаючої сили та згинальних моментів. Але тільки під час експериментальних дослідженнях можливо перевірити достовірність робочих гіпотез, покладених в основу теоретичних розробок. Тому, на сьогодні є напрямки розвитку теорії стійкості конструкцій з ефективними затратами сталі профілів, які потребують додаткових теоретичних та експериментальних досліджень.

За останні роки з'явилось ряд швидкомонтованих конструкцій з тонкостінних гнутих швелерів. Експериментальні дослідження різних авторів показують суттєвий вплив на стійкість відкритих профілів моносиметричного перерізу початкових відхилень форми, початкових ексцентриситетів та відхилень граничних умов закріплень. Вплив цих факторів повертає дослідників до більш детального аналізу впливу форми профілю на розвиток пластичних деформацій при граничному стані.

Тому **актуальною задачею** є аналіз експериментальних даних на основі теоретичних розрахунків несучої спроможності центрально стиснутих елементів моносиметричного перерізу за умови втрати стійкості з урахуванням розвитку пластичних деформацій.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Теоретичні засади розрахунку центрально-стиснутих стрижнів з урахуванням розвитку пластичних деформацій має свою історію [1...13]. Ще Е. Ламарль показав, що при втраті стійкості ідеального металевого стрижня за Л. Ейлером і Лагранжем відбувається вигин стрижня і в найбільш напруженіх волокнах стрижня напруження перевищує границю пружної роботи матеріалу. У 1889 році Ф. Енгесер (F. Engesser) запропонував теорію дотичного модуля для визначення критичних напружень під час втрати стійкості стояків з врахуванням пружнопластичних властивостей сталі. Через деякий час після досліджень А. Консідера (Considere A., 1891 р.) Ф. Енгесер запропонував теоретичний підхід подвійного модуля для визначення стійкості металевих стрижнів. В наступних дослідженнях у 1908 р. Карман Т. (Von Karman T.) експериментально підтверджив можливість використання теорії подвійного модуля для визначення критичного навантаження центрально-стиснутих стрижнів. Це було суттєвим внеском у теорію стійкості сталевих елементів, бо врахування розвитку пластичних деформацій відкрило шлях до підвищення несучої спроможності сталевих конструкцій. Для практичного використання результатів у 1892-1893

роках Ясинським Ф.С. було узагальнено результати експериментальних досліджень (Баушингера, Тетмайєра і Консідера) і складені таблиці критичних напружень для стрижнів з різною гнучкістю. В подальшому методологічний підхід перевірки стійкості стояків і колон через коефіцієнт поздовжнього згину увійшов у нормативні документи. Також Ясинським Ф.С. було теоретично показано можливість визначення критичних напружень за різних умов закріплення кінців через приведену довжину (розрахункову довжину) стрижня. У 1947 році Ф. Шенли (Chanley F.R.) розробив і обґрунтував новий концептуальний підхід для оцінки втрати стійкості стрижня з урахуванням пружно-пластичних властивостей матеріалу. Теоретичні положення дотичного і подвійного модуля на сьогодні є основами з визначення несучої здатності центрально-стиснутих і позацентрово-стиснутих металевих елементів: стрижнів, колон, стояків.

В подальшому в основу даних для визначення фактора стійкості за європейськими нормами [1-6] за умови врахування пластичних деформацій при втраті стійкості колон взяті експериментальні дані та їх статистична обробка з подальшою апроксимацією параболічною залежністю (за аналогом кривої Джонсона).

В ряді робіт автора [14...18] пропонується підхід для теоретичного обґрунтування коефіцієнта поздовжнього згину центрально-стиснутих стрижнів і колон з урахуванням початкових залишкових напружень, початкових ексцентризитетів дії поздовжньої сили та початкових вигинів та приведеного модуля.

Постановка задачі. Отримати теоретичне значення коефіцієнта поздовжнього згину з урахуванням впливу початкових недосконалостей та з урахуванням розвитку пружно-пластичних деформацій та початкових залишкових деформацій.

Виклад основних результатів досліджень.

Розглянута стійкість центрально-стиснутої сталевої колони (стрижня). Але теорія втрати стійкості ідеального стрижня (колони) не може бути застосована на практиці внаслідок впливу технології виготовлення конструкцій та точності під час монтажу каркасу. Тому, при розрахунку стійкості центрально-стиснутих колон приймають розрахункову модель стиснутої колони з початковими недосконалостями та позацентрово-стиснути, за умови коли ексцентризитет мас мале значення. Крім того, враховують початковий вигин осі стрижня, та початкові залишкові деформації.

Тому досліджено стійкість позацентрово-стиснутого сталевого стрижня (колони). Стрижень має стиск силою N по осі Z . Вісь поздовжньої сили не співпадає з поздовжньою віссю стрижня. Ексцентризитет між віссю

поздовжньої сили і віссю стрижня складає незначну величину. Також сталевий стрижень має вигин поздовжньої осі: $\delta_0 = l_0 / 750 \dots l_0 / 500$. В подальших дослідженнях враховано, що за умови втрати стійкості в поперечному перерізі виникають пружно-пластичні деформації. Розвиток пружно-пластичних деформацій враховують через теорію подвійного модуля.

Для класів 1, 2 і 3 поперечних перерізів прийнято допущення, що локальна стійкість та міцність полицеь і стінки стрижня під дією стиску не впливає на його загальну стійкість. Відмова таких елементів будівлі, втрата загальної стійкості таких стрижнів, (стояків, колон) відповідає поведінці елементів за умови стиску з урахуванням розвитку пружно-пластичний і пластичних деформацій поперечного перерізу.

Прийнято також, що пружно-пластичні деформації починаються за напруження (σ_e), яке береться з діаграми на розтяг сталі (альтернативна трилінійна або бі-лінійна залежність між напругою і деформацією) $\sigma_e = N / A_{cal} \geq 0,8 f_y$.

За умови втрати стійкості в крайніх фіброзих волокнах стрижня існують пружно-пластичні і пластичні деформації. Внаслідок поздовжнього згину та початкових недосконалостей, такі деформації можуть мати значення близькі до деформацій границі текучості сталі (ε_y) або можуть перевищувати їх ($\varepsilon_{pl} = n_{ply} \varepsilon_y$, $\varepsilon_{pl} = f_y / E$, E – модуль пружності сталі). Загальну жорсткість стрижня з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій враховують через теорію приведеного модуля [6,14,15].

Якщо використати принцип суперпозиції напружень, загальні деформації що виникають за умови втрати стійкості стрижня, є можливість розділити:

- деформації від центрального стиску (ε_N),
- деформації початкових недосконалостей (ε_0),
- деформації від згину (ε_M) за умови втрати стійкості та початкових ексцентриситетів прикладання поздовжньої сили та вигинів.

Таким чином, прийнято робочу гіпотезу, що в поперечному перерізі в крайніх фіброзих волокнах стрижня виникають пластичні деформації за умови втрати стійкості (1).

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_0 + \varepsilon_N + \varepsilon_M . \quad \varepsilon_{pl} = \varepsilon_0 + \sigma_{cal} / E + y\pi^2\delta_m / l^2 \quad 1)$$

Деформації від центрального стиску (ε_N) залежать від значення поздовжньої сили (N) і модуля пружності сталі (E). Вважають, що нормальні напруження від поздовжньої сили не більше певного нормативного значення від міцності сталі ($\sigma_{cal} = N / A_{cal} \geq 0,8 f_y$).

Поточні нормальні напруження, при яких може відбуватися початок втрати стійкості стрижня, і що приводить до появи в крайніх фібривих волокнах перерізу стрижня, напружень рівних межі текучості сталі, приводять через коефіцієнт поздовжнього згину (φ) до межі текучості сталі (f_y).

Коефіцієнт поздовжнього згину (φ) є оберненою величиною до фактору стійкості (χ , Reduction factor for buckling) – $\varphi = 1/\chi$.

$$\sigma_{cal} = N / A_{cal} = \varphi f_y. \quad (2)$$

Деформації від згину (ε_M) залежать від максимальних вигинів за умови втрати стійкості стрижня (δ_m).

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= y / \rho_x \rightarrow 1 / \rho_x = -\left(\delta_m \pi^2 / l^2\right) - \left[-\sin(\pi l / 2l)\right] = \pi^2 \delta_m / l^2 \\ \varepsilon_m &= y \pi^2 \delta_m / l^2. \end{aligned} \quad (3.a)$$

Максимальний вигин стрижня залежить також від початкових недосконалостей (δ_{f0}, e_b) та додаткового ексцентриситету (e_{pl}) поздовжньої сили.

$$\delta_m = \delta_{f0} + e_b + e_{pl} \quad (3.b)$$

Додатковий ексцентриситет (e_{pl}) поздовжньої сили виникає від розвитку обмежених пластичних деформацій і зміщення осі центру перерізу. Зміщення осі центру перерізу є наслідком зміни модуля деформації сталі у фібрах, в яких розвиваються пружно-пластичні і пластичні деформації. Ексцентриситет (e_{pl}) залежить також від форми перерізу стрижня.

Максимальні переміщення δ_m , за умови втрати стійкості серединного перерізу ($z = l/2$), окрім початкових недосконалостей прикладання зусилля та початкових прогинів, буде залежати від поздовжнього згину: зростання згинального моменту в серединному перерізі елемента від поздовжньої сили. Відоме рішення диференціального рівняння рівноваги позацентрово-стиснутого стрижня [8] приводить до мультиплікатора:

$$EI_x \eta'' + N(\eta + \delta_{f0} + e_b) = 0.$$

$$\eta = f_m \sin(\pi z / l); \quad \eta'' = -f_m \pi^2 / l^2 \sin(\pi z / l).$$

$$z = l/2 \rightarrow N(\delta_{f0} + e_b) = f_m \left(\frac{\pi^2 EI_x}{l^2} - N \right).$$

$$f_m = (\delta_{f0} + e_b) / \left[\left(\frac{\pi^2 EI_x}{l^2} \right) N - 1 \right].$$

$$\delta_m = (\delta_{f0} + e_b + e_{pl}) / \left[\left(\frac{\pi^2 EI_x}{l^2} \right) N - 1 \right]. \quad (3.c)$$

$$\delta_m = (\delta_{f0} + e_b + e_{pl}) / \left[\left(\frac{\pi^2 E_t I_x}{l^2} \right) N - 1 \right]. \quad (3.d)$$

Перевірку стійкості стрижня від стиску поздовжньої сили визначають за формулогою (4.a).

$$f_y = N / (\varphi A_{cal}). \sigma_{cal} = \varphi f_y \quad (4.a)$$

Критичні напруження, за умови втрати стійкості та врахування приведеного модуля деформацій (T_y), мають вигляд за формулами Ейлера-Кармана.

$$\sigma_{cr} = \pi^2 T_y / \lambda_x^2 = \pi^2 E T_y / (\lambda_x^2 E), \quad (4.b)$$

Аналітичне відношення значень критичних напружень і значень початкових розрахункових нормальних напруженень буде мати вид:

$$\sigma_{cr} / \sigma_{cal} = [\pi^2 E T_y] / [\varphi \lambda_x^2 E f_y]. \quad (4.c)$$

Об'єднання формул (1...4) дає вираз для визначення загальних деформацій за умови втрати стійкості стрижня.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pl} &= \varepsilon_0 \sigma_{cal} / E + y \pi^2 \delta_m / l^2. \\ \varepsilon_{pl} &= \varepsilon_0 + \sigma_{cal} / E + (y \pi^2 / l^2) (\delta_{f0} + e_b + e_{pl}) / (\sigma_{cr} / \sigma_{cal} - 1). \end{aligned} \quad (4.d)$$

Загальні деформації визначають, через збільшення початкових розрахункових нормальних деформацій до пластичних деформацій в крайніх фібркових волокнах. Крайні фібркові волокна мають координату поперечного перерізу ($y = h_0 / 2$).

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_0 + \sigma_{cal} / E + (0,5 \pi^2 h / l^2) (\delta_{f0} + e_b + e_{pl}) / (\sigma_{cr} / \sigma_{cal} - 1). \quad (5a)$$

Введення в рівняння (5a) радіусу інерції перерізу $(i_x)^2 = I_x / A_{cal}$, використання відношення площи до моменту опору перерізу $0,5h / (i_x)^2 = 0,5h A_{cal} / I_x = A_{cal} W_x$ відкриває можливість перейти до відносного ексцентриситету $m_{xfb} = A_{cal} (\delta_{f0} + e_b + e_{pl}) / W_x$ та гнучкості колони $\lambda_x = l / i_x$.

$$\begin{aligned} (0,5 \pi^2 h / l^2) &= 0,5 \pi^2 h (i_x)^2 / (i_x l)^2 = \left[\pi^2 (l / (i_x)^2) \right] \left[(0,5h / (i_x)^2) \right] \\ (\delta_{f0} + e_b + e_{pl}) / (\sigma_{cr} / \sigma_{cal} - 1) &= \left[\pi^2 (l / (i_x)^2) \right] \left[(0,5h / (i_x)^2) \right] = \left[\pi^2 / (i_x)^2 \right] A_{cal} / W_x \\ \varepsilon_{pl} &= \varepsilon_0 + \sigma_{cal} / E = \left[\pi^2 (\lambda_x)^2 \right] (A_{cal} / W_x) (\delta_{f0} + e_b + e_{pl}) / (\sigma_{cr} / \sigma_{cal} - 1). \\ \varepsilon_{pl} &= \varepsilon_0 + \sigma_{cal} / E + \left[\pi^2 (\lambda_x)^2 \right] m_{xfb} / (\sigma_{cr} / \sigma_{cal} - 1). \end{aligned} \quad (5.b)$$

Від рівняння (5.b) виконують перехід до квадратного рівняння відносно коефіцієнта поздовжнього згину.

$$\varphi^2 \lambda_x^2 \frac{f_y}{E} - \varphi \left[\pi^2 \left(\frac{T_y}{E} + m_x f_b \right) + \lambda_x^2 (\varepsilon_{pl} - \varepsilon_0 r_s) \right] + \left[\pi^2 \frac{E}{f_y} \frac{T_y}{E} (\varepsilon_{pl} - \varepsilon_0 r_s) \right] = 0 \quad (6)$$

Для скорочення записів отриманого рівняння вводять позначення функцій Φ_{B1} і Φ_{B2} .

$$\begin{aligned} \Phi_{B1} &= \left[\pi^2 \left(T_y / E + m_{xfb} \right) + (\lambda_x)^2 (\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{ors}) \right]; \\ \Phi_{B2} &= \left[(E / f_y) + (T_y / E) (\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{ors}) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Тепер рівняння з визначення коефіцієнта поздовжнього згину, при перевірці стійкості центрально-стиснутого стрижня, має вид:

$$\varphi (\lambda_x)^2 (f_y / E) - \varphi \Phi_{B1} + \pi^2 \Phi_{B2} = 0. \quad (8)$$

Квадратне рівняння (8), яке отримане в результаті наших досліджень, має рішення.

$$\varphi = 0,5 \frac{\Phi_{B1} \pm \sqrt{(\Phi_{B1})^2 - 4\pi^2 (\lambda_x)^2 (f_y / E) \Phi_{B2}}}{[(\lambda_x)^2 (f_y / E)]}. \quad (9)$$

Остаточно приймаємо за умови $\varphi \leq 1$:

$$\varphi = 0,5 \frac{\Phi_{B1} - \sqrt{(\Phi_{B1})^2 - 4\pi^2 (\lambda_x)^2 (f_y / E) \Phi_{B2}}}{[(\lambda_x)^2 (f_y / E)]}. \quad (10)$$

$$\varphi = 0,5 \frac{\delta_{B1} - \sqrt{(\delta_{B1})^2 - 4\pi^2 (\lambda_x)^2 (f_y / E)}}{(\lambda_x)^2 (f_y / E)} \text{ (за ДБН В.2.6.-198:2014).}$$

Структура формули (10) і ДБН В.2.6.-198:2014 подібні, але формула (10) враховує початкову залишкову деформацію. Теоретичне отримання формули поздовжнього згину відкриває можливість для визначення коефіцієнта поздовжнього згину для будь-якого перерізу з урахуванням початкових відхилень та початкових ексцентриситетів.

Література

- ДБН В.2.6-198:2014 «Сталеві конструкції. Норми проектування», Мінрегіонбуд, 2014, К.: Видавництво «Сталь», 2014. - 199 с.
- Расчет стальных холодноформованных профилей в соответствии с Еврокодом 3. Хейвуд М., Уей. Э., Беляев Н.А., Бильк С.И. Бильк А.С., Украинский Центр Стального Строительства, 2015 К.: Изд-во ООО «НПП «Интерсервис»», 2015. – 99 с.

3. ДСТУ-Н Б ЕН 1993-1-3:2012 "Сврокод З. Проектування сталевих конструкцій. Частина 1-3. Загальні правила. Додаткові правила для холодноформованих елементів і профільованих листів (ЕН 1993-1-3:2006, IDT)".
4. Singer J., Arbocz J., Weller T. Buckling Experiments, Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures, Volume 2, Shells, Built-up Structures, Composites and Additional Topics. ©John Wiley and Sons, Inc.? New York. 1998. Pages 1136.
5. Schafer B.W., Local, Distortional, and Euler Buckling of Thin-Walled Columns J. Str. Eng., Vol. 128, No. 3, 2002.
6. Timoshenko S.P. and Gere J.M: Theory of Elastic Stability, McGraw Hill Kogakusha Ltd., New York. 1961.
7. Owens G.W., Knowles P.R : "Steel Designers Manual", The Steel Construction Institute, Ascot, England, 1994.
8. Dowling P.J., Knowles P.R., Owens G.W : Structural Steel Design, Butterworth, London, 1998.
9. Bilyk S. The peculiarities of buckling and strength analysis of frame elements of I-shaped cross-section with variable web height. Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures. Proceeding of the XI international conference on metal structures (ICMS-2006), Pzeszow, Poland, 21-23June, 2006-p.:144-145.
10. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. – М.: Госиздат физ-мат литературы, 1959. – 544 с.
11. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М.: Гостехтеоретиздат, 1952. – 427 с.
12. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями о теории упругости и теории сооружений. – М.: Гостехтеоретиздат, 1957. – 536 с.
13. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: «Наука», 1967. – 984 с.
14. Білик С.І., Залишкові напруження в сталевих холодногнутих профілях / С.І. Білик, А.С. Білик, М.В. Усенко, В.В. Куземко, В.В. Нужний // Строительство, материаловедение, машиностроение. Сборник научных трудов. Выпуск 61 – Днепропетровск, 2011.
15. Білик С.І., Методика розрахунку на стійкість холодногнутих швелеров з урахуванням пластичних деформацій / С.І. Білик, М.В. Усенко // Строительство, материаловедение, машиностроение». – Випуск 60. – Дніпропетровськ, 2011. – С. 21-25.
16. Білик С.І., Про стійкість центрально-стиснутого гнутої швелера з урахуванням розвитку пластичних деформацій./ С.І. Білик, М.В. Усенко // Зб. наук. пр. Вип. 21. – Рівне. МОН України, НУВГП, 2011. – С. 136–143.
17. Білик С.І., Апроксимація діаграми розтягу сталі степеневою функцією / С.І. Білик, А.С. Білик, М.В. Усенко // Современные строительные конструкции из металла и древесины// Сборник научных трудов №15, часть 3.-Одесса. МОН Украины, ОДАБУ,2011.-С.3-9.

Аннотация

Проведены теоретические исследования, в которых рассматривается устойчивость центрально-сжатых стальных колон. Учтено, что при потере устойчивости элемента возникают максимальные деформации, которые зависят от начальных остаточных деформаций, начальных деформаций изгиба,

деформаций сжатия, деформаций изгиба стержня при потере устойчивости. Учитывая модуль Кармана, принято во внимание влияние развития напряженно-пластических деформаций в сечении колонны. Получено уравнение для определения коэффициента продольного изгиба для центрально-сжатых колонн, которые имеют разную гибкость, и учтены начальные дефекты и развитие пластических деформаций.

Ключевые слова: устойчивость, стальные элементы, гибкость, коэффициент продольного изгиба, коэффициент для продольного изгиба, начальный изгиб, начальные остаточные деформации, пластичная деформация, приведенный модуль, касательный модуль, формула Ейлера, Модуль Кармана.

Abstract

Taking into account that for the loss of Sustainability element, cross section is and having the maximum deformation. Maximum deformation depend on the initial residual strains, initial strain of bending, compressive deformation, deformation of the rod bending of the rod by buckling. This loss of stability usually occurs within the elastic range of the material. By of the module Karman into account was take the impact of elastic-plastic deformation in the cross section of the column. Determining the equation for the longitudinal bending of column. The equation for the longitudinal bending of column describes components: the initial imperfections and development of plastic deformation in cross section.

Tags: Sustainability, steel members, flexibility, ratio of longitudinal bending, reduction factor for buckling, the initial bending, the initial residual deformations, plastic deformation, reduce module, tangent module, Euler's formula, Karman's module.