УДК 528

к.т.н., доцент Егоров А.И.,
к.т.н., доцент Исаев А.П., Гандерук В.Л.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СООРУЖЕНИЙ

Рассмотрено общий подход к решению вопроса оптимизации геодезических наблюдений на основании моделирования напряженно-деформированного состояния инженерных сооружений.

Постановка проблемы. Существующая нормативная документация, регламентирующая точность геодезических работ при строительстве и эксплуатации инженерных сооружений, использует данные лишь о геометрии сооружений, при этом не учитывая их работу. Одним из эффективных путей оптимизации геодезических наблюдений является получение и использование априорных знаний о статической или динамической работе сооружения на основе моделирования напряженно-деформированного состояния изучаемого объекта.

Основное содержание работы. Сложность и уникальность строительных объектов предъявляет к геодезическим наблюдениям за деформациями в период эксплуатации особые требования. Главными условиями таких наблюдений являются точность и объективность, так как они дают возможность судить о реальном состоянии сооружений – это с одной стороны. С другой стороны, для установления точностных параметров геодезических измерений необходимо знание работы самого сооружения под воздействием различных факторов.

Дело в том, что в идеале объем и точность геодезических наблюдений должны быть оптимальными для данного исследуемого сооружения. Малый объем и заниженная точность могут исказить картину наблюдаемого явления, слишком большой объем и высокая точность приводят к чрезмерным материальным затратам. Одним из эффективных путей оптимизации геодезических наблюдений, на наш взгляд, и является использование каких-либо априорных знаний о статической или динамической работе сооружения в процессе возведения или последующей эксплуатации.

Такие знания можно получить на основе моделирования напряженно-деформированного состояния изучаемого объекта. При проектировании сооружения, в особенности уникального, расчеты напряженно-деформированного состояния выполняются на основе расчетной модели, построение и анализ которой представляет собой достаточно сложную задачу. Повторять эти расчеты для оптимизации геодезических наблюдений не имеет смысла, однако и обойтись без анализа расчетной модели, хотя бы и самого нижнего уровня, невозможно.

Это говорит о том, что построение модели напряженно-деформированного состояния объекта является наиболее важной и первоочередной задачей, на основании анализа которой должны назначаться точность и методика производства геодезических работ[6, 10].

Под термином “моделирование” обычно понимают методы экспериментального исследования, основанные на замещении реального исследуемого объекта другим, ему подобным, называемым моделью.

Однако понятие моделирование применяется и в другом смысле – когда под термином “модель” представляются упрощенные, чисто гипотетические образы, имеющие некоторые сходства с реальными объектами и находящиеся в определенной логической связи друг с другом. Эта связь затем отражается в виде конкретных математических функций [8].

Здесь рассматриваются лишь модели, направленные на решение поставленных задач средствами математики. Модель в том или ином смысле, более или менее полно имитирует оригинал – моделируемый объект. Можно сказать, что объект a' является моделью объекта a относительно некоторой системы S характеристик, если a' строится для имитации a по этим характеристикам.

Теоретические физические модели имитируют реальный объект с помощью абстрактных представлений о физической природе объекта с помощью средств математики. Примером могут служить модели физического поведения твердого деформируемого тела, наиболее простой из которых, является модель упругого тела, описываемая законом Гука:

$$\sigma = \varepsilon E \tag{1}$$

где σ – напряжение; ε – деформация; E – модуль упругости.

В действительности формула (1) является приближенной, однако основанная на ней теория упругости позволила решить большое количество задач о напряженном состоянии тел, работающих в условиях различных нагрузок.

Иногда используют более короткий путь, когда свойства оригинала устанавливаются без анализа его структуры и свойств элементов, а с помощью прямых наблюдений над входными и выходными параметрами. Подобная математическая модель описывает отклик оригинала на внешние возмущения.

Например, когда изучается влияние на объект a воздействий некоторого класса V, причем каждому воздействию $V \in V$ отвечает некоторый отклик $r=r(V)$. При этом в понятие “воздействие” можно включить все, в том числе и начальные условия или начальные несовершенства, если они существуют. В соответствующей математической модели a' воздействие V' и отклик r' уже представляют собой наборы чисел, функций и т.п., причем от V' (соответственно от r') можно перейти к r и обратно, а сама модель определяет зависимость $r'(V')$. Тогда условием моделирования является требование, чтобы эта зависимость имитировала зависимость, каков бы ни был механизм этой имитации [1].

Из вышесказанного следует, что любую модель следует рассматривать как сложную систему, так как на ее поведение действуют многочисленные факторы, которые, по возможности, должны быть учтены при построении модели.

Реальные сложные системы функционируют в условиях действия большого количества случайных факторов. Источниками случайных факторов являются воздействия внешней среды, а также ошибки, возникающие внутри самой системы. Для объектов строительства к внешним ошибкам относятся ошибки изготовления строительных элементов, ошибки монтажа и ошибки геодезических разбивочных работ, которые сопровождают процесс воздействия.

Пусть ξ – случайная величина с законом распределения $f_\xi(x)$, которая характеризует некоторые воздействия на систему со стороны внешней среды, или один из ее внутренних параметров. Пусть, кроме того, U – одна из величин, описывающих результат функционирования системы. В общем случае величина U зависит от ξ:

$$U = \varphi(\xi) \tag{2}$$

и потому также является случайной величиной, закон распределения которой определяется видом функций φ и $f_{\xi(x)}$. Естественно, что каждому возможному значению случайной величины ξ соответствует некоторое возможное значение случайной величины U.

Поведение системы в среднем под воздействием случайных факторов может быть представлено выражением:

$$\varphi[M(\xi)] = M(U), \tag{3}$$

где $M(\xi)$ – среднее значение (математическое ожидание) случайной величины ξ;

M(U) – соответственно среднее значение (математическое ожидание) случайной величины *U*.

Правильность выражения (3), т.е. если случайная величина ξ принимает значение $M(\xi)$, то будет ли соответствующее значение случайной величины U равно *M(U)*, будет зависеть от вида функции $U = \varphi(\xi)$.

Если $\varphi(\xi)$ будет линейной функцией

$$U = a\xi + b, \tag{4}$$

то тогда среднее значение

$$M(U) = aM(\xi) + b. \tag{5}$$

Сопоставление выражений (5) и (3) дает возможность сделать вывод, что в случае линейной зависимости между случайными факторами и результатами функционирования системы смещений средних значений отсутствует.

Если $\varphi(\xi)$ будет нелинейной функцией, например

$$\varphi(\xi) = \xi^2, \tag{6}$$

то тогда

$$M(U) = M(\xi^2) + \delta_\xi^2, \tag{7}$$

где δ_ξ^2 – дисперсия случайной величины ξ.

Таким образом, в рассмотренном случае действие случайных факторов вызывает смещение среднего значения результата функционирования системы на величину дисперсии.

Для сложных систем, встречающихся на практике, как правило, действие случайных факторов приводит к смещению средних результатов их функционирования.

Конечно, имеются зависимости, линейность которых в рассматриваемой области применения является практически достоверной. Однако гораздо чаще предположение о линейности имеет характер допущений. Это объясняется тем, что во многих случаях такое предположение является простейшим, и потому бывает естественно начинать именно с него – особенно, если информации об истинном характере зависимости недостаточно.

С другой стороны, многие математические методы исследований наиболее приспособлены к линейным задачам.

При построении модели четко должна формулироваться цель предполагаемых исследований. Если целью исследований является определение изменений формы, размера и расположения деформируемого тела, то это – геометрический анализ. Если необходимо получить картину физического состояния деформированного тела, общего соотношения напряжений и деформации, то это – физический анализ.

В первом случае информация о действующих силах и напряженном состоянии объекта исследования недоступны. Окончательным результатом геометрического анализа является обычно только взаимное смещение дискретных точек. При более совершенном геометрическом анализе общее представление о геометрическом положении требует определения пространственных смещений всего тела.

Пространственные смещения могут быть преобразованы в поля деформаций, эта связь в матричной форме для пространственной системы координат *X, У, Z* имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ Y_{xy} \\ Y_{yz} \\ Y_{zx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U \\ V \\ W \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_x, \varepsilon_z, Y_{xy}, Y_{yz}, Y_{zx}$ – компоненты тензора деформаций ; U, V, W – компоненты вектора смещений.

Детерминистская модель напряженно-деформированного состояния является более предпочтительной, в сравнении с эмпирической. Во-первых, для построения подобной физической модели сооружения, в качестве исходных, используются данные о геометрических размерах сооружения, свойствах материала, действии внешних сил и других факторах, характеризующих данный тип сооружения. На выходе получают перемещения и усилия, вызванные действием этих факторов, которые являются предметом анализа напряженно-деформированного состояния.

Во-вторых, анализ модели дает возможность получить более полную информацию о виде и месте максимальных деформаций, на основе которой могут быть обоснована точность геодезических наблюдений за деформациями.

Этим подчеркнута важность использования моделей для получения априорных сведений об изучаемом объекте и необходимость более детального изучения моделей строительных конструкций.

В расчетах напряженно-деформированного состояния любой конструкции можно условно выделить следующие основные этапы [4, 5]:

1. Построение физической модели путем идеализации свойств конструкции и внешних воздействий. Физическая модель может быть определена системой физических характеристик, полученной на основе известной структуры объекта, характеристик отдельных ее элементов и влияния внешних факторов, в том числе и окружающей среды, в которой расположен объект и в которой производятся измерения.
2. Построение математической модели – математическая формулировка поведения физической модели.
3. Выбор метода исследования математической модели и проведение этого исследования.
4. Анализ полученного математического результата.

Задача построения физической модели не является легко решаемой, вследствие того, что реальный объект (сооружение, конструкция) имеет множество особенностей, отличающих его от другого. Это относится, в первую очередь, к геометрии сооружения, характеру воздействия внешних факторов и т.п. Учесть все особенности сооружений при построении его физической модели довольно сложно и не всегда представляется возможным в силу различных факторов.

Идеализация при построении физической модели заключается в том, что реальная модель (объект) заменяется физической моделью с конечным числом особенностей. При этом подобранная физическая модель должна содержать те особенности, которые наиболее присущи реальной модели. При этом отдельные особенности могут не учитываться, вследствие незначительного их влияния на модель в целом, что упрощает построение физической модели. Кроме того, если возникает необходимость изучения влияния отдельных особенностей (таких как изгиб, кручение), есть возможность построения физической модели отдельно для каждой особенности. Такая необходимость возникает при условии, что влияние такого фактора будет носить доминирующее значение. Это с одной стороны дает возможность выделить доминирующий фактор, а с другой – упростить построение модели.

Большинство из внешних факторов, которые воздействуют на конструкцию, изменяются во времени. Если эти изменения происходят медленно и не вызывают в конструкции значительных инерционных сил, то допустимо говорить о статическом приложении нагрузок.

Из вышеприведенного видно, что модель располагает лишь частью свойств реального объекта и, вследствие этого, проще его. Физическая модель подчиняется физическим законам, она служит переходным звеном к математической модели объекта. Математическая модель представляет собой систему математических зависимостей и уравнений, которые описывают поведение физической модели. Часто одна и та же математическая модель соответствует нескольким различным физическим моделям.

Следует заметить, что один и тот же объект может быть представлен несколькими различными физическими моделями. Каждая из этих моделей ставит своей целью изучение лишь определенных сторон поведения объекта. При изучении одних и тех же свойств объекта возможен выбор различных типов физических моделей.

Создать реальную физическую модель работы сооружения довольно сложно, а в отдельных случаях не представляется возможным. Это вынуждает заменять реальную физическую модель работы сооружения некоторой аппроксимирующей расчетной моделью. Реальная конструкция, освобожденная от всех несущественных особенностей и представленная в связи с этим в некоторой идеализированной форме, носит название расчетной схемы.

При переходе от физической к расчетной модели сложные математические зависимости или соотношения должны быть заменены более простыми приближенными или аппроксимирующими соотношениями. В частности, во многих случаях переменные величины могут заменяться их средними постоянными значениями, нелинейные соотношения – линейными и т.п.

Кроме того, в расчет вводится гипотеза о свойствах конструкции и действии внешних сил. Эта аппроксимирующая гипотеза может быть подобрана достаточно условно, но при этом она должна ставить исследуемую конструкцию в менее благоприятные условия, чем те, в которых находится действительная конструкция.

Большое значение имеет принцип простоты аппроксимирующих моделей работы сооружений. Выбранная модель должна по возможности полно отражать условия работы исследуемого сооружения, и в то же время должна быть простой, что даст возможность подобрать не слишком громоздкий алгоритм исследования.

При введении аппроксимирующих гипотез следует внимательно относиться к упрощениям и отбрасыванию различных несущественных факторов, т.к. они могут оказать существенное влияние на качественный характер исследования.

Приступая к расчету любой конструкции необходимо определить, что в данном случае является существенным и что несущественным. Есть смысл произвести схематизацию конструкции и отбросить все те факторы, которые существенно не повлияют на суть исследуемого явления.

Некоторые методы схематизации получили широкое распределение и имеют общий характер (идеализация материала в виде сплошной среды; предположение об однородности материала; приведение геометрической формы тела к таким стандартным схемам, как стержни, пластины или оболочки; схематизация внешних сил и др.). Другие методы схематизации вполне конкретны и связываются с каждой рассматриваемой задачей.

Что же касается общих сведений, то следует иметь в виду, что на достаточно ранних стадиях создания расчетной схемы следует принять решение о том, будет ли расчет выполняться как линейный или нелинейный, следует ли учитывать силы инерции и выполнять динамический расчет или же можно ограничиться статическим анализом.

Об ожидаемом поведении конструкции судят на основании имеющегося опыта и инженерной интуиции и поэтому все принятые решения подлежат апостериорной оценке. Если во всех разрешающих уравнениях, описывающих поведение системы, могут быть проигнорированы производные по времени, то речь идет о статической задаче и, следовательно, об анализе неподвижной системы. В задачах динамики, когда существенную роль играют силы инерции, пропорциональные ускорениям масс, и в задачах ползучести, когда учитываются скорости, речь должна идти об анализе движущейся системы.

Нелинейные задачи могут быть связаны с эффектами, возникающими при изменении геометрии системы под нагрузкой (геометрическая нелинейность), отсутствием пропорциональности между напряжениями и деформациями (физическая нелинейность), с возможным включением и выключением из работы однородных связей при действии нагрузки на систему (конструктивная нелинейность).

Схематизация внешних сил также является составной частью выбора расчетной схемы.

Поэтому, прежде чем перейти к математическому описанию исследуемого объекта, необходимо четко представить, как правильно воспринимать реальную конструкцию и как выбрать расчетную схему [9].

Следующим этапом расчета напряженно-деформированного состояния конструкции является математическое описание поведения выбранной физической модели – построение математической модели. Основой для построения математической модели являются входные и выходные данные, характеризующие поведение физической модели. Математическое описание должно так же включать в себя зависимость между входными и выходными данными.

Подобного рода рассуждения приводят, на первый взгляд, к выводу, что выбранной физической модели должна соответствовать единственная математическая модель. Однако при построении математической модели вводятся упрощающие предположения о характере ее отдельных свойств, как и при выборе физической модели, что приводит к получению нескольких математических моделей, соответствующих одной физической модели.

Кроме того, различные математические модели могут различаться методами решения уравнений – аналитическими либо численными. В случае использования численных методов в математическую модель входит алгоритм реализации метода и, соответственно, программа для ЭВМ [2, 3, 7].

Введение таких упрощений в каждом конкретном случае приводит к построению своей математической модели.

Самой строгой будет математическая модель, включающая без каких-либо ограничений зависимости объемной задачи теории упругости. Введение же дополнительных упрощений ограничивает область применения построенной математической модели.

Поскольку содержание математической модели предопределено содержанием физической модели, то справедливо утверждать, что для каждой физической модели можно подобрать такой метод исследования математической модели, который будет обладать наилучшей числовой устойчивостью и точностью.

Исследование математической модели позволяет оценить влияние отдельных ее членов на поведение физической модели. В результате может потребоваться уточнение содержания физической модели. Такой анализ особенно полезен, если при выборе физической модели не ясно влияние отдельных свойств исходного объекта на интересующие нас стороны его поведения.

Учет в физической модели дополнительных свойств объекта повышает ее способность к более точному описанию его поведения. Однако при этом увеличиваются общие затраты времени и средств на выполнение таких исследований.

Выводы. Установлено, что теоретическая модель напряженно-деформированного состояния является более предпочтительной по сравнению с эмпирической, так как при ее построении используют данные о геометрических размерах, свойствах материала, действии внешних сил и других факторов, характеризующих рассматриваемый тип сооружений. При рассмотрении вопроса моделирования напряженно-деформированного состояния выделены следующие этапы: выбор физической модели, построение математической модели – математическая формулировка поведения физической модели, выбор метода исследования математической модели, анализ полученного результата.

Литература

1. *Бляхман И.И., Мышкис А.Д., Панов Я.Г.* Механика и прикладная математика: Логика и особенности применений математики. – М.: Наука, 1990. – 356 с.
2. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
3. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
4. Метод суперэлементов в расчете инженерных сооружений /*В.А. Постнов, С.А. Дмитриев, Б.К. Емышев, А.А. Родионов.* – Л.: Судостроение, 1979. – 286с.
5. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.
6. *В.С., Староверов Егоров А.И.* Модели геодезических измерений при наблюдениях за деформациями сооружений башенного типа // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва (погляд у XXI століття). – Львів, 2000. – С. 156–160.
7. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 350 с.
8. *Третьяченко Г.Н.* Моделирование при изучении прочности конструкций. – Киев: Наук. думка. – 1979. – 226 с.
9. *Феодосьев В.И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1975. – 171 с.
10. *Чибиряков В.К., Староверов В.С., Егоров А.И.* Модели геодезических измерений при наблюдениях за деформациями инженерных сооружений // Инженерная геодезия. – 1998. – Вып. 40. – С. 233–239.

Анотація

Розглянуто загальний підхід до вирішення питання оптимізації геодезичних спостережень на основі моделювання напружено-деформованого стану інженерних споруд.

Annotation

The general approach to the decision of a question of optimization of geodetic supervision on the basis of modeling the tense-deformed condition of engineering constructions are considered.