Застосування штучного інтелекту при викладанні математичного аналізу

Наталія Єгорова, студентка [1](ORCID: 0009-0007-5172-7196)
Ольга Серпінська, ст. викладач [1] (ORCID: 0000-0003-3589-2267)
Ірина Безклубенко, канд.тех.наук., доц. [1] (ORCID: 0000-0002-9149-4178)

[1] *Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна*

АНОТАЦІЯ

В тезах на прикладі застосування методів комп'ютерного представлення даних до розділу "Матриці" курсу математичного аналізу, автори розглядають можливість застосування елементів апарату штучного інтелекту, але не пропонують вичерпний алгоритм побудови відповідних систем, і ґрунтуються на відомій тезі: «Для інтелектуальних завдань не існує формального алгоритму розв'язання.

Ключові слова: семантичні мережі, продукційні правила, математичні теореми, доведення теореми.

1. ВСТУП

Автори, опираючись на власний досвід і думки більшості колег, що присвятили себе викладанню вищої математики, вважають, що вивчення вищої математики полягає не тільки в тому, щоб навчити студента відомим математичним визначенням, аксіомам, теоремам, користуватися стандартними математичними формулами і алгоритмами, але в першу чергу, навчити логічно і нестандартно мислити. Незалежно від майбутньої професії: фізик-теоретик, інженер-системотехнік, економіст, що спеціалізується на ф'ючерних операціях, або будівельник можуть навчитися логічно і нестандартно мислити на заняттях з математичного аналізу в першу чергу, доводячи теореми і розв'язуючи задачі, які необхідно довести. А саме: використовуючи існуючу інформацію, співставляти відомі дані, знаходити необхідні (а часто і нетривіальні) логічні зв'язки і в результаті проведеного аналізу формулювати висновок, що підтверджує або спростовує висунуте твердження.

2. ЗАСТОСУВАННЯ ПРОДУКЦІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ ЗВОРОТНОЇ МАТРИЦІ

Автори пропонують побудувати семантичну мережу на основі деяких поточнень. Суть їх полягає в наступному: перше твердження починається з абстрактного уявлення, яке легко довести на основі відомих визначень та аксіом, а далі відбувається поетапне уточнення до заключного конкретного представлення, яке вже може бути реалізоване за допомогою комп'ютерної програми.

В основі запропонованої роботи лежать широко відомі поняття "Продукційна модель" і "Семантична мережа". Продукційна модель доведення математичної теореми представляє собою процедуру, що пов'язує деякі математичні дії логічними зв'язками "якщо (умова), то (слідування)" [1]. Продовжуючи дослідження вивчення студентами першого курсу початку лінійної алгебри , застосування продукційної моделі проілюструємо на прикладі доведення теореми існування зворотної матриці [2]. Сформулюємо базу знань, яка є необхідною для розуміння доведення цієї теореми. Скористаємось класичним формулюванням цієї теореми і її стандартним доведенням, що викладене, наприклад, в одному з підручників.

Теорема.

Для того, щоб для матриці A існувала ліва і права зворотна матриця необхідно і достатньо, щоб визначник $\Delta = \det A$ матриці A був відмінним від нуля.

Доведення.

1) *Необхідність.* Якщо для матриці A існує хоча б одна зі зворотних матриць, наприклад A^{-1}, то зі співвідношення $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = E}$ отримаємо, $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$ (E- одинична матриця), звідки слідує, що $\Delta \neq 0$.

2) *Достатність.* Нехай визначник $\Delta = \det A$ відмінний від нуля. Складемо з алгебраїчних доповнень A_{ij} елементів a_{ij} транспоновану матрицю $\widetilde{A}$, яка називається доєднаною матрицею, кожний елемент якої розділимо на визначник Δ вихідної матриці. Отримаємо $A^{-1} = (\widetilde{A} / \Delta)$ наступну матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Доведемо, що добутки $A \cdot A^{-1}$ і $A^{-1} \cdot A$' є одиничними матрицями. Будь-який недіагональний елемент матриць дорівнює нулю так як є пропорційним сумі добутків елементів одного рядка(стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення другого рядка (стовпця). Діагональні елементи матриць $A \cdot A^{-1}$ і $A^{-1} \cdot A$ дорівнюють одиниці, так як сума добутків елементів рядка (стовпця) на відповідні до них алгебраїчні доповнення дорівнюють визначнику.

Теорема доведена.

Продукційні правила

1) *Необхідність.*

1. *ЯКЩО* для матриці A аснує зворотна матриця A^{-1}, то $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = E}$.

2. *ЯКЩО* $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = E}$, то $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$, (E- одинична матриця)

3.*ЯКЩО* $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, то $\det A = \Delta \neq 0$.

2) *Достатність.*

1. *ЯКЩО* $\det A = \Delta \neq 0$, *ТО* існує матриця

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{\Delta}&\frac{A_{21}}{\Delta}&\dots&\frac{A_{n1}}{\Delta}\\ \frac{A_{12}}{\Delta}&\frac{A_{22}}{\Delta}&\dots&\frac{A_{2n}}{\Delta}\\ \dots\dots\dots\\ \frac{A_{1n}}{\Delta}&\frac{A_{2n}}{\Delta}&\dots&\frac{A_{nn}}{\Delta}\end{pmatrix}=\left(\frac{A_{ji}}{\Delta}\right),i=\overline{1,n};j=\overline{1,n}$$

2. *ЯКЩО* $a_{ij}^{-1}=\frac{A_{ij}}{\Delta}$, *ТО* елементи матриці $C=A\cdot A^{-1}$ дорівнюють

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}^{-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\frac{A_{jk}}{\Delta}=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}\Rightarrow AA^{-1}=E$$

Теорема доведена. Матриця, зворотна до матриці A позначається A^{-1}.

Побудуємо семантичну мережу доведення теореми існування зворотної матриці. Конкретизуємо необхідний базовий мінімум знань, що лежить в основі семантичних мереж, представлених на рисунках 1 і 2.

База знань

1. Визначення поняття “Матриця”.
   a. Рядки(m), стовпці (n) матриці $A_{m\times n}$.
   b. Порядок матриці (m x n). Квадратна матриця (m = n).
   c. Елементи матриці a_{ij}, *i – номер рядка, j – номер стовпця.*
   d. Діагональні елементи матриці a_{ij}. Діагональні елементи матриці $a_{ij}=0,i\neq j$. Одинична матриця E $a_{ij}=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$
   e. Рівність матриць: $A_{m\times n}=B_{m\times n}$, якщо $a_{ij}=b_{ij}$.
   f. Сума матриць. Властивості суми.
   g. Множення матриці на число. Властивості.
   h. Різниця матриць.
   i. Добуток матриць. Властивості добутку матриць.
   j. Нульова матриця.
   k. Поняття визначника.
   l. Властивості визначників .
   m. Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника $\det A$ A_{ij}.
   n. Обчислення визначників.
   o. Визначник добутку матриць.
   p. Приєднана матриця
   q. Поняття зворотної матриці
   r. Теорема існування зворотної матриці.

Розглянемо побудову семантичної мережі доведення *необхідності.* В самому загальному вигляді ця мережа приведена на рисунку 1 і представляє собою орієнтований граф з двох вершин, що зв’язані відношенням “СЛІДУЄ”.

Рисунок 1. Загальний вигляд семантичної мережі доведення необхідності

Деталізуємо представлені на цьому рисунку об’єкти у відповідності до приведеної вище бази знань як представлено на рисунку 2.

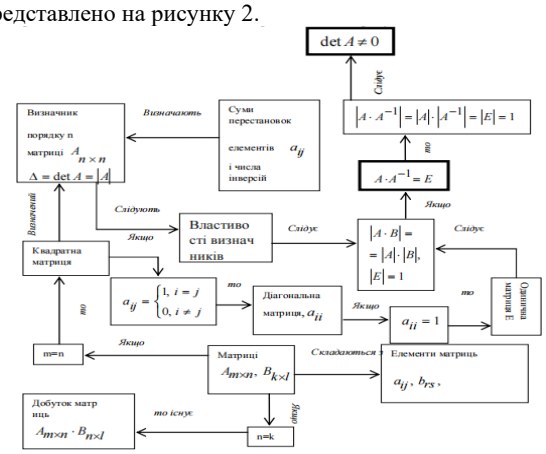

Рисунок 2. Семантична мережа доведення необхідності існування зворотної матриці

Перейдемо до побудови семантичної мережі доведення достатності, загальний вигляд якої представлений на рисунку 3.

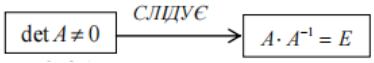

Рисунок 3. Загальний вигляд семантичної мережі доведення достатності.

На рисунку 4 приведені тільки остаточні вузли семантичної мережі, що відповідають доведенню достатності існування зворотної матриці.

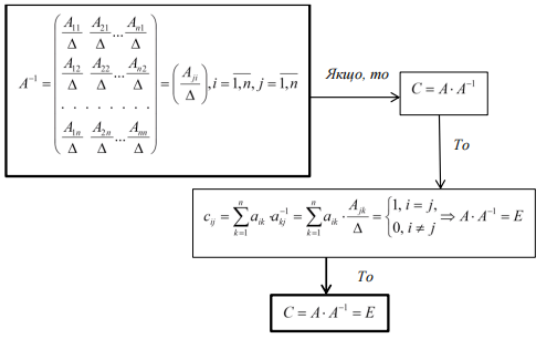

Рисунок 4. Заключний фрагмент семантичної мережі доведення достатності існування зворотної матриці

В запропонованому авторами методі студенту слід спочатку ознайомитися з поняттями в вершинах семантичної мережі, і наочно представленими зв’язками між ними. Отримавши загальне уявлення, слід більш грунтовно досліджувати тему.

Список літератури

[1] Ross K. Doing and proving: the place of algorithms and proof in school mathematics / K. Ross //American Mathematical Monthly. – 1998. – Vol. 3. – P. 252–255. https://doi.org/10.1080/00029890.1998.12004875.

[2] Schoenfeld A. What do we know about mathematics curricula? / A. Schoenfeld // Journal of MathematicalBehavior. – 1994. – Vol. 13 (1). – P. 55–80.DOI:10.1016/0732-3123(94)90035-3.