МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт для здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»

Київ 2025

УДК 528.92
М33

Укладач В. В. Зіборов, канд. техн. наук, доцент

Рецензент Н.Ю. Лазоренко, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск Ю.О. Карпінський, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри геоінформатики і фотограмметрії, протокол № 2 від 28 серпня 2024 року.

В авторській редакції.

Математичні методи і моделі [Електронний ресурс] :
М33 методичні вказівки до виконання лабораторних робіт / уклад.
В. В. Зіборов. – Київ : КНУБА, 2025. – 52 с.

Містять загальні положення, теоретичні відомості, методичні вказівки до виконання лабораторних робіт, список літератури.

Призначені для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій».

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ 4

НЕОБХІДНЕ ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ 4

ЗАВДАННЯ 1. АППРОКСИМАЦІЯ ВИМІРЮВАНЬ ЛІНІЙНОЮ МОДЕЛЮ ПО МНК 5

ЗАВДАННЯ 2. ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ ЗА СПОСОБОМ ГЕЛЬМЕРТА . 8

ЗАВДАННЯ 3. АФІННЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ 15

ЗАВДАННЯ 4. БІЛІНІЙНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ 18

ЗАВДАННЯ 5. ПОРІВНЯННЯ СПОТВОРЕНЬ У ТРЬОХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ 20

ЗАВДАННЯ 6. ПОБУДУВА ЦМР МЕТОДОМ 24

ТРІАНГУЛЮВАННЯ ДАНИХ 24

ЗАВДАННЯ 7. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОСІДАННЯ СПОРУДИ 30

ЗАВДАННЯ 8. ПОБУДОВА ОДНОМІРНОГО КУБІЧНОГО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО СПЛАЙНУ ЗА ТРЬОМА ТОЧКАМИ 36

ЗАВДАННЯ 9. КРИТЕРІЇ УГОДИ 39

ЗАВДАННЯ 10. ПОБУДУВАННЯ ПОВЕРХНІ ЗА ДОПОМОГОЮ SURFER_6.04 43

ЗАВДАННЯ 11. ЗАВДАННЯ КОМІВОЯЖЕРА У МЕРЕЖЕВОМУ АНАЛІЗІ ДОРОЖНІЙ МЕРЕЖІ 47

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 50

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Метою викладання курсу «Математичні методи і моделі» є опанування основами теорії та практики машинно-орієнтованих математичних методів, зв'язаних з обробкою інженерно-геодезичної інформації, з математичними методами моделювання геодезичних даних, з основами побудови цифрових моделей місцевості, автоматизованих систем обробки даних, з використанням геоінформаційних систем, а також, практичне засвоювання діючих сучасних систем автоматизації інженерно-геодезичних робіт.

Кожен студент отримує індивідуальне завдання до виконання лабораторної роботи згідно з номером варіанта, вирішує завдання на основі тієї чи іншої математичної моделі, складає схему алгоритму та програму мовою програмування MatLab, виконує програму на комп'ютері, оформлює звіт і захищає свою роботу. Звіт з лабораторної роботи повинен містити: постановку задачі, вихідні дані, модель і метод розв'язання; програму, написану мовою програмування MatLab; результати розв'язку та їх перевірку;

висновок.

НЕОБХІДНЕ ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

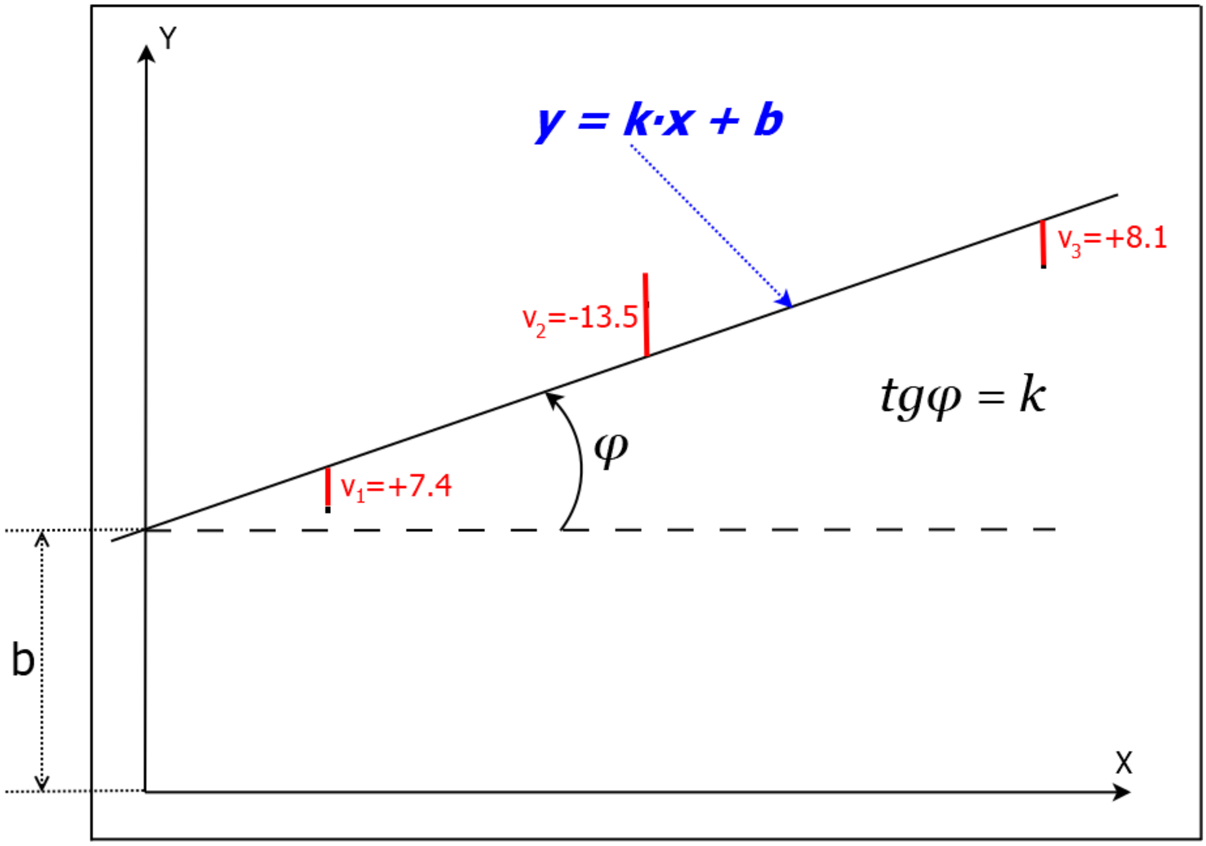
Під час вирішення завдань слід використовувати середовище Matlab або його безкоштовне альтернативу **FreeMat**, яку можна завантажити за адресою:
http://freemat.sourceforge.net/
Завантажити GNU Octave можна звідси:
https://www.gnu.org/software/octave/download.html
Також потрібен пакет математичних програм **wxMaxima**.
Завантажити його можна тут:
https://sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-Windows/5.44.0-Windows/

Також студенту знадобиться векторний графічний редактор Dia.
Програму-установник Dia можна завантажити безкоштовно за адресою:
http://dia-installer.de/download/index.html
Інструкцію до цього редактора зручно читати тут:
http://dia-installer.de/doc/en/index.html
Посилання на ці вказівки:
https://osf.io/zpqfj?view_only=d21e83b76fab408780e082920e4ad184

ЗАВДАННЯ 1. АППРОКСИМАЦІЯ ВИМІРЮВАНЬ ЛІНІЙНОЮ МОДЕЛЮ ПО МНК

Щоб виконати це завдання, слід законспектувати лекцію: https://youtu.be/T-4dLU4maK8
Виконання цього завдання продемонстровано на цьому відео: https://youtu.be/_NBRUENG93E
Інші відео автора: https://www.youtube.com/channel/UCFZglBgYat1GGPMCPQ4XbJQ?sub_confirmation=1

1. Умова задачі. Виконані деякі виміри. Ці виміри були візуалізовані у вигляді трьох точок у системі координат XOY. Тепер необхідно апроксимувати, тобто замінити ці вимірювання рівнянням $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$. У цьому рівнянні слід знайти невідомі коефіцієнти k і b методом найменших квадратів (МНК), а також двома наближеними способами. Для кожного з трьох способів виконати оцінку точності та порівняти їх.



2. Варіантність:
X1 = 25 мм; Y1 = 20 мм — для N від 1 до 15
Y1 = 20 мм; Y1 = 30 мм — для N від 16 до 30

X2 = 110 мм; Y2 = 75 мм — для N від 1 до 15

Y2 = 130 мм; Y2 = 90 мм — для N від 16 до 30

X3 = 240 мм; Y3 = 150 мм + N мм — для N від 1 до 15
Y3 = 250 мм; Y3 = 140 мм – N мм — для N від 16 до 30

Варіанти:

1. | X: 50.3 | 119.8 | 242.1 | Y: 31.2 | 91.4 | 141.6 |
2. | X: 29.6 | 132.1 | 269.4 | Y: 42.5 | 92.3 | 122.3 |
3. | X: 23.8 | 133.3 | 263.7 | Y: 46.8 | 92.2 | 114.9 |
4. | X: 24.7 | 134.4 | 268.8 | Y: 45.9 | 92.7 | 113.8 |
5. | X: 29.5 | 145.5 | 257.2 | Y: 42.3 | 94.5 | 112.2 |
6. | X: 25.1 | 121.7 | 249.3 | Y: 20.7 | 88.8 | 115.7 |
7. | X: 27.2 | 137.1 | 267.4 | Y: 47.5 | 97.3 | 117.3 |

3. Модель: $y = k \cdot x + b$, тут невідомими є k і b.

4. Складаємо рівняння поправок у чисельному вигляді:

$$v_i = k \cdot x_i + b - y_i$$

або

$$\begin{cases} v_1 = k \cdot 1.0 + b - 2.7 \\ v_2 = k \cdot 2.5 + b - 2.9 \\ v_3 = k \cdot 5.0 + b - 6.3. \end{cases}$$

5. Складаємо рівняння поправок у матрично-векторному вигляді:

$$v = A \cdot z - l.$$

6. Складаємо нормальні рівняння у загальному вигляді:

$$\begin{cases} [aa] \cdot k + [ab] \cdot b = [al] \\ [ab] \cdot k + [bb] \cdot b = [bl] \end{cases}$$

7. Складаємо нормальні рівняння у матрично-векторному вигляді:

8. Складаємо нормальні рівняння у числовому вигляді:

$$\begin{cases} 32.25 \cdot k + 8.5 \cdot b = 41.45 \\ 8.5 \cdot k + 3.0 \cdot b = 11.90. \end{cases}$$

9. Розв'язання задачі МНК у середовищі MatLab (FreeMat). Зразок складання рівнянь поправок, складання нормальних рівнянь MatLab.
Відповідний М-файл:

```
clc % - очистити командне вікно, Зіборов
clear % - видалити змінні робочого простору
% Workspace попередніх стартів
```

```
% v1 = k * 5.2 + b - 8.2
% v2 = k * 14.7 + b - 23.3
% v3 = k * 29.9 + b - 45.6
% Матриця рівнянь поправок:
A = [ 5.2 1;
     14.7 1;
     29.9 1; ]
l = [8.2 23.3 45.6]'
% Матриця нормальних рівнянь:
N = A' * A
d=det(N) % - визначник матриці
L = A' * l
x = inv (N) * L; % inv – взяти зворотну матрицю
k = x(1)
b = x(2)
% Перевірка:
p = polyfit ( ...% - продовження слідує
[5.2 14.7 29.9], ...
[8.2 23.3 45.6], 1)
```

10. Обчислюємо поправки v_i та виконуємо контроль обчислень, тобто знаходимо $\sum v_i$ та $\sum(v_i \cdot X_i)$.

Найважливіший контроль: $\Phi_1 = \sum(v_i \cdot v_i)$ та $\Phi_2 = \sum(v_i \cdot l_i)$.

11. Оцінка точності

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}}.$$

12. Перше наближене рішення. Переписуємо рівняння поправок у чисельному вигляді, але замість поправок пишемо нуль:

$$k \cdot x_i + b - y_i = 0.$$

13. Складаємо перші два рівняння, а третє просто переписуємо:

$$\begin{cases} k \cdot (x_1 + x_2) + 2 \cdot b - (y_1 + y_2) = 0 \\ k \cdot x_3 + b - y_3 = 0. \end{cases}$$

14. Вирішуємо отриману систему.
Тут контроль рішення: $v_1 + v_2 = 0$ та $v_3 = 0$.

15. Обчислюємо нові поправки, знаходимо $\sum v_i$ та $\Phi_2 \ = \sum(v_i \cdot v_i)$.
16. Оцінка точності:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}}.$$

17. Порівняння з МНК.

18. Друге наближене рішення. З'єднуємо 1-у та 3-ю точки прямої.

19. Знаходимо k і b через рівняння прямої, проведеної через дві точки.

20. Обчислюємо нові поправки, знаходимо $\sum v_i$ та $\Phi_2 \ = \sum(v_i \cdot v_i)$.

21. Оцінка точності.

22. Таблиця порівняння

МНК	**k = ...**	**b = ...**	**Ф1 = ...**
Перше наближене рішення	**k = ...**	**b = ...**	**Ф2 = ...**
Друге наближене рішення	**k = ...**	**b = ...**	**Ф3 = ...**

23. Висновок.

ЗАВДАННЯ 2. ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ ЗА СПОСОБОМ ГЕЛЬМЕРТА

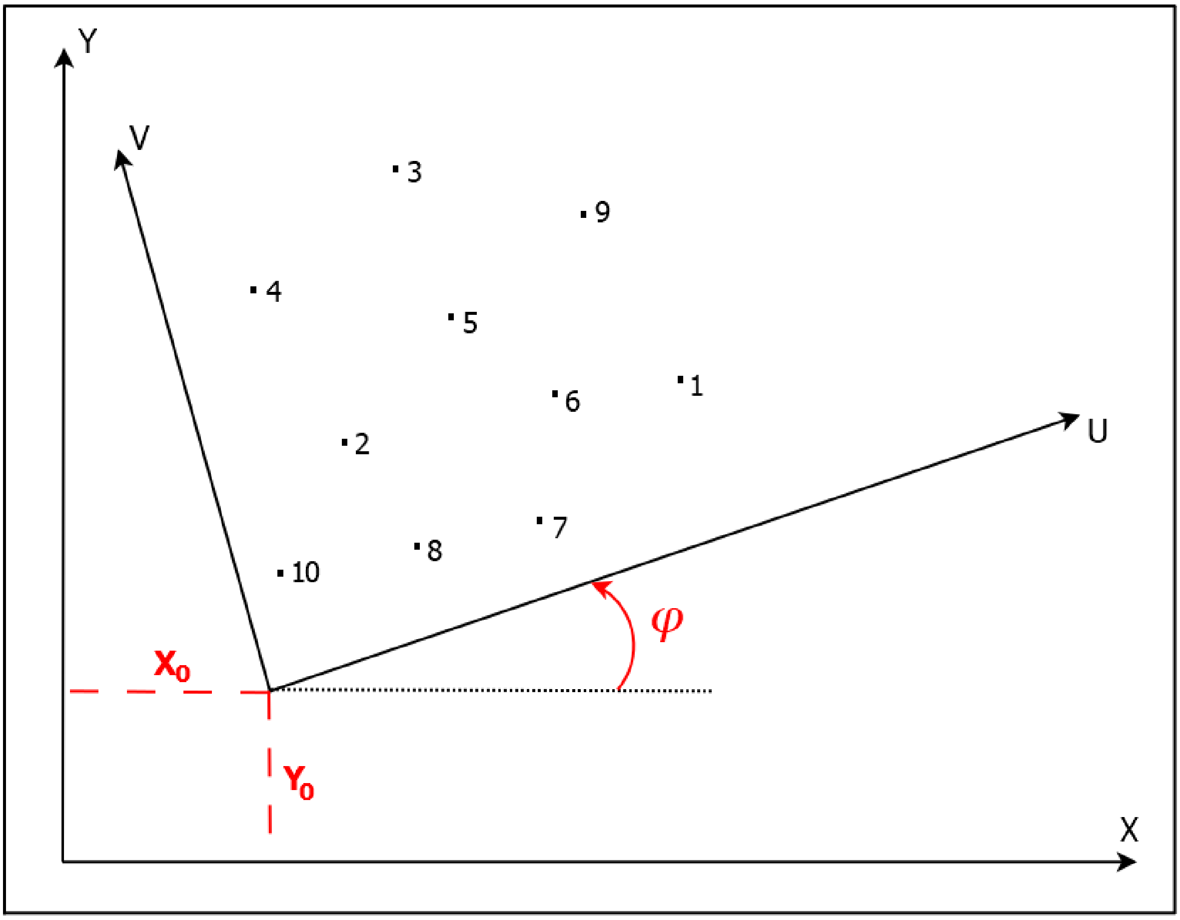
Щоб виконати це завдання, слід законспектувати лекцію: https://youtu.be/8yEgak4Dhg0

Виконання цього завдання продемонстровано на цьому відео: https://youtu.be/AqE7zblKkNQ

Інші відео автора: https://www.youtube.com/channel/UCFZglBgYat1GGPMCPQ4XbJQ?sub_confirmation=1

1. Зняти координати X, Y і U і V 10 точок. Заповнити таблицю 1:

Nточки	X	Y	U	V



2. Знайдемо зв'язок між системою UV та системою XY. Для цього використовуємо допоміжну полярну систему координат.

Для системи UV запишемо її зв'язок із полярною системою координат:

$$U = R \cdot cos\alpha; \qquad (1)$$

$$V = R \cdot sin\alpha. \qquad (2)$$

Якщо початок координат системи XY збігається з початком координат системи UV, а осі X і Y повернуті на кут ϕ, то зв'язок X, Y з полярною системою координат буде такою:

$$X = R \cdot \cos(\alpha + \phi) = R \cdot \cos\alpha \cdot \cos\phi - R \cdot sin\alpha \cdot sin\phi;$$

$$Y = R \cdot sin\,(\alpha + \phi) = R \cdot \sin\alpha \cdot \cos\phi + R \cdot \cos\alpha \cdot sin\phi.$$

Враховуючи формули (1) та (2), отримаємо:

$$X = U \cdot cos\phi - V \cdot sin\phi$$

$$Y = V \cdot cos\phi + U \cdot sin\phi.$$

Тепер паралельно перенесемо початок координат на Xo та Yo:

$$X = Xo + U \cdot cos\phi - V \cdot sin\phi$$

$$Y = Yo + V \cdot cos\phi + U \cdot sin\phi.$$

Врахуємо також, що системи можуть відрізнятись на масштаб s (від слова scale-масштаб [англ.]) :

$$X = Xo + U \cdot s \cdot cos\phi - V \cdot s \cdot sin\phi$$

$$Y = Yo + V \cdot s \cdot cos\phi + U \cdot s \cdot sin\phi.$$

Таким чином, ми отримали, так звані, рівняння перетворення.
У цих рівняннях невідомими є чотири параметри: Xo, Yo, s та ϕ.
Вважаючи U та V фіксованими, знайдемо такі Xo, Yo, s та ϕ, щоб забезпечити $\sum(vx^2 + vy^2) = min$.
Тут vx та vy — поправки до виміряних X та Y.

3. Отже, у нашому завданні невідомими є Xo, Yo, ϕ і s, між ними маємо нелінійний зв'язок. Щоб знайти ці невідомі параметри потрібно позбутися нелінійності. Для цього робимо заміну змінних:

$$A = s \cdot cos\,\phi, \; B = s \cdot sin\,\phi.$$

Тоді :

$$X = Xo + U \cdot A - V \cdot B$$
$$Y = Yo + V \cdot A + U \cdot B.$$

З цієї заміни видно, що

$$A^2 + B^2 = (s \cdot cos\,\phi\,)^2 + (s \cdot sin\,\phi\,)^2$$
$$s^2 = A^2 + B^2 \qquad (3)$$

4. Складаємо рівняння поправок: «модель мінус реальність»:

$$\begin{cases} vxi = Xo + Ui \cdot A - Vi \cdot B - Xi \\ vyi = Yo + Vi \cdot A + Ui \cdot B - Yi \end{cases}$$

5. Умова МНК: $\Phi = \sum vxi^2 + \sum vyi^2 = min$ або

$$\sum(Xo + Ui \cdot A - Vi \cdot B - Xi)^2 + \sum(Yo + Vi \cdot A + Ui \cdot B - Yi)^2 = min$$

Ця умова завдає 4 нормальних рівняння:

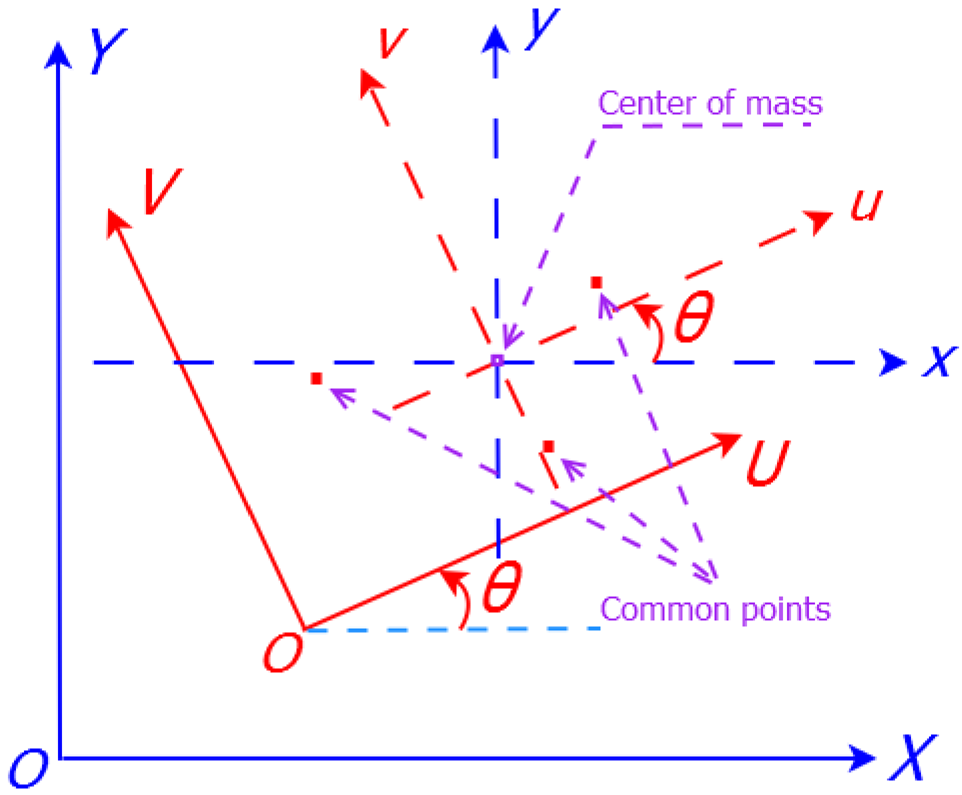
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial Xo} = \sum(Xo + A \cdot Ui - B \cdot Vi - Xi) = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial Yo} = \sum(Yo + A \cdot Vi + B \cdot Ui - Yi) = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial A} = \sum(Xo + A \cdot Ui - B \cdot Vi - Xi) \cdot Ui + \sum(Yo + Vi \cdot A + Ui \cdot B - Yi) \cdot Vi = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial B} = \sum(Xo + A \cdot Ui - B \cdot Vi - Xi) \cdot (-Vi) + \sum(Yo + Vi \cdot A + Ui \cdot B - Yi) \cdot Ui = 0. \end{cases}$$

Ці нормальні рівняння запишемо у, так званому, згорнутому вигляді:

$\sum vxi = 0, \sum vyi = 0, \sum vxi \cdot Ui + \sum vyi \cdot Vi = 0, -\sum vxi \cdot Vi + \sum vyi \cdot Ui = 0.$

Рівняння у згорнутому вигляді використовуємо контролю рішення.

6. Щоб зменшити кількість нормальних рівнянь, перенесемо початки обох систем координат у точку центру тяжкості:



Координати точки центром ваги є середні значення: Xcp, Ycp, Ucp і Vcp. Рівняння перетворення для центру важкості:

$$Xcp = Xo + Ucp \cdot A - Vcp \cdot B, \quad (4)$$
$$Ycp = Yo + Vcp \cdot A + Ucp \cdot B. \quad (5)$$

Якщо ми зуміємо обчислити A і B, то за цими двома формулами зможемо обчислити Xo та Yo.

7. Обчислюємо каталог центрованих координат:

Nточки	x	y	u	v

При обчисленні центрованих координат використовуємо Matlab (Freemat). Відповідний фрагмент М-файлу матиме вигляд:

```
clc, clear % - очищення вікна команд Command Window та очищення змінних;
% Каталог координат:
X = [167.5 217.5 182.5 210 240 162.5 191.2 211.2 240 160 ]';
Y =[437.5 437.5 413.8 410 415 387.5 372.5 390 388.8 357.5]';
U = [ 13.8 62.5 35.0 62.5 90 21.2 52.5 67.5 96.5 26.2 ]';
V = [120.0 131.2 100 101.2 113.8 68.8 61.2 82.5 88.8 40 ] ';
format long % - збільшуємо число десяткових знаків

% Каталог центрованих координат: (крапку з комою ставлять, щоб обчислені значення не візуалізувалися у вікні команд)

x = X - mean (X), y = Y - mean (Y), u = U - mean ( U), v = V - mean (V)
% кома дозволяє розмістити на одному рядку кілька команд

% Для контролю шукаємо суми центрованих координат:
SumXc = sum(x); , SumYc = sum (y); SumUc = sum (u); SumVc = sum (v);
```

Щоб у Matlab збільшити кількість знаків після коми, введіть команду: format long

8. Складаємо редуковані рівняння поправок:

$$\begin{cases} vxi = ui \cdot A - vi \cdot B - xi \\ vyi = vi \cdot A + ui \cdot B - yi \end{cases}.$$

9. Складаємо нормальні рівняння: /самостійно/

$$\begin{cases} [u \cdot u + v \cdot v] \cdot A + [u \cdot v - u \cdot v] \cdot B + [-u \cdot x - v \cdot y] = 0 \\ [v \cdot u - u \cdot v] \cdot A + [u \cdot u + v \cdot v] \cdot B + [v \cdot x - u \cdot y] = 0 \end{cases}.$$

10. Таким чином:

$A = +[u \cdot x + v \cdot y] / [u \cdot u + v \cdot v]$ = напишіть сюди

$B = -[v \cdot x - u \cdot y] / [u \cdot u + v \cdot v]$ = свої обчислення.

Як видно, початкова система із чотирьох нормальних рівнянь розпалися на 4 незалежні рівняння.

Суму добудків у Matlab, наприклад [u·x], можна знаходити помножуючи транспонований вектор u' на вихідний x, тобто: u'*x.
Або скориставшись скалярним твором dot(u, x), або sum(u.*x), або просто u'*x. Вираз u.*x означає поелементне множення векторів.

Щоб обчислити суму квадратів у Matlab, наприклад [u·u], слід також використовувати або скалярне твір dot(u, u), або sum(u.*u), або просто u'*u. Або обчислюючи довжину (евклідову норму) вектора norm(u).

Евклідова норма вектора це корінь квадратний із суми квадратів елементів цього вектора, тобто [uu] = norm(u)^2.

11. Тепер знаходимо всі поправки vx і vy:

$$\begin{cases} vxi = u \cdot A - v \cdot B - x; \\ vyi = v \cdot A + u \cdot B - y. \end{cases}$$

12. Далі слід виконати контроль, використовуючи нормальні рівняння, записані у згорнутому вигляді:

```
% S1 = sum (vxi) = 0, S2 = sum (vyi) = 0,
% S3 = sum (vxi · Ui) + sum (vyi · Vi) = 0,
% S4 = - sum (vxi · Vi) + sum (vyi · Ui) = 0.
S1 = sum(vxi)
S2 = sum(vyi)
S3 = vxi'*U + vyi'*V
S4 =-vxi'*V + vyi'*U
```

Тобто, це перевірка вирішення всіх чотирьох нормальних рівнянь.
Тим більше, повний контроль забезпечують такі дві суми:

$$\Phi 1 = \sum(vxi \cdot vxi + vyi \cdot vyi) \text{ та } \Phi 2 = \sum(vxi \cdot xi + vyi \cdot yi).$$

13. Тепер знаходимо параметри перетворення: Xo, Yo, ϕ, s, використовуючи
формули (3), (4), (5), а ϕ обчислюємо таким чином:

```
    fi = atan2(B, A);
    fi = rad2deg(fi);
```

14. Оцінка точності:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum vx^2 + \sum vy^2}{2n - 4}}.$$

15. Здійснити оцінку параметрів перетворення за допомогою системи «Топоград». Ключ переходу від U і V до X та Y:

16. Порівняти результати своїх обчислень із обчисленнями системи Topograd, порівняння виконати у таблиці:

```
-------------------------------------------------------------
|    Мої обчислення:           |   Topograd:                |
|------------------------------|----------------------------|
|    Xo =                      |    Xo =                    |
|    Yo =                      |    Yo =                    |
|     φ =                      |     φ =                    |
|     m =                      |     m =                    |
|     A =                      |     A =                    |
|     B =                      |     B =                    |
|     ∑vxi² =                  |     ∑vxi² =                |
|     ∑vyi² =                  |     ∑vyi² =                |
|     μ =                      |     μ =                    |
-------------------------------------------------------------
```

Примітка 1. Видалити всі списки відбракованих точок.
точки – Ctrl + Y.

Примітка 2. При видаленні списку відбракованих точок у цей список можна внести невидимий символ, його слід видалити.

Примітка 3. На питання системи Topograd — чи записувати точки в базу даних, необхідно відповісти: "Ні".

Примітка 4. Проконтролювати свої обчислення слід за допомогою програми convert.exe, яку можна завантажити на адресу:
www.latino.ho.ua/convert.exe www.latino.ho.ua/convert1.txt
Див Преобра коорд Гельмерта в англ. Вікіпедії (у рос. — ні):
https://en.wikipedia.org/wiki/Helmert_transformation

ЗАВДАННЯ 3. АФІННЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ

Щоб виконати це завдання, слід законспектувати лекцію: https://youtu.be/5Mf0FkU4euI

Виконання цього завдання продемонстровано на цьому відео: https://youtu.be/r7xt25zZp2M

Інші відео автора: https://www.youtube.com/channel/UCFZglBgYat1GGPMCPQ4XbJQ?sub_confirmation=1

Зауважимо, що перетворення *Гельмерта* враховує лише один масштаб. У фотограмметрії враховують масштабування вздовж обох координатних осей, тому тут використовують афінне перетворення (*affine transformation*). Це ж стосується сканування паперових планів та карт у геоінформатиці для *обліку деформації паперу*.

Звіт має містити такі пункти:

1. Рівняння перетворення:

$$X = Xo + A1 \cdot U + A2 \cdot V$$
$$Y = Yo + B1 \cdot U + B2 \cdot V.$$

Рішення полягає в тому, щоб знайти коефіцієнти Xo, Yo, Ai та Bi.
При обчисленні Ai та Bi – кількість знаків після коми – 8.
Ці рівняння є дві афінні площини.
Оскільки невідомі коефіцієнти у першому рівнянні не пов'язані з другим рівнянням, їх можна знайти незалежно від другого рівняння.
Тобто завдання розпадається на дві задачі. Спочатку знаходимо невідомі коефіцієнти, що входять до першого рівняння.

2. Складаємо рівняння поправок (їх кількість – 10) для абсцис:

а. Загалом:

$$V(x)i = Xo + A1 \cdot Ui + A2 \cdot Vi - Xi.$$

б . У числовому вигляді:

Тут студент пише свої 10 рівнянь.

3. Умова $\Phi = \sum V^2 = min$ доставляє 3 норм рівнянь:

$$\partial\Phi/\partial Xo = \sum(Xo + A1 \cdot Ui + A2 \cdot Vi - Xi) = 0$$
$$\partial\Phi/\partial A1 = \sum(Xo + A1 \cdot Ui + A2 \cdot Vi - Xi) \cdot Ui = 0$$
$$\partial\Phi/\partial A2 = \sum(Xo + A1 \cdot Ui + A2 \cdot Vi - Xi) \cdot Vi = 0.$$

Нормальні рівняння у згорнутому вигляді:

$$\sum v = 0, \ \sum vU = 0, \ \sum vV = 0.$$

Рівняння у згорнутому вигляді використовуємо контролю рішення.

4. Перше нормальне рівняння розділимо на n:

$$Xo + A1 \cdot Ucp + A2 \cdot Vcp = Xcp. \tag{1}$$

З цього рівняння, коли матимемо $A1$ та $A2$, ми зможемо обчислити Xo.

5. Тепер перепишемо останні два нормальні рівняння, але для центрованих координат:

$$\sum(Xo + A1 \cdot ui + A2 \cdot vi - xi) \cdot ui = 0$$
$$\sum(Xo + A1 \cdot ui + A2 \cdot vi - xi) \cdot vi = 0$$

або

$$Xo \cdot \sum ui + A1 \cdot \sum ui \cdot ui + A2 \cdot \sum vi \cdot ui = \sum xi \cdot ui$$
$$Xo \cdot \sum vi + A1 \cdot \sum ui \cdot vi + A2 \cdot \sum vi \cdot vi = \sum xi \cdot vi$$

Оскільки ∑ui = 0 і ∑vi = 0, то невідоме Xo виключається із системи. Т. о ., ми отримаємо ті ж два рівняння, але вже з двома невідомими A1 та A2:

$$A1 \cdot \sum ui \cdot ui + A2 \cdot \sum vi \cdot ui = \sum xi \cdot ui$$
$$A1 \cdot \sum ui \cdot vi + A2 \cdot \sum vi \cdot vi = \sum xi \cdot vi$$

або

$$[\,uu\,] \cdot A1 + [uv\,] \cdot A2 = [xu]$$
$$[uv] \cdot A1 + [vv] \cdot A2 = [xv]$$

6. Напишемо останні рівняння у чисельному вигляді та наведемо їх вирішення (Значення невідомих).
A1 = ; A2 =

7. Перевірка рішення системи:

Список поправок

$$[v] = 0, [vU] = 0, [vV] = 0.$$

$$\Phi\ 2 = \sum v^2$$

Перевірка знайденого мінімуму: $\Phi = -\sum vl = \sum vv.$

8. Після знаходження A1 і A2 з останньої системи знаходимо Xo з формули (1):

$$Xo + A1 \cdot Ucp + A2 \cdot Vcp = Xcp.$$

9. Теж вважаємо для ординат: Складаємо рівняння поправок для ординат:

а. Загалом:

$$V(y)i = Yo + B1 \cdot Ui + B2 \cdot Vi - Yi.$$

б . У числовому вигляді:

Тут студент пише свої 10 рівнянь

10. Умова $\sum v^2 = min$ доставляє 3 норм уранення:

11. Перепишемо останні два рівняння для центрованих координат:

12. Напишемо останні рівняння у чисельному вигляді та наведемо їх розв'язання:

13. Перевірка рішення системи:

Список поправок
[v] = 0, [vU] = 0, [vV] = 0.
Φ 2 = $\sum v^2$
Перевірка знайденого мінімуму: $\Phi = \sum vl$.

13. Знайдемо Yo:

14. Разом ключ переходу від U,V до X,Y:

15. Оцінка точності:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum vx^2 + \sum vy^2}{2n-6}}.$$

16. Порівняння оцінок із перетворенням за Гельмертом:

```
|  Перетрорення по Гельмерту  |  Аффинне перетворенняние  |
|-----------------------------|---------------------------|
|     Xo=                     |  Xo=                      |
|      A=                     |  A1=                      |
|      B=                     |  A2=                      |
|     Yo=                     |  Yo=                      |
|      A=                     |  B1=                      |
|      B=                     |  B2=                      |
|      ∑vxi² =                |  ∑vxi² =                  |
|      ∑vyi² =                |  ∑vyi² =                  |
|      µ =                    |  µ =                      |
| Масштаб =                   |                           |
------------------------------------------------------------
```

ЗАВДАННЯ 4. БІЛІНІЙНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ

Виконання цього завдання продемонстровано на цьому відео: https://youtu.be/aO9jMAQJ7Hg

Звіт має містити такі пункти:

1. Рівняння перетворення:

$$X = Ao + A1 \cdot U + A2 \cdot V + A3 \cdot U \cdot V$$
$$Y = Bo + B1 \cdot U + B2 \cdot V + B3 \cdot U \cdot V.$$

Рішення полягає в тому, щоб знайти коефіцієнти Ai і Bi. При обчисленні Ai та Bi — кількість знаків після коми — 8.

2. Складаємо рівняння поправок (їх кількість — 10) для абсцис:

а. У загалом вигляді :

$$V(x)i = Ao + A1 \cdot Ui + A2 \cdot Vi + A3 \cdot Ui \cdot Vi - Xi$$

б . У числовому вигляді:

Тут студент пише свої 10 рівнянь

Рішення в MatLab:

```
% Рівняння поправок: vxi = Ao + A1 * Ui + A2 * Vi + A3 *
Ui * Vi - Xi
ed = ones (10,1)% - 10 поверхів, один під'їзд;
```

```
% .* - поелементне множення матриць:
W = U.*V
Напишіть:
% Матрицю рівнянь поправок
% Вектор вільних членів
```

3. Умова $\sum v^2 = min$ доставляє 4 нормальних рівнянь.

```
% Матриця нормальних рівнянь:
N = A'*A; alfa = det(N) % alfa <> 0 (не нуль)
```

4. Рішення системи

5. Перевірка рішення системи:

Список поправок:
[v] = 0, [vU] = 0, [vV] = 0, [vUV] = 0.
$\Phi 3 = \sum v^2$
Перевірка знайденого мінімуму: $\Phi = \sum vl$.

6. Теж вважаємо для ординат: Складаємо рівняння поправок для ординат:

а. Загалом:

$$V(y)i = Bo + B1 \cdot Ui + B2 \cdot Vi + B3 \cdot Ui \cdot Vi - Yi$$

б. У числовому вигляді:

Тут студент пише свої 10 рівнянь.

7. Умова $\sum v^2 = min$ доставляє 4 нормальних рівняннь:

8. Рішення системи.

9. Перевірка рішення системи:

Список поправок
[v] = 0, [vU] = 0, [vV] = 0, [vUV] = 0.
$\Phi 3 = \sum v^2$
Перевірка знайденого мінімуму: $\Phi = \sum vl$.

10. Разом ключ переходу від U, V до X, Y:

11. Оцінка точності:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum vx^2 + \sum vy^2}{2n - 8}}$$

12. Порівняння оцінок із перетворенням за Гельмертом:

```
-----------------------------------------------------------------
|  Перетворення по Гельмерту     |   Білінійне перетворення     |
|--------------------------------|------------------------------|
|     Xo=                        |  Ao=                         |
|      A=                        |  A1=                         |
|      B=                        |  A2=                         |
|     Yo=                        |  Bo=                         |
|      A=                        |  B1=                         |
|      B=                        |  B2=                         |
|      ∑vxi² =                   |  ∑vxi² =                     |
|      ∑vyi² =                   |  ∑vyi² =                     |
|      μ =                       |  μ =                         |
| Масштаб =                      |                              |
-----------------------------------------------------------------
```

15. Порівняння сум квадратів поправок: $Ф1 > Ф2 > Ф3$.

ЗАВДАННЯ 5. ПОРІВНЯННЯ СПОТВОРЕНЬ У ТРЬОХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ

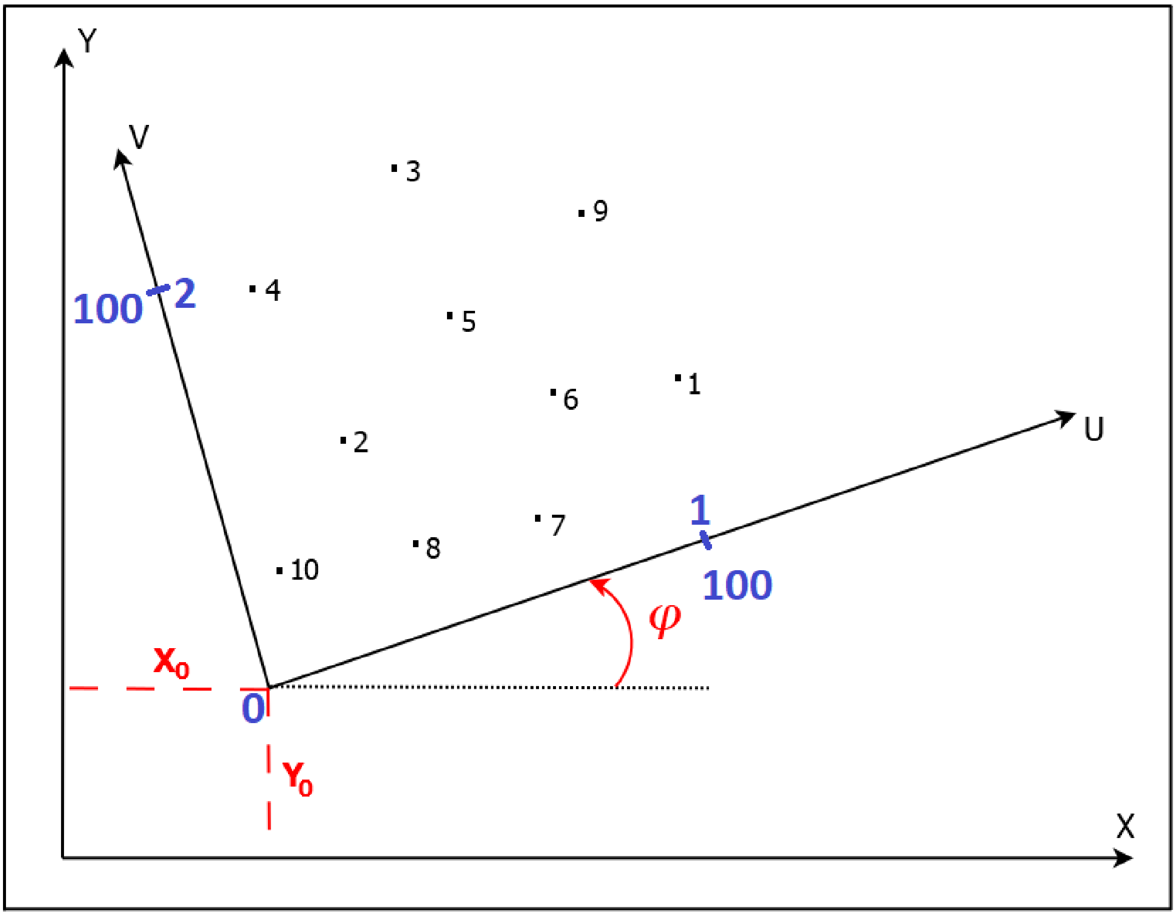
1. Перетворення координат за способом ГЕЛЬМЕРТА

Для обчислення спотворень з усіх трьох перетворень необхідно мати три точки, координати яких відомі в обох СК.

Такими точками зручно взяти:

Таблиця 1:

```
Xo = ... Yo = ... Uo = 0 Vo = 0
X1 = ... Y1 = ... U1 = 100 V1 = 0
X2 = ... Y2 = ... U2 = 0 V2 = 100
```



Таблиця 2:

D12-xoy	D12-uov	m	Sxoy	Suov	m^2	D01-xoy	D01-uov	AL-xoy	AL-uov

Заповніть ці дві таблиці. Під час заповнення слідуйте за такою схемою.

Накресліть на плані цей трикутник червоною кульковою ручкою та заповніть таблицю 1.

Координати Xo та Yo у цій таблиці відомі з розв'язання задачі, а координати 1 і 2 точок слід обчислити за ключом використовуючи A та B з обчислень студента.

Далі у таблиці 2 слід обчислити:

$D12_{xoy}$ — відстань між 1 та 2 точками в СК XOY;
$D12_{uov}$ — відстань між 1 та 2 точками в СК UOV.

Ці відстані обчислюйте за теоремою Піфагора.

$$m = D12_{xoy}/D12_{uov}.$$

Цей масштаб точно дорівнює масштабу, обчисленому вами у перетворенні за Гельмертом.

Потім необхідно обчислити:

Sxoy — площа трикутника 012 СК XOY;
Suov — площа трикутника 012 у СК UOV.

Площа трикутника зручно обчислити в MatLab через визначник (det):

$$S_{\text{трикут}} = 0.5 \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{Xo\ Yo\ 1} \\ \mathrm{X1\ Y1\ 1} \\ \mathrm{X2\ Y2\ 1} \end{vmatrix}.$$

Ми очікуємо, що спотворення довжин для перетворення за Гельмертом буде дорівнювати масштабу m, а спотворення площ буде = m^2.

Кут 012 у СК UOV дорівнює 45 град.
Кут 012 у СК XOY слід обчислити через площу трикутника та відстаней 10 та 12:

$$sin(\text{Кута}012) = 2 \cdot S/(D10 \cdot D12).$$

Відстань 1-2 відома з попередніх обчислень,
а відстань 1-0 слід обчислити.

Арксинус обчислити через функцію `ASIN()`.

Умова конформності для

$$x = f1(u, v)$$
$$y = f2(u, v)$$

або

$$X = Xo + U \cdot A - V \cdot B; => f1$$
$$Y = Yo + U \cdot B + V \cdot A; => f2$$

$$\partial X/\partial U = +\partial Y/\partial V; => A = A$$
$$\partial X/\partial V = -\partial Y/\partial U; => -B = -B$$

або :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{U}} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{V}} \\ \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{V}} & -\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{U}} \end{vmatrix} = 0.$$

2. Білінійне перетворення координат.

Тут також слід заповнити таблиці 1 та 2.
Формули аналогічні.

3. Афінне перетворення.

Тут також слід заповнити таблиці 1 і 2.

4. Порівняння спотворень:

Перетворення	Спотворення:				
	Довжин	Площ	Углов	Прямих ліній	Паралельн.прямих
За Гельмерта					
Білінійне					
Афінне					

Цю таблицю слід заповнювати словами Є, Ні.

Запитання:

1. У чому полягає умова задачі ?
2. Скільки параметрів перетворення в задачі за Гельмертом ?
3. Чи є лінійний зв'язок між цими параметрами ?
4. Як призвели до лінійного зв'язку між параметрами ?
5. Чому є деякі відмінності у знайдених параметрах при вирішенні задачі через Topograd і вручну ?
6. Скільки параметрів перетворення у білінійному перетворенні ?
7. Чому сума квад поправок у білінійному перетворенні менша ?
8. Як звести цю суму до нуля ?

ЗАВДАННЯ 6. ПОБУДУВА ЦМР МЕТОДОМ ТРІАНГУЛЮВАННЯ ДАНИХ

Першу частину цієї задачі зручно вирішувати, використовуючи відео: https://youtu.be/eC4O0bQExX0

А відео для другої частини тут:
https://youtu.be/4JTbkFck5Pk

Відео для третьої частини тут:
https://youtu.be/QH5eUv7f11k

Інші відео автора:
https://www.youtube.com/channel/UCFZglBgYat1GGPMCPQ4XbJQ?sub_confirmation=1

Завантажити GNU Octave можна за цим посиланням:
https://www.gnu.org/software/octave/download.html

Для вирішення цього завдання потрібний пакет **wxMaxima**.
Завантажити його можна тут:
https://sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-Windows/5.44.0-Windows/

1. На аркуші формату А4 намалювати олівцем: студентам із парними номерами за списком – тальвег, а студентам з непарними номерами – вододіл. Рельєф займає повністю аркуш формату А4 у вигляді шести горизонталей із перерізом рельєфу 1 метр.

2. Тальвег або вододіл орієнтований на північний схід — у студентів, чиї номери залікових книжок є парними, та на південний схід, якщо номер залікової книжки – непарний.

3. Відмітка наймолодшої горизонталі чисельно дорівнює номеру першої літери прізвища студента в алфавітному порядку. Наприклад, перша літера на прізвище Молодцов — "М", її номер в алфавіті — 12. Значить молодша горизонталь має позначку 12 м.

4. Після викреслення горизонталей уявити, що студент бачить стереомодель рельєфу та набирає пікети у характерних місцях рельєфу. Слід вибрати три пікети вздовж лінії тальвегу (вододілу) та чотири пікети по краях креслення. На підставі вибраних пікетів можна намалювати дані горизонталі. Усього – 7 пікетів. Кожен пікет підписати чисельник/знаменник = номер пікету/позначка пікету, наприклад, 5/12.38.

5. Червоною кульковою ручкою показати пунктиром орографічну лінію.

6. Накреслити систему координат, масштаб – 1:1000. Провести лінії сітки зеленою кульковою ручкою через кожні 5 см. Координати початку координат взяти з курсової роботи

7. Для кожного пікету зняти його координати X та Y та заповнити таблицю "Каталог координат": номер точки, X, Y, H.

8. Для побудови ЦМР необхідно об'єднати ці пікети у трикутники методом Делоне. Тобто студент має моделювати поведінка програми, що реалізує алгоритм Делоне .

9. Тобто:
1. Вибрати найпівденніший пікет.
2. Вибрати найближчий пікет — дані два пікети утворюють першу сторону тріангуляції Делоне.
3. Подивитися з кожного з пікетів, що залишилися, на першу сторону і вибрати той пікет, з якого перша сторона видно під максимальним кутом. Це і є третя вершина першого трикутника!
4. Від кожної сторони першого трикутника знайти третю точку та і т.д.
Кількість трикутників дорівнює:

$$\text{Кількість пикетов} - 2 + \text{у внутрішніх точок}$$

10. Трикутники слід креслити тонким олівцем. Трикутники слід пронумерувати в порядку їх отримання алгоритмом Делоне.

11. Використовуючи систему MatLab (GNU Octave) виконати тріангуляцію Делоне. Для цього створити М-файл. Нижче наводимо зразковий вміст М-файлу:

```
% Щоб очистити командне вікно: команда clc.
% Очистити Workspace зручно через контекстне меню (правий клік).
hold on;
% Показати лінії сітки:
grid on;
% Встановлюємо масштаби для осей X та Y:
axis([0 7 1 8]); % тобто 0 <= X <= 7, а 1 <= Y <= 8
% Підпис осей:
% \it - нахиляє підпис осей:
xlabel( '\it Ось X'); ylabel('\it Ось Y');
% axes('XLim',[0 6.5], 'YLim',[0 5.5])
title('Тріангуляцію Делоне побудував студент Зіборов');
% Каталог координат:
x = [2 1 3 6 5 ] ;
```

```
y = [2 5 7 5 2 ] ;
% Функція delaunay повертає тріангуляцію у вигляді рядків,
% в яких міститься перелік точок кожного трикутника:
t = delaunay (x, y)
% Точка з комою скасовує виведення даних у командне вікно.
% Малюю тріангуляцію:
triplot(t, x, y)
% Хочу намалювати ще й кружечки, тому hold on (за замовчуванням –
hold off)
% hold on; % до намальованого додам ще й кружечки:
plot(x, y, 'or'); % o – означає намалювати гурток, r = red – колір
% hold off
% Далі слід вручну підписати номер кожної точки на Figure: від 1
% до 7 користуючись засобом "A" Insert Text
% Матрицю t студент повинен роздрукувати та пояснити її структуру
```

12. Креслененя, виконане у MatLab, слід роздрукувати та додати зі звіту з цієї роботи.

13. Трикутники не повинні перетинати структурні (орографічні) лінії, тому всі трикутники слід переглянути і якщо необхідно, то перепризначити сторони тріангуляції. Цей процес в геоінформатиці називають «фліп граней» [flip = англ = перекидати].

Остаточну тріангуляцію слід показати чорною кульковою ручкою. При цьому і тріангуляція Делоне та виправлена тріангуляція має бути видно на кресленні.

14. Для кожного трикутника знайти коефіцієнти для лінійної моделі

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Ao} + \boldsymbol{A1}\cdot\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A2}\cdot\boldsymbol{Y}.$$

Для цього у кожному трикутнику складаємо систему трьох рівнянь. У звіті оформлюємо рішення таким чином:

Перший трикутник:

Наприклад, цей трикутник поєднує 6-у, 7-у і 1-ю точки, значить матимемо таку систему:

$$\begin{aligned} Ao + A1\cdot X6 + A2\cdot Y6 &= H6 \\ Ao + A1\cdot X7 + A2\cdot Y7 &= H7 \\ Ao + A1\cdot X1 + A2\cdot Y1 &= H1. \end{aligned}$$

У чисельному вигляді ця система матиме вигляд:

$$Ao + A1 \cdot 23.6 + A2 \cdot 56.4 = 13.46$$
$$Ao + A1 \cdot 13.4 + A2 \cdot 57.2 = 15.48$$
$$Ao + A1 \cdot 52.9 + A2 \cdot 12.3 = 11.23.$$

Рішення системи: $Ao = \ldots;\ A1 = \ldots;\ A2 = \ldots$

Зразок розв'язання цієї системи рівнянь у MatLab за допомогою М-файлу :

```
% Ao + A1 * 23.6 + A2 * 56.4 = 13.46
% Ao + A1 * 13.4 + A2 * 57.2 = 15.48
% Ao + A1 * 52.9 + A2 * 12.3 = 11.23
% Відповідь :
% Ao = 23.112068
% A1 = -0.20474225
% A2 = 0.08546367
% N * x = L
N = [ 1 23.6 56.4;
1 13.4 57.2;
1 52.9 12.3 ]
L = [ 13.46; 15.48; 11.23 ]
x = inv(N) * L % inv - взяти зворотну матрицю
```

Тепер дивимося на креслення: які вузли сітки 5 см х 5 см належать першому трикутнику ? Для цих вузлів знаходимо позначки за формулою:

$$H(X,Y) = Ao + A1 \cdot X + A2 \cdot Y.$$

Обчислення позначок вузлів наводимо тут.

Другий трикутник:

Виконуємо також обчислення, що і для першого.
І т.д. для кожного трикутника.

15. Далі позначки у вузлах регулярної сітки 5 см х 5 см записуємо в таблицю "Позначки вузлів":

|X вузла|Y вузла| Номер трикутника | Нпл | Нгор | V = Нпл-Нгор |

Нпл — це відмітка вузла, отримана за формулою площини.
Нгор — це позначка вузла, отримана по горизонталі.

Потім підписуємо кожен вузол на плані — чисельник/знаменник.
Тут чисельник: обчислена позначка вузла, знаменник – позначка вузла, отримана по горизонталі.

16. Порівняння обчисленої позначки кожного вузла з позначкою, отриманої інтерполювання по горизонталі, зробимо за середньою квадратичною помилкою:

Середня квадратична помилка μ:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}},$$

де n — у вузлів. Зробіть висновок.

17. У кожному трикутнику обчислити положення горизонталей, які визначаємо як перетин площини трикутника та площини рівня горизонталі. Тобто рівняння горизонталі на площині, наприклад, трикутника 1–3–5 складається з рівняння площини трикутника 1–2–3:

$$H(X,Y) = 18.437 + 0.01234 \cdot X - 0.00362 \cdot Y$$

та рівняння площини рівненої поверхні:

$$H(X,Y) = 22.$$

Тобто рівня 22-ої горизонталі.
Таким чином, рівняння 22-ої горизонталі на площині трикутника 1-3-5 матиме вигляд:

$$18.437 + 0.01234 \cdot X - 0.00362 \cdot Y = 22, \qquad (1)$$

а рівняння 23-ї горизонталі на площині трикутника 1-3-5 матиме такий вигляд:

$$18.437 + 0.01234 \cdot X - 0.00362 \cdot Y = 23.$$

Тепер визначимо точку перетину 22-ої горизонталі та сторони трикутника 1-3. Координати точки 1: $x = 18.6, y = 52.4$;
координати точки 3: $x = 33.5$; $y = 81.7$. Звідси рівняння прямий 1 — 3 має вигляд:

$$(X - X1) / (Y - Y1) = (X3 - X1) / (Y3 - Y1)$$

або

$$(X - 18.6) \cdot (81.7 - 52.4) = (Y - 52.4) \cdot (33.5 - 18.6)$$

або

$$(X - 18.6) \cdot 29.3 = (Y - 52.4) \cdot 14.9$$

або

$$29.3 \cdot X - 18.6 \cdot 29.3 = 14.9 \cdot Y - 52.4 \cdot 14.9$$

або

$$29.3 \cdot X - 14.9 \cdot Y = 18.6 \cdot 29.3 - 52.4 \cdot 14.9.$$

Останнє рівняння вирішуємо спільно з рівнянням 22-ї горизонталі, наприклад, в Eureka, і отримуємо координати перетину 22-ої горизонталі зі стороною трикутника 1—3.

Таким чином знаходимо перетин усіх горизонталей со сторонами всіх трикутників і з'єднуємо відповідні перетину червоною кульковою ручкою (тобто проводимо горизонталі).

18. Провести горизонталі у трикутниках під лінійку червоною кульковою ручкою користуючись формулою площини, що проходить через цей трикутник.

19. Отже, що має бути плані ?

1. Горизонталі у олівці.
2. Пікет — чисельник/знаменник — в олівці.
3. Система координат XY із підписаними через 1 см координатами – чорною кульковою ручкою, між осями – 90 град.
4. Орографічна лінія – пунктиром – червона кулькова ручки.
5. Нумерація трикутників.
6. Лінії сітки – чисельник знаменник — дві позначки — Зелена кулькова ручка.
7. Червоні горизонталі у трикутниках.

20. У звіті має бути в такому порядку:

1. Постановка задачі та варіантність.
2. Таблиця каталог координат пікетів.
3. Описати весь процес тріангуляції Делоне із зазначенням номерів точок та номерів трикутників.
4. Роздрукування програми на MatLab та креслення з Matlab
5. Написати, чи перетнули трикутники Делоне орографічну лінію, і якщо так, то як ви зробили фліп граней.
6. Для кожного трикутника написати систему рівнянь у чисельному вигляді , а поряд значення невідомих Ao, A1, A2. Тут для кожного трикутника написати рівняння площини у чисельному вигляді.
7. Таблиця "Позначки вузлів".
8. Оцінка точності побудованої ЦМР.

9. Розрахунок положення горизонталей – для двох трикутників.
10. Висновок

21. Запитання:

1. У чому полягає завдання ?
2. Що таке ЦМР ?
3. Розкажіть, у чому полягає алгоритм Делоне ?
4. Чи створюється ЦМР методом тріанг даних у автоматичному режимі?
Яка роль оператора ГІС у процесі побудови ЦМР ?
5. Чому трикутники не повинні перетинати структурні лінії рельєфу ?
6. Чому горизонталі в межах кожного трикутника є відрізками прямих ?
7. Який сенс у коефіцієнтів Ао, А1, А3 ?

ЗАВДАННЯ 7. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОСІДАННЯ СПОРУДИ

Збудували будівлю. Перший рік спостережень за осіданням будівлі показав значення опади h1, другий — h2, третій — h3, четвертий — h4.

По варинтах:

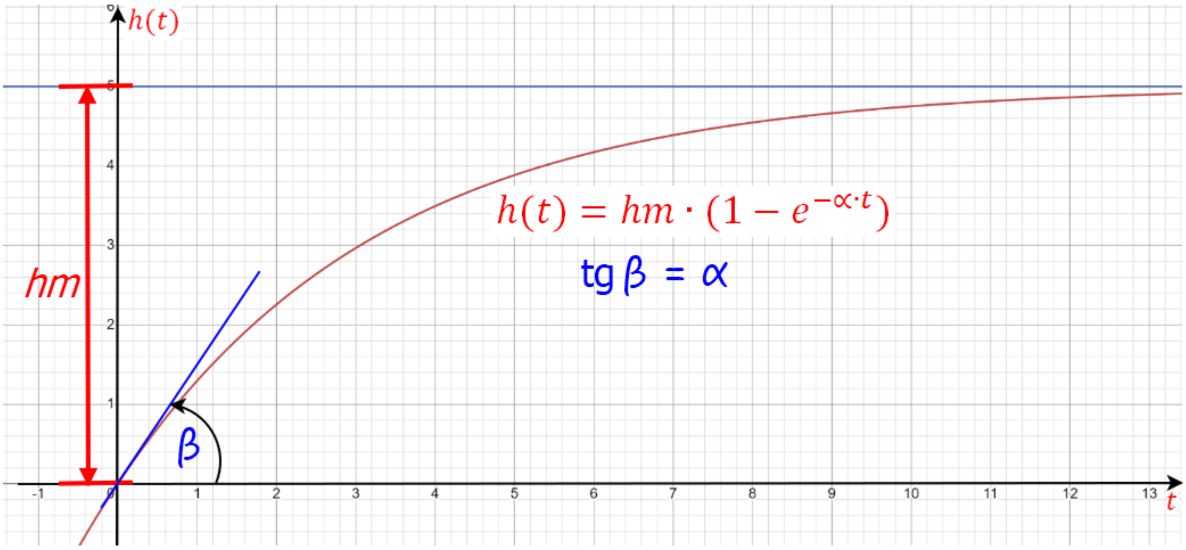
Вариант	h1	h2	h3	h4
1	36	60	71	77
2	38	58	74	81
3	35	59	72	76
4	30	53	66	72
5	37	59	73	79
6	36	58	74	80
7	33	56	69	74
8	25	49	72	81
9	32	55	70	80
10	29	50	67	79
11	27	48	71	83
12	32	54	78	87
13	31	52	75	82
14	29	49	68	83
15	28	53	72	81
16	30	55	73	79
17	37	65	71	84
18	34	57	65	78
19	24	47	58	77

20	38	67	74	90
21	33	60	71	86
22	25	51	76	85

Частота людей залежить від швидкості осідання. Частота вимірів у період експлуатації споруди багато в чому залежить від якості прогнозування осідання. Добре виконаний прогноз може значно скоротити кількість вимірів. Вимірювання припиняють коли швидкість опади становить трохи більше 1–2 мм на рік. Крім того, виміри виконують частіше, коли реальне осідання значно перевищує прогнозне значення. Прогноз опади виконують частіше всього використовуючи експоненційну модель осідання:

$$\boldsymbol{h(t) = hm \cdot (\,1\ - e^{-\alpha \cdot t}\,)},$$

де hm — кінцева осідання будівлі;
α — коеф. відносної стисливості грунтів.



За цією формулою можна прогнозувати осад на 1 — 2 цикли вперед. Студенту для свого варіанта слід побудувати модель опади, тобто визначити невідомі коефіцієнти моделі hm і α по МНК та по побудованої моделі зробити прогноз: якою буде осадка на шостому році спостережень ?

РІШЕННЯ:
Це завдання студент може виконати в середовищі MatLab.

1. Оскільки прийнята модель опади є нелінійною відносно невідомих коефіцієнтів hm і α, розкладаємо модель у ряд Тейлора, обмежуючись лінійними членами:

$$h(t) = \ hmo\ \cdot \left(1\ -\ exp(-alo \cdot t)\right) +\ a \cdot dal\ +\ b \cdot dhm. \qquad (1)$$

Тут: a — похідна за невідомим коефіцієнтом α;
b — похідна за невідомим коефіцієнтом hm;
hmo — приблизно значення кінцевої опади, приймаємо за h4;
alo — прибл значення коеф α, приймаємо за 1;
dal — поправка в наближене значення alo;
dhm — поправка в наближене значення hmo.

2. Складаємо рівняння поправок /дивіться конспект лекцій/.
Наприклад, четверте рівняння, складене для Евріки буде мати вигляд:

```
v4=hmo·(1-exp(-alo·4)) +hmo·4·exp(-alo·4)·dal +(1-exp(-alo·4))·dhm-
77
   |                  |  |              |      |           |
   |-прибл.знач.h(4)-|  |------a4-------|      |------b4-----|
```

В Евриці вказуємо приблизне значення коефіцієнтів:

```
hmo=77
alo=1
```

3. Вирішуємо рівняння поправок по МНК щодо поправок у наближені значення коефіцієнтів: dal та dhm. Для цього у завдання для Еврики додаємо цільову функцію:

```
Svv=v1*v1+v2*v2+v3*v3+v4*v4
$min(Svv).
```

Останній вираз задає Еврікe завдання: змінювати dal та dhm доки Svv не стане мінімальним.

4. У це рішення закладаємо обчислення суми квадратів ухилень вихідної моделі:

$$h(t) = hm \cdot (\ 1\ - e^{-\alpha \cdot t}\ ),$$

від дійсності, тобто. пишемо нелінійні рівняння поправок та обчислюємо суму їх квадратів `Svv = [vv]`. Наприклад, четверте рівняння для Еврики має вигляд:

```
V4 = hm·(1 - exp(-al·4) ) - 77
```

а суму квадратів `SVV=[vv]` обчислимо так:

```
SVV=V1^2+V2^2+V3^2+V4^2.
```

5. У результаті першого рішення (першої ітерації) знайдемо нові значення невідомих `al` і `hm`:

```
al = alo + dal = 1 - 0.5374 = 0.4626
hm = hmo + dhm = 77 + 4.62 = 81.62
[vv]л = 0.67312
[vv]н = 312.23527.
```

Після першої ітерації запишемо значення `[vv]л` – це сума квадратів ухилень лінійної моделі від виміряних значень. Однак наша завдання — звести до мінімуму іншу суму квадратів — а саме суму квадратів ухилень нелінійної моделі — `[vv]н`.

Зауважимо, що `[vv]н` значно перевищує `[vv]л`.

`al` — слід округлювати до 0.0001,
`hm` — до 0.01,
`[vv]л  і  [vv]н` — до 0.00001.

6. Друга та наступні ітерації (наближення) будуть уточнювати значення невідомих al та hm. Тобто. у другій ітерації як alo і hmo слід задати значення al і hm, обчислені в попередньої ітерації.

Зауважте, що з ітерації до ітерації `dal  і  dhm` зменшуються, а значення [vv]н та [vv]л наближаються один до одного. Такий ітераційний процес сходиться тільки в тому випадку, якщо у першій ітерації початкові значення невідомих al та hm задані досить близькими до остаточного рішення. Інакше ітераційний процес розходитися. Контроль – розходиться чи ітераційний процес - є зменшення значення `[vv]н` після кожної ітерації та поступове наближення величини `[vv]л до [vv]н`.
Якщо ітераційний процес розходиться, необхідно уточнити початкові значення. Наприклад, оскільки al – це нормована швидкість опади в початковий момент часу, її можна розрахувати як alo=h1/hmax.

Для цих варіантів кількість ітерацій буде приблизно 5–7.

7. Ітераційний процес студенту слід оформити т. о .

Ітерація (або наближення) 1:

```
al = alo + dal = 1 - 0.5374 = 0.4626
hm = hmo + dhm = 77 + 4.62 = 81.62
[vv]л = 0.67312
[vv]н = 312.23527
```

Ітерація 2:
....

Ітераційний процес слід припиняти тоді, коли [vv]л і [vv]н не збігатимуться з точністю 0.00001.

8. Якщо завдання слід виконати в MatLab, відповідний m-файл матиме приблизно такий вигляд:

```
clc, clear % – видалення змінних попередніх стартів
% Моделювання осадового процесу
hmo = 86.739% 85.012% 81.5672% 77
alo = 0.56279% 0.57713% 0.4629% 1
% Рівняння поправок:
% v1=hmo*(1-exp(-alo*1)) + hmo*1*exp(-alo*1)*dal + (1-
exp(-alo*1))*dhm-36
% v2=hmo*(1- exp( -alo*2)) + hmo*2*exp(-alo*2)*dal + (1-
exp(-alo*2))*dhm-60
% v3=hmo*(1- exp( -alo*3)) + hmo*3*exp(-alo*3)*dal + (1-
exp(-alo*3))*dhm-71
% v4 = hmo * (1- exp ( -alo * 4)) + hmo * 4 * exp (-alo *
4) * dal + (1-exp (-alo * 4)) * dhm-77
% Рівняння поправок: v = A * x - L, a1, a2, ... - це рядки
матриці A :
a1 = [ hmo *1*exp(-alo*1) (1-exp(-alo*1)) ]
a2 = [ hmo *2*exp(-alo*2) (1-exp(-alo*2)) ]
a3 = [ hmo *3*exp(-alo*3) (1-exp(-alo*3)) ]
a4 = [ hmo *4*exp(-alo*4) (1-exp(-alo*4)) ]
% Вільні члени:
l1 = 36 - hmo*(1-exp(-alo*1))
l2 = 60 - hmo * (1 - exp ( -alo * 2))
l3 = 71 - hmo * (1 - exp ( -alo * 3))
l4 = 77 - hmo * (1-exp (-alo * 4))
% Матриця рівнянь поправок:
A = [a1 ; a2; a3; a4]
l = [l1 ; l2; l3; l4]
% Нормальні рівняння:
% A'Ax = L
N = A'*A;
L = A'*l;
x = inv ( N) * L
% dal = -0.5371
% dhm = 4.5672
```

```
hm = hmo + x(2) % 81.5672 % 85.012 % 86.739
al = alo + x(1) % 0.4629 % 0.57713 % 0.56279
% Лінійні поправки:
vl = A*xl
% Сума квадратів лінійна:
Skvl = vl'*vl % 0.6732 3.8380 4.1893 4.19592

% Нелінійні поправки:
vn = [ hm * (1 - exp (-al * 1)) - 36;
       hm * (1 - exp (-al * 2)) - 60;
       hm * (1 - exp (-al * 3)) - 71;
       hm * (1 - exp (-al * 4)) - 77; ] ;
% Сума квадратів нелінійна:
Skvn = vn'*vn % 312.2353 6.1125 4.1988 4.19594
% Контроль:
q = A'*vl
```

9. Слід записати остаточний аналітичний вигляд моделі. Потім побудувати графік: горизонтальна вісь - через кожні 2 см — відкладати роки – від 0 до 7, масштаб вертикальної осі – 1:1.

Спочатку — пунктиром зобразити положення точок, а потім вирахувати для через кожні пів-року значення опади олівцем нанести плавну криву.

Зробити прогноз: яка буде осадка на шостому році спостережень?

10. Рішення оформити т. о . /чітко за пунктами/:

1. Умова завдання.
2. Варіантність.
3. Прийнята модель.
4. Лінеарізація моделі.
5. Рівняння поправок.
6. Завдання для Евріки або m-файл для MatLab.
7. Ітераційний процес.
8. Остаточний аналітичний вид моделі осідання.
9. Графік осадового процесу.
10. Прогноз.

10. Запитання:

1. У чому полягає завдання ?
2. Для чого модель опади довелося розкладати в ряд Тейлора? /Т.к. ми вміємо вирішувати лише лінійні ур-я поправок./

3. Чи є збудовані Вами рівняння поправок лінійні - ми ? /щодо чого?/

4. Наведіть приклад, до якого параметри моделі входить лінійно ?

5. Чи є лінійний зв'язок між параметрами моделі
$y = 1/(kx + b)$?

6. Чи є лінійний зв'язок між параметрами моделі
$Y(X) = A + B \cdot \sin X + C \cdot \cos X$?

7. $Y(X) = \exp(-k \cdot X+b)$

8. $1/Y(X) = A \cdot \ln X + B$

9. $Y(x) = Ao + A1/x + A2/x^2$

10. $Y(X) = \sin A + B \cdot \cos X$

11. $Y(x) = A \cdot X$^B

12. $Y(x) = X /(k \cdot X + b)$

13. Який критерій згоди використовуються у цьому рішенні ?

14. Де завдання Еврики цільова функція ?

15. Чи дорівнює нулю сума поправок у моделі
$$h(t) = hm \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t}) \ ?$$

16. Який критерій збіжності даного ітераційного процесу ?

17. За яких умов цей ітераційний процес буде розходитися ?

18. Чому ітераційний процес не завжди сходиться ?

ЗАВДАННЯ 8. ПОБУДОВА ОДНОМІРНОГО КУБІЧНОГО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО СПЛАЙНУ ЗА ТРЬОМА ТОЧКАМИ

Щоб виконати це завдання, слід законспектувати лекцію: https://youtu.be/m7OdK4MUOao

Виконання цього завдання продемонстровано у цьому відео: https://youtu.be/h8xI5Rq0i5s

Для вирішення цього завдання потрібний пакет wxMaxima.
Завантажити його можна тут:
https://sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-Windows/5.44.0-Windows/

1. Умова завдання: дано три точки, відповідно маємо дві ланки сплайну. Побудувати сплайн та графічно його зобразити на А4

2. Варіантність.

Крайові умови та координати точок у міліметрах:

`1 варіант: y''(1)=0; y'(3)=1; X1 = 0; 150<Y1<175;`

```
110<X2<155; 10<Y2<40;
210<X3<260; 150<Y1<175;
```
<u>2 варіант:</u> `y''(3)=0; y'(1)=1; X1 = 0; 10<Y1<40;`
```
110<X2<155; 150<Y2<175;
210<X3<260; 70<Y3<110
```
<u>3 варіант:</u> `y''(1)=0; y'(3)=-1; X1 = 0; 10<Y1<40;`
```
110<X2<155; 150<Y2<175;
210<X3<260; 10<Y3<40;
```
<u>4 варіант:</u> `y''(3)=0; y'(1)=-1. X1 = 0; 150<Y1<175;`
```
110<X2<155; 10<Y2<40;
210<X3<260; 70<Y3<110.
```

3. Модель має вигляд:

Для X1 <= x <= X2 ->> $S1(x) = A0 + A1*x + A2*x^2 + A3*x^3$;
для X2 <= x <= X3 ->> $S2(x) = B0 + B1*x + B2*x^2 + B3*x^3$;

4. "Побудувати" сплайн означає знайти 8 невідомих коефіцієнтів Ai та Bi.

5. Знаходимо ці невідомі коефіцієнти з таких умов.

а. Умови інтерполяції – їх чотири.

$$\boldsymbol{S1}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{Y1};\ \boldsymbol{S1}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{Y2};\ \boldsymbol{S2}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{Y2};\ \boldsymbol{S2}(\mathbf{3}) = \boldsymbol{Y3};$$

б . Умови збігу перших та других похідних на кордонах інтервалів – їх – два:

$$\boldsymbol{S1}'(\mathbf{2}) = \boldsymbol{S2}'(\mathbf{2});\quad \boldsymbol{S1}''(\mathbf{2}) = \boldsymbol{S2}''(\mathbf{2}).$$

в. Крайові умови - їх – два: по вариантам.

Разом умов — 8 — за кількістю невідомих коефіцієнтів

6. Напишемо цю систему і об'єднаємо ці 8 рівнянь фігурною дужкою.

7. Вирішуємо систему wxMaxima. Отримуємо невідомі коефіцієнти в обох кубічних поліномах, наприклад:

```
S1(x)=171.9- 1 *x-0.01024*x^2+0.000066*x^3
S2(x)=413.8-6.64*x+0.03358*x^2-0.000047*x^3
```

8. Підготуємо таблицю для обчислення всіх Y:

```
| Y | 171.9 | ... | ... | ...
| X |  0    |  10 |  20 | ...
-----------------------------
```

Як обчислювати ? У рішення wxMaxima додамо 9-е рівняння:

```
y = A0 + A1 * 10 + A2 * 10 ^ 2 + A3 * 10 ^ 3
```

Далі — `Shift+Enter`

Отриманий у записуємо до таблиці з точністю 0.1 мм.
Далі в wxMaxima це 9-те рівняння виправляємо:

```
y = A0 + A1 * 20 + A2 * 20 ^ 2 + A3 * 20 ^ 3
```

Знову цей отриманий записуємо в таблицю.
І так далі

9. Через кожен сантиметр вздовж осі X нарахуємо значення Y і по отриманої таблиці збудуємо на А4 сплайн.

Олівцем нанесемо всі обчислені значення графік. Кожні дві суміжні точки на графіку з'єднаємо відрізком прямої під лінійку.

10. У точці зміни формули (у точці 2) обчислимо першу похідну.
Наприклад, якщо $X2 = 128.7$, то

$$ys = A1 + 2 * A2 * 128.7 + 3 * A3 * 128.7\hat{}2$$

Графічно на кресленні зобразимо дотичну до кривої в другий точці і поруч напишемо, наприклад: $y'(2) = -0.33$.

11. Далі, дайте відповідь письмово на всі запитання.

Запитання.
1. У чому завдання.
2. Що означає "інтерполяційний" сплайн ?
3. На підставі яких умов будували сплайн ?
4. У чому полягають умови інтерполяції ?
5. Геометричний зміст першої та другої похідних ?
6. Як можна проконтролювати побудову даного сплайну ?
7. Як співвідноситься радіус кривизни та кривизна ?
8. Чому дорівнює кривизна прямої та точки ?

ЗАВДАННЯ 9. КРИТЕРІЇ УГОДИ

Є 3 числа /вимірювання/: X1=1, X2=2, X3=6.
За варіантами:
`X1 = 1 + N, X2 = 2 + N, X3 = 6 + N.`
Розглядаючи ці числа як рівноточні вимірювання знайти оцінку вимірювань, таку яка максимально не суперечила б виконаним вимірам. При цьому необхідно використовувати три різних критерії згоди:

`МНК, мінімальної суми модулей (МСМ), принцип Чебишевського мінімаксу.`

Тобто: для кожного виміру скласти рівняння поправок, і вирішити цю систему:

1) за умови мінімуму суми квадратів поправок,

2) за умови мінімуму суми модулів поправок,

3) під умовою мінімуму абсолютного значення максимальної поправок.

4) знайти середнє. Яке з рішень відповідає знайденому середньому значенню?

Вибрати з поправок найбільшу за модулем (наприклад `|V3|`), і ввести обмеження цієї поправки, наприклад: `abs(V3) <= 2`.

5. Розв'язати задачу за умови мінімуму суми квадратів поправок з наведеним обмеженням.

При вирішенні використовувати табличний редактор Excel. Завдання МНК, МНК з обмеженнями та метод МСМ можуть бути вирішені і за допомогою програми EUREKA. При вирішенні задачі мінімаксу використовувати Excel.

Угоди, прийняті у програмі Eureka:

1. Перехід з вікна у вікно – F6.
2. Рішення – Solve = Alt+S
3. Перехід із вікна до меню - Esc.
4. Виклик о до калькулятора Alt+C
5. Вихід з Eureka – Alt+x або через File.

Методика вирішення задачі в EXCEL:

1. Отримати свій варіант вимірів, наприклад:

ІЗМ1 = 1,   ІЗМ2=2,   ІЗМ3 = 6.

2. У табл Excel зробити "шапку" таблиці:

"Ізм-ня :" , "Поправки:", "Мод .п оп.:".

3. Заповнити першу колонку табл.
4. Другу колонку ($Vi = X - \text{ІЗМ}i$) заповнювати з посиланням на невідоме X
як на комірку, що змінюється. Кожну комірку заповнювати починаючи з знак рівно.
5. Під таблицею записати: "Оцінка виміру=". А в якості змінної комірки прийняти, наприклад, комірку С5. Тоді комірки у другий колонці будуть описані як C5-1, C5-2, і т. д.
6. У третій колонці записати всі модулі комірок другої колонки використуючи функцією "ABS".
7. Наступний рядок наз "Сума квадратів =", а значення сум кв призначене через функцію "СУММКВ" перебуватиме в комірці C-6.
8. Наступний рядок зв "Сума модулів =", а значення сум мод зв -
почате через функцію "СУМ" перебуватиме в осередку C 7 .
9. Наступний рядок наз "Max модуль =", його значення дорівнює максімальному модулю поправки, її слід призначити в комірку C8 через функцію "МАКС".
10. Наступний рядок наз "Сума поправок=", його значення дорівнює
сум поправок через функцію "СУМ" - комірка С 9 .
11. Розв'язати три оптимізаційні завдання через "Сервіс" - "Пошук решения" встановлюючи цільову комірку, змінювану комірку і при цьому заповнюючи порівняльні таблиці.
ПРИМІТКА. Щоб у Excel 2007 користуватися інструментом "Пошук рішення" слід його спочатку встановлювати. Для цього:
А. Клацнути кнопку Office (зліва вгорі) — Параметри Excel — Надбудови -— Пошук рішення — Перейти. У колонці Доступні надбудови встановити прапорець (поставити "пташку") Пошук рішення. Далі – Встановити.
Б. Після встановлення інструмент Пошук рішення буде доступний у меню Дані.
12. Вирішити ці три оптимізаційні завдання з обмеженнями заповнюючи порівняльні таблиці.
13. Виконати аналіз результатів обчислень у наведеній таблиці як приклад нижче:

МНК			MinCymМодулей			MinMax		
Xi	Xc	Vi	Xi	Xc	Vi	Xi	Xc	Vi

```
|-------------|--------------|--------------|
|  1         2|  1          1|  1        2.5|
|  2   3     1|  2   2      0|  2  3.5   1.5|
|  6        -3|  6         -4|  6       -2.5|
|-------------|--------------|--------------|
|Сум V=      0|Сум V=      -3|Сум V=     1.5|
|Сум V·V=   14|Сум V·V=    17|Сум V·V= 14.75|
|Сум abs(V)=6 |Сум abs(V)= 5 |Сум abs(V)=6.5|
|Max модуль=3 |Max модуль= 4 |Max модуль=2.5|
---------------------------------------------
```

Давайте покритикуємо отримані оцінки. Оцінка отримана за МНК дуже претендує на беззастережну , тим більше що вона забезпепечує мінімум дисперсії, а значить і мінімальну СКО. Більше того МНК має і імовірнісне обґрунтування, її спроможність слід з принципу максимальної правдоподібності.

Інтуїтивно розуміємо, що оцінка вимірів має бути десь у середині вимірів, але, даруйте, до чого тут квадрати? Так, оцінка десь у середині і при цьому сума модулів ухилень повинна бути мінімальною - це на наш погляд звучить більш переконливо.
Давайте покритикуємо такий підхід. Ми сказали, що вимірня рівноточні, тобто. ступінь довіри до кожного – однакова. Почему в такому разі один вимір отримав велику поправку – наприклад в МНК - 3, а інше - +1 ? Чому така дискримінація від дільних вимірів ? В ідеалі всі виміри (як рівноточні та
рівноправні) мають отримати однакову поправку. Однак це неможливо алгебраїчно. У цьому випадку очевидним є наступний підхід — шукати таку оцінку, яка забезпечить мінімальну дискримінацію вимірювань, щоб максимальна з поправок була б мінімальною та тоді поправки будуть максимально рівноправні.

Можна критикувати такий підхід. Деякі методики вимірювання ній перед обробкою відразу відкидають мін і макс значення. А в метод мінімаксу ми будуємо на них всю оцінку. У випадку Minimax — оцінка вимірів дорівнює (MIN+MAX)/2. Як видно у такій оцінці має місце облік MIN-го та MAX-го виміру, але тут немає обліку інших вимірів. Тому питання про таку оцінку, яка максимально не суперечила б полю вимірів залишимо відкритим.

Зауважте:
1. Для МНК оцінка за будь-якої кількості вимірювань збігається з середнім значенням, формальний контроль – $\sum V = 0$.
2. Для методу МСМ — оцінка завжди збігається будь-яким виміром. Причому - якщо маємо тільки три виміри - оцінка не збігається з

екстремальними значеннями, тобто .- не 1 і 6. Якщо кількість вимірів більша, то оцінку слід шукати також дорівнює будь-якому виміру, але не екстремальному. Шукати перебором значень. До речі, симплекс-метод для пошуку ня такої оцінки, також заснований на переборі.
3. Для методу Чебишевського мінімаксу оцінка за будь-якої кількості вимірів збігається з медіаною, тобто. $(MIN + MAX)/2$.
4. Як видно, якщо оцінка одна, то таке завдання можна вирішувати почти усно. А якщо у моделі два коефіцієнти, наприклад, модель прямий $y = kx + b$? Тут завдання знайти оцінки коефіцієнтів моделі, які максимально не суперечили б полю вимірних (точок), є складніше завдання.

Рішення оформити таким чином:

1. Умова завдання.
2. Варіантність.
3. Рівняння поправок.
4. Вказати критерій згоди /цільову функцію/ у звичній математичній формі і привести форму завдання для Excel і текст завдання для EUREKA / зміст файлу /. Він може бути таким:

```
Svv=v1^2+v2^2+v3^2
;у разі сума v·v = 6
; = abs( v1) + abs(v2) + abs(v3)
$ min( Svv)
v1=x-2
v2=x-5
v3=x-5
abs(v3)<=0.5
```

Після точки з зап — коментар.

5. Навести порівняльну таблицю:

```
 ----------------------------------------------------------
|  Среднее  |    МНК    |MinCумМодул|  MinMax   |МНК с огран|
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Xi| Xc| Vi| Xi| Xc| Vi| Xi| Xc| Vi| Xi| Xc| Vi| Xi| Xc| Vi|
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|∑ V=       |∑ V=       |∑ V=       |∑ V=       |∑ V=       |
|∑ V·V=     |∑ V·V=     |∑ V·V=     |∑ V·V=     |∑ V·V=     |
|∑ abs(V)=  |∑ abs(V)=  |∑ abs(V)=  |∑ abs(V)=  |∑ abs(V)=  |
|Max модуль=|Max модуль=|Max модуль=|Max модуль=|Max модуль=|
 ----------------------------------------------------------
```

Для середнього: Xc = ...

Запитання:

1. Покажіть у роботі /або напишіть/ цільову функцію, рівняння обмеження та критерії згоди.
2. Покажіть у таблиці, яке рішення доставляє мін суму квадротів поправок ?
3. Що відрізняє /що характерно/МНК /дві відмінності/ ?
4. Покажіть у таблиці, яке рішення доставляє мін суму абсолютих значень поправок ?
5. Що відрізняє СММ ?
6. Який вплив на цільову функцію надають рівняння-обмеженя ?
7. Якому рішенню з чотирьох відповідає обчислення середнього ?

ЗАВДАННЯ 10. ПОБУДУВАННЯ ПОВЕРХНІ ЗА ДОПОМОГОЮ SURFER_6.04

1. Зняти координати

2. Якщо приховані всі вікна в Surfer-е і видно лише File і Help, то — File – New – Plot.

3. Створити GRID-модель: GRID - DATA -вказати файл із вихідними даними, - далі - метод інтерполяції під час створення GRIG-моделі:

а. Radial Basis Functions

б. Тріангуляція якої, на жаль, немає можливості керувати.

3. Побудувати горизонталі Map - Contour - вказати файл із GRID-моділлю.

4. Показати точки зору вихідних даних *.dat - Map - Post.

5. Windows - New-View

Тема 1 : Створення регулярної мережі позначок
за нерегулярними даними

Слід отримати свій варіант рельєфу, скопіювати гострим твердим олівцем /3Т/ сітку 15см X 15см, пікетні точки, N варіанта. Масштаб 1:1000. Горизонталі викреслювати м'яким олівцем. шем /має бути гумка/.

Зняти з плану координати X, Y, H кожного пікету в м/відмітку пікету в м – інтерполювати, якщо її немає /, X, Y пікету - до 1 м , H – до 0.01 м. Кількість пікетів – 35.
У цьому завдання необхідно створити GRID-модель території 15 див X 15 див, тобто. отримати позначки на регулярній сітці з кроком 10 м – 1 см у масштабі плану.

1. У каталозі своєї групи створити текстовий файл FAMILIA.DAT /shift+F4/. У цьому файлі: у першій колонці - записати всі X, у другій – все Y, у третій – все H.

2. Запустити SURFER.EXE.

3. У головному пункті меню GRID – DATA – відкрити файл FAMILIA.DAT.
GRID створює з нерегулярно розташованих пікетів регулярну сітку позначок. Далі – OK.

4. Далі потрапляємо у вікно Scattered Data Interpolation. Тут: округліть мінімальні X і Y до 10 м у меншу сторону, а максимальні X та Y у більшу сторону. Далі вкажемо відстань між GRID-лініями Spacing = 1 м, у рядках # of Lines -
- Отримаємо кількість Grid-ліній.

5. У пункті меню "Gridding Method" передбачено кілька методів інтерполяції, наприклад:

а. Метод середньозваженого – InvDinst, тобто.

H(x,y) = ∑ Pi(x,y)·Hi,

де Pi(x,y) = 1/S^n - вага пікету при обчисленні позначки точці (x, y);
Si - відстань до кожного пікету;
n – може бути від 1 до 10.
/при n=2 - це метод зворотно-квадратичної дистанції/

б. Kriging - крайгінг - заснований на поданні рельєфу в якості однієї з реалізацій стаціонарної випадкової функції.

в. MinCurv – метод мінімальної кривизни.

м. Nearest Neighbor – Метод найближчого сусіда.

Слід вибрати метод середньозваженого . Далі Browse – тут
у рядку Save File as Type (зберегти файл у вигляді) - вкажіть
GS ASCII, тобто зберігати файл у текстовому вигляді (не в двійковому)
- Binery).

6. Вийшовши з Surfer, перегляньте створений GRID-файл (FAMILIA.GRD). З'ясуйте - чи відповідають позначки, записані в ньому вашому варіантом рельєфу.

7. Покажіть регулярну сітку позначок, створену GRID, викладача-теля.

8. Н ачертив на вашому плані сітку 5см х 5см знайдіть у файлі FAMILIA.GRD позначки вузлів збудованої вами сітки. Підпишіть їх на плані та обведіть у гурток. Чи відповідають ці відмітки-ки вашому рельєфу?

9. Здайте ваш план викладачеві.

Т. о . на тему 1 звітувати:
а. показати вміння створювати регулювання сітку відміток;
б. показати сітку позначок на екрані, вміти орієнтуватися в GRID-файл;
в. здати план.

10. Примітка. Для Surfer 8 - щоб одночасно бачити і точки та горизонталі:

а. Map - PostMap - NewPostMap...
б . Правий клік по Post(ліворуч)
в . Properties - Labels - Worksheet...-Elevation - Apply
р . Map - ContourMap (файл - GRD) - гориз .

Тема 2. Побудова горизонталі по регулярній сітці

1. Запустивши Surfer – вибрати пункт MAP. Ця функція будує горизонталі, для цього вона вимагає ім'я файлу з регулярною сіткою позначок (тобто GRID-файл).

2. Далі – Contour – отримайте горизонталі. Вони зовсім готові. Щоб їх видалити – клацніть мишею по них, а далі – клавіша Del.

3. Щоб упорядкувати креслення - ще раз - Map - Contour - Вказуємо GRID-файл. Далі – у вікні Contour Map: перераховані позначки всіх горизонталей,

які будуть візуальними. ні, будь-яку з них можна підписати - для цього слід за допомогою подвійного клацання вказати Yes замість No.
(Hachures – можна задати довжину штриха; Smooth – можна задати згладжування).

4. Щоб зручно було дивитися на збудовані горизонталі - View - Fit to Window.

5. Далі слід показати позначки на електронній карті: Map – Post – Файл з вихідними даними – FAMILIA.dat. У вікні Post Map у рядку Label вкажемо якусь координату (X, Y або H, тобто A, B або C) слід вивести на карті – вкажемо C.

6. Далі вибрати як Default Symbol - чорну точку, вказати її розмір – Fixed Size – 0.03 in (дюйма). Далі - ОК - ви побачите, що до горизонталі додані позначки FAMILIA.DAT. (Щоб що-небудь змінити – правий Click).

7. Дати оцінку горизонталям: Чи правильно проведена інтерполяція ? Чи достатньо якість укладання ? Який ступінь незграбності горизонталів ? (Як подолати незграбність?: можна зменшити крок сітки або скористатися Smooth).

8. Навчитися перемішатися по вузлах сітки і визначати проміжну позначку між пікетами, вміти її змінювати. Для цього – пункт меню Grid, далі – Grid Node – Editor.

9. Покажіть отримані горизонталі викладачеві.

10. Побудуйте регулярну сітку позначок Крайгінг-методом.

11. Побудуйте по цій сітці горизонталі та дайте їм оцінку (за трьома критеріям).

12. Побудуйте регулярну сітку позначок методом мінімальної кривизи.

13. Побудуйте по цій сітці горизонталі і дайте оцінку.

14. Побудувати перспективну поверхню – Map – Surface.

15. Здайте тему 2 викладачеві. Н необхідно показати навички:
   а. Вибрати спосіб інтерполяції.
   б . Створити регулярну мережу.

в. Побудувати горизонталі з візуалізацією позначок, переміщатися GRID-сіткою.

г. Визначати проміжну позначку між пікетами.

д. Будувати перспективну поверхню.

ЗАВДАННЯ 11. ЗАВДАННЯ КОМІВОЯЖЕРА У МЕРЕЖЕВОМУ АНАЛІЗІ ДОРОЖНІЙ МЕРЕЖІ

Виконати це завдання, можна переглянувши відео на YouTube: https://youtu.be/LUJ1WYN5cGM
Для вирішення цього завдання вам знадобиться векторний графічний редактор Dia. Програму-установник Dia можна завантажити безкоштовно за адресою:
http://dia-installer.de/download/index.html
Інструкцію до цього редактора зручно читати тут:
http://dia-installer.de/doc/en/index.html

Геоінформаційна система містить у собі кілька видів аналізу, у тому числі просторовий аналіз, оверлейний аналіз, мережевий аналіз, спеціалізований аналіз (наприклад, геологічний) та ін Розвинений блок мережевого аналізу мають небагато ГІС. Такий блок, званий NETWORK (мережа) має ГІС ARC/INFO. Мережевий аналіз – це засіб для дослідження в ГІС лінійних об'єктів, що утворюють мережу:

1. Транспортні мережі (дороги, авіалінії, шляхи руху суден, залізничні мережі, вулиці...).
2. Міські інженерні мережі (водопровід, каналізація, газопровід, телефон, електричні мережі, мережі ЛЕП...).
3. Кордони районів, областей, держав...
4. Інше.

Описуючи такі мережі, використовують математичний аппарат Теорія графів. У ГІС такі мережі моделюють як граф, тобто сукупність вершин (вузлів) та дуг (ребер) між вузлами.
Цей граф зручно представляти як т.зв. матрицю вартості:

```
  ABCDE
A 0 1 2 7 5
B 0 4 4 3
C 0 1 2
D 0 3
E 0.
```

Для цієї задачі в клітинах матриці записані відстані між містами A, B, C, D, E в умовних одиницях.
Оскільки матриця симетрична, то пишуть або верхню, або нижню трикутну матрицю. Користуючись такою моделлю у ГІС вирішують ряд завдань, наприклад:

1. Знайти маршрут з A до D мінімальної вартості (найкоротша відстань).
2. Які дороги пов'язують міста C та E ?
3. Завдання розміщення, наприклад, де краще розмістити заправну станцію (АЗС), або СТО, або пожежну станцію.
4. Які лінії ЛЕП виходять із підстанції C ?
5. Вивести мережу водопровідних труб діаметром більше 1 дюйма (труби прийнято вимірювати у дюймах) в окремий шар.
6. Показати у новому шарі лише головні вулиці міста.
7. Завдання комівояжера: є, наприклад, 5 міст. Побудувати маршрут між цими містами із мінімальною вартістю.
8. Завдання листоноші - аналогічне завдання комівояжера, тільки необхідно пройти всі вулиці мінімізуючи пройдену відстань.
9. Інші завдання.

1.Умова завдання комівояжера полягає в наступному. Є п'ять міст. Менеджеру з продажу комп'ютерів потрібно об'їхати всі ці п'ять міст. При цьому дорожні витрати потрібні звести до мінімуму. Тобто необхідно між цими п'ятьма містами побудувати маршрут із мінімальною вартістю.

Менеджер проектував свій маршрут , використовуючи ГІС. Студенту на прикладі свого варіанта слід повторити за ГІС алгоритм розв'язання даної задачі.

2. Варіантність – відстані між пунктами в умовних одиницях:

1. AB=1;AC=8;AD=7;AE=5;BC=4;BD=6;BE=3;CD=9;CE=2;DE=10.
2. AB=1;AC=2;AD=7;AE=5;BC=4;BD=4;BE=3;CD=1;CE=2;DE=3.
3. AB=2;AC=1;AD=4;AE=8;BC=6;BD=1;BE=2;CD=3;CE=4;DE=1.
4. AB=3;AC=3;AD=1;AE=4;BC=2;BD=3;BE=1;CD=7;CE=3;DE=5.
5. AB=4;AC=1;AD=2;AE=7;BC=3;BD=2;BE=4;CD=2;CE=8;DE=6.
6. AB=5;AC=4;AD=1;AE=3;BC=1;BD=5;BE=8;CD=4;CE=1;DE=2.
7. AB=70
;AC=20;AD=90;AE=70;BC=30;BD=90;BE=10;CD=50;CE=30;DE=70.
8. AB=6;AC=2;AD=1;AE=2;BC=4;BD=3;BE=3;CD=8;CE=4;DE=1.
9. AB=1;AC=3;AD=2;AE=4;BC=6;BD=2;BE=4;CD=1;CE=7;DE=3.
10. AB=2;AC=7;AD=1;AE=3;BC=4;BD=1;BE=5;CD=5;CE=5;DE=4.
11. AB=3;AC=1;AD=5;AE=4;BC=5;BD=8;BE=6;CD=6;CE=1;DE=7.
12. AB=4;AC=2;AD=3;AE=1;BC=3;BD=6;BE=7;CD=3;CE=2;DE=3.

13. AB=5;AC=4;AD=2;AE=2;BC=4;BD=7;BE=3;CD=5;CE=4;DE=1.
14. AB=1;AC=2;AD=1;AE=3;BC=2;BD=4;BE=5;CD=7;CE=3;DE=2.
15. AB=6;AC=2;AD=1;AE=2;BC=4;BD=3;BE=3;CD=8;CE=4;DE=1.
16. AB=7;AC=3;AD=4;AE=1;BC=6;BD=2;BE=4;CD=5;CE=1;DE=3.
17. AB=8;AC=1;AD=3;AE=5;BC=3;BD=4;BE=1;CD=6;CE=3;DE=2.
18. AB=1;AC=3;AD=5;AE=3;BC=7;BD=2;BE=1;CD=6;CE=2;DE=3.
19. AB=3;AC=5;AD=7;AE=1;BC=2;BD=4;BE=6;CD=3;CE=8;DE=2.
20. AB=4;AC=6;AD=2;AE=4;BC=7;BD=2;BE=2;CD=3;CE=5;DE=4.
21. AB=5;AC=4;AD=3;AE=2;BC=5;BD=3;BE=3;CD=7;CE=3;DE=1.
22. AB=6;AC=1;AD=1;AE=3;BC=6;BD=1;BE=4;CD=5;CE=4;DE=7.
23. AB=7;AC=2;AD=4;AE=5;BC=3;BD=4;BE=2;CD=8;CE=3;DE=2.

3. Намалювати модель мережі — граф, тобто сукупність вершин дуг згідно з варіантом. Кількість вершин = 5, а

$$\text{кількість ребер (дуг)} = n^2 - n = 5^2 - 5 = 20$$

(до себе не потрібно їхати).
Але оскільки ми маємо симетричну матрицю вартості,

$$\text{кількість дуг} = 20/2 = 10.$$

4. Скласти т.зв. матрицю цін (верхню трикутну).

5. Порахувати – скільки варіантів слід перебрати, щоб знайти оптимальне рішення (n-1)! Порахуйте скільки процесорного часу знадобиться для пошуку оптимального рішення для 20 міст, якщо на аналіз одного варіанту потрібно 0.000000001 сек. Переведіть отримане число у більші одиниці (роки, століття).

6. Навести евристичне рішення для вашого варіанту. Рішення полягає у виборі від початкового пункту (від міста А) ребра з мінімальною вартістю. Навести це рішення у вигляді графа. Вказати, яка вартість такого рішення.

7. Використовуючи ефективніший алгоритм слід знайти краще Рішення. Для цього слідує алгоритм, наведений у попередньому пункті виконати від кожного міста. Таких рішень буде 5 – за кількістю міст. З 5 рішень вибрати маршрут з мінімальною вартістю.

8. Іноді студенти знаходять інтуїтивно ще більш оптимальний маршрут. Так, для 1 варіанта оптимальним маршрутом буде такий: `ACDEBA`, його ціна `opt=10`. Спробуйте і для вашого варіанта знайти якщо не оптимальний, то менший за вартістю, ніж ви знайшли в попередній пункт.

9. Сформулюйте висновок. При оформленні завдання звіт має містити 9 пунктів.

Запитання:

1. Яке призначення мережевого аналізу у ГІС ?
2. Які об'єкти досліджують за допомогою мережевого аналізу ?
3. Які завдання вирішує мережевий аналіз ГІС ?
4. Який математичний апарат використовують у ГІС для реалізації мережевого аналізу ?
5. Що таке граф ?
6. Як скласти матрицю цін за графом ?
7. У чому полягає завдання комівояжера ?
8. Що таке оптимальне рішення задачі комівояжера і чи раціонально його шукати ?
9. Як знайти оптимальне рішення задачі комівояжера ?
10. Як знайти гарне рішення задачі комівояжера ?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Підручники:
1. Mathematical Techniques in GIS, 2nd Edition: textbook / Peter Dale. — Boca Raton, Florida, USA, CRC Press, 359 Pages.
2. Mathematical Modelling in Geographical Information System, Global Positioning System and Digital Cartography: textbook / H.S. Sharma, D.R. Ram, Rama Prasad, R.R. Binda — Delhi: Concept Publishing Co, 2006, — 188 p.
4.Математичні методи дослідження операцій: підручник / Є.А. Лавров, Л.П. Перхун, В.В. Шендрик та ін. – Суми: Сумський державний університет, 2017. – 212 с.

Навчальні посібники:
1. "Discrete Mathematics and Its Applications" by Kenneth H. Rosen, 2006, McGraw-Hill Education. 1072 pages.
https://www.mheducation.com/highered/product/discrete-mathematics-its-applications-rosen/0073229725.html
2. Michael J. Laszlo Computational Geometry and Computer Graphics in C++, Nova Southeanstern University, 1996, 304 pages.
https://nsuworks.nova.edu/gscis_facbooks/38/
3.Числові методи: навч. посібник / О.І. Ярошенко, М.В. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. університет, 2018. – 172 с.
4.Математичні методи і моделі в оцінці нерухомості: навч. посіб. / К.А. Мамонов, Д.С. Творошенко; Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М.Бекетова. – Х.: ХНУМГ, 2014. — 212 с.

Конспекти лекцій:

Мамонов К. А. Математичні методи і моделі у землеустрої : конспект лекцій / К. А. Мамонов, Ю. Б. Радзінська. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 116 с.
http://eprints.kname.edu.ua/50053/1/2016_печ_14Л_КЛ%20ММиМвОН%2025.pdf

Методичні роботи:

Зіборов В.В. В.М. Математичні методи і моделі: методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів спеціальностей 7.070901 "Геодезія", 7.070904 "Землевпорядкування та кадастр" і 7.070908 "Геоінформаційні системи і технології". – КНУБА, Київ, 2004. – 16 с.

Інформаційні ресурси:

https://library.knuba.edu.ua/
https://www.mathworks.com/

Навчально-методичне видання

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт для здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»

Укладач ЗІБОРОВ Віктор Володимирович

Комп’ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Ум. друк. арк. 3,02. Обл.-вид. арк. 3,25
Електронний документ. Вид № 1/V-25.

Виконавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03680

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р