

УДК 539.3

к.т.н., доцент Станкевич А.М.

д.т.н., професор Чибіряков В.К.

д.т.н., професор Шкельов Л.Т.

Левківський Д.В.

Київський національний університет будівництва та архітектури
**ДО ЗНИЖЕННЯ ВИМІРНОСТІ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ
ПРУЖНОСТІ ЗА МЕТОДОМ ПРЯМИХ.**

В даній статті розглядається комбінований метод для розв'язання плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація). Він включає ефективний чисельний метод розв'язання крайових задач звичайних диференціальних рівнянь – метод С.К. Годунова, класичний варіант метода «прямих» із застосуванням узагальненого метода Бубнова-Гальоркіна для побудови розрахункових рівнянь. Для наочності виникаючих при цьому перетворень застосовано індексну форму запису, що широко використовується в тензорному численні. Даний метод має великі перспективи для розв'язання задач динаміки та тривимірних задач.

Дво- і тривимірні задачі теорії пружності широко використовуються як математичні моделі при розрахунку на міцність багатьох деталей будівельних конструкцій та машин, які мають співрозмірні габаритні розміри. Такі задачі успішно розв'язуються сучасними чисельними методами, але їх застосування пов'язане з певними труднощами. По-перше, це проблеми, пов'язані з дослідженням збіжності результатів, по-друге, універсальний характер сучасних чисельних методів не враховує специфіки задач і тому не завжди раціонально їх застосовувати, по-третє, точність результатів неможливо апріорно передбачити.

Натомість існуючі чисельні методи розв'язання одновимірних граничних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь забезпечують апріорно задану точність, їх чисельні алгоритми є стійкими та ефективними. Саме такими позитивними властивостями відзначається метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.[1]

В зв'язку з вищезазначеним одним з ефективних напрямків побудови методів розв'язання дво- та тривимірних задач теорії пружності є комбіновані чисельні методи, які передбачають розв'язання задач в два етапи. На першому етапі знижується вимірність вихідних рівнянь у частинних похідних та граничних умов (редукована задача вже є одновимірною), а на другому редукована задача, що є граничною задачею для системи звичайних

диференціальних рівнянь, розв'язується чисельно методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова.

На першому етапі такого комбінованого метода розв'язання дво- та тривимірних задач зниження вимірності пов'язане з врахуванням специфіки геометрії об'єкта, що розглядається. Так, наприклад, розрахунковою моделлю підірних стінок та стрічкових фундаментів значної довжини є тіло, поперечний переріз якого в найпростішому вигляді є прямокутником, більший габаритний розмір якого (висота, або довжина) та інший (товщина) є співрозмірними. В більш складних випадках товщина є змінною. Напружено-деформований стан такого тіла залежить від двох поперечних координат і описується рівняннями плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація). Натомість, для будівельних деталей, один розмір якого значно менший за два інших за певних умов поширеною розрахунковою моделлю є плоский об'єкт аналогічної геометрії, напружено-деформований стан якого розглядається в рамках плоскої задачі теорії пружності (плоский напружений стан). Обидві задачі описуються однаковими диференціальними рівняннями у частинних похідних, а відповідні розрахункові моделі називають пластинами в обох випадках (сталой чи змінної товщини).

Розглянемо пластину сталой товщини h , що знаходиться в стані плоскої деформації (рис. 1) в площині $хоу$

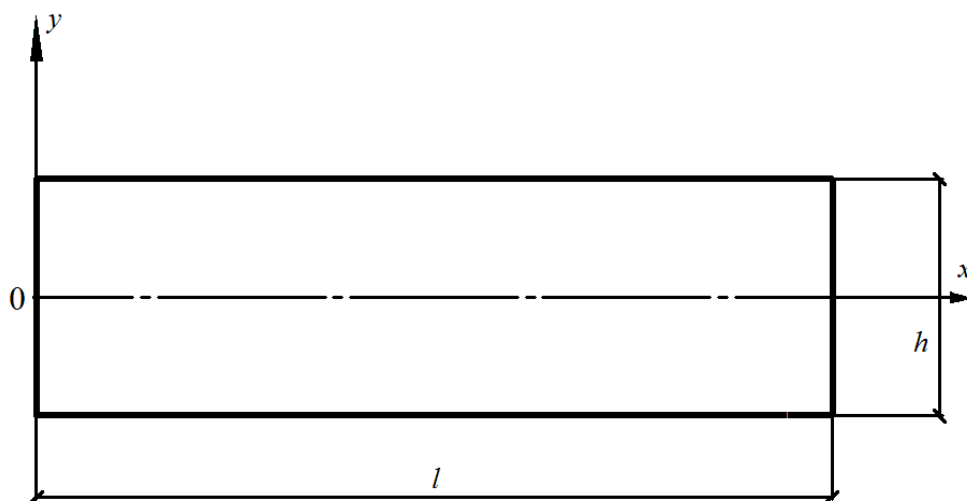


Рис. 1

Напружено-деформований стан пластини залежить тільки від двох поперечних координат x, y і описується рівняннями, які можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{du^*}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{dv^*}{dx} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \sigma_x \\ \frac{dv^*}{dx} = -\frac{du^*}{dy} + \tau_{xy} \\ \frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{\tau_{xy}}{dx} - X \\ \frac{d\tau_{xy}}{dx} = -\frac{d\sigma_y}{dy} - Y \\ \sigma_y = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{du^*}{dx} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{dv^*}{dy} \end{cases} \quad (1)$$

Тут λ, μ - коефіцієнти Ляме; $u^* = \mu \cdot u$, $v^* = \mu \cdot v$; u, v - компоненти вектора переміщень; $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$ - компоненти тензора напружень; X, Y - компоненти вектора об'ємної сили.

Поперечний переріз пластини по вертикальній координаті розіб'ємо на $(n-1)$ смужок рівної висоти лініями (прямими), до яких входять граничні лінії $x = -\frac{h}{2}$, $x = \frac{h}{2}$. Функції, які визначають напружено-деформований стан пластини будемо розглядати у вигляді розкладу по системі лінійно незалежних функцій $\varphi_i(y)$, ($i = 1, 2, 3, \dots, n$):

$$f(x, y) = f^i(x) \cdot \varphi_i(y) \quad (2)$$

Тут і надалі будемо використовувати позначення, аналогічні прийнятим в тензорному численні. [3]

Спочатку визначимо скалярний добуток двох функцій від змінної y :

$$(f(y), g(y)) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(y)g(y)dy.$$

Тоді система базисних функцій $\varphi_i(y)$ ($i = \overline{1, n}$) може бути ортогональною, ортонормованою відносно цього скалярного добутку, або ж косокутною. В останньому випадку необхідно розглянути систему функцій $\varphi_i(y)$ ($i = \overline{1, n}$) як основний базис і обов'язково відповідно будувати взаємний базис $\varphi^j(y)$ ($j = \overline{1, n}$), що визначається співвідношеннями

$$(\varphi_i(y), \varphi^j(y)) = \delta_i^j. \quad (3)$$

де $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера.

Як і в тензорному численні, будемо використовувати правило Ейнштейна – в добутках типа (2) по індексах, що повторюються, передбачається сумування відповідних добутків при зміні індексів в їх області визначення.

Будь-яку функцію можна розкласти як по основному базису, так і по взаємному:

$$f(y) = a^i \varphi_i(y) = a_j \varphi^j(y) \quad (4)$$

Як і в тензорному численні коефіцієнти в розкладі (4) по основному базису будемо називати контраваріантними компонентами $f(y)$ і позначати верхніми індексами, а коефіцієнти в розкладі $f(y)$ по взаємному базису – коваріантними компонентами і позначати нижніми індексами. А оскільки скалярний добуток визначається за допомогою інтегрування і коваріантні компоненти мають вигляд:

$$a_j = (f(y), \varphi_j(y)) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(y) \cdot \varphi_j(y) dy$$

то їх ще будемо називати моментами функцій $f(y)$ відносно системи функцій $\varphi^j(y)$ ($j = \overline{1, n}$). На відміну від них, величини a^i будемо називати коефіцієнтами відносно системи базисних функцій $\varphi_i(y)$ ($i = \overline{1, n}$). Важливими є фундаментальні матриці

$$\begin{aligned} \{g_{ij}\} &= \{(\varphi_i(y), \varphi_j(y))\} \\ \{g^{ij}\} &= \{(\varphi^i(y), \varphi^j(y))\} \\ \{\delta_{i \cdot}^{\cdot j}\} &= \{\delta_{\cdot i}^{\cdot j}\} = (\varphi_i(y), \varphi^j(y)) \end{aligned} \quad (5)$$

Вони є аналогом метричних тензорів для косокутних базисів.

Як відомо, матриці $\{g_{ij}\}$ та $\{g^{ij}\}$ взаємно обернені.

$$\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1} \quad (6)$$

Основний та взаємний базиси зв'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} \varphi^i(y) &= g^{ij} \cdot \varphi_j(y) \\ \varphi_i(y) &= g_{ij} \cdot \varphi^j(y) \end{aligned} \quad (7)$$

з яких випливають співвідношення між коефіцієнтами.

$$\begin{aligned} a_i &= g_{ij} \cdot a^j \\ a^i &= g^{ij} \cdot a_j \end{aligned} \quad (8)$$

Повертаючись до співвідношення (2) за базисні функції $\varphi_i(y)$ приймемо неперервні кусково-лінійні функції, що дорівнюють 1 на i -й прямій та 0 на інших прямих.

Для таких базисних функцій

$$\{g_{ij}\} = \Delta \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\{b_{ij}\} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Тут $\Delta = h/(n-1)$, $b_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi_j'(y))$, штрихом позначена похідна.

Домножуючи перші два рівняння системи (1) на $\varphi_i(y)$ та інтегруючи по y в межах від $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$ після нескладних перетворень отримуємо рівняння:

$$\begin{cases} \frac{du_i^*}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ij} \cdot v^{*j} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{xi} \\ \frac{dv_i^*}{dx} = -b_{ij} u^{*j} + \tau_{xyi} \end{cases} \quad (9)$$

Враховуючи співвідношення (8) остаточно маємо

$$\begin{cases} \frac{du_i^*}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot v_\alpha^* + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} c \\ \frac{dv_i^*}{dx} = -b_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot u_\alpha^* + \tau_{xyi} \end{cases} \quad (10)$$

П'яте рівняння з системи (1) помножимо на $\varphi_i(y)$ та проінтегруємо по y від $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$:

$$\sigma_{yi} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{du_i^*}{dx} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} b_{ij} \cdot v^{*j}$$

або з врахуванням співвідношень (8):

$$\sigma_{yi} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{du_i^*}{dx} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} b_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot v_\alpha^* \quad (11)$$

Виключаючи $\frac{du_i^*}{dx}$ з цього рівняння за допомогою першого рівняння системи (10) отримуємо алгебраїчне рівняння:

$$\sigma_{yi} = \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot v_\alpha^* + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{xi} \quad (12)$$

Домножимо третє та четверте рівняння системи (1) на $\varphi_i(y)$ та проінтегруємо по y від $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$. При обчисленні інтегралів, до яких входять похідні по y від компонентів тензора напружень, скористаємося перетворенням інтегралів за допомогою інтегрування частинами. В результаті таких перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xi}}{dx} &= b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \cdot \tau_{xy\alpha} + \begin{bmatrix} \tau_{xy}^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\tau_{xy}^n \end{bmatrix} - X_i \\ \frac{d\tau_{xyi}}{dx} &= b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \cdot \sigma_{y\alpha} + \begin{bmatrix} \sigma_y^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sigma_y^n \end{bmatrix} - Y_i \end{aligned} \quad (13)$$

Тут $\tau_{xy}^1, -\tau_{xy}^n, \sigma_y^1, -\sigma_y^n$ - напруження на першій прямій

($y = -\frac{h}{2}$) та на n - й прямій ($y = \frac{h}{2}$). Їх виключення з рівнянь потребує врахування граничних умов на цих двох частинах границі. Розглянемо найбільш загальний варіант врахування граничних умов на цих ділянках (рис. 2)

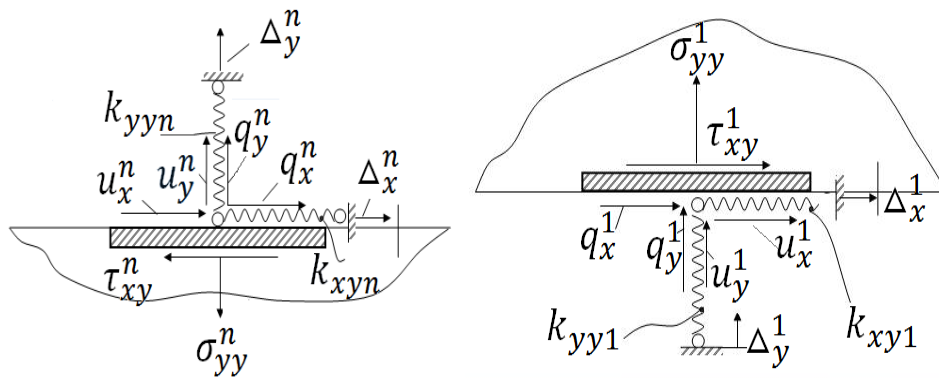


Рис.2

На рис. 2 враховується зв'язок граничних площин з оточуючим середовищем за допомогою пружних в'язей заданої жорсткості. Це дає змогу врахувати кінематичні дії Δ_x та Δ_y з боку оточуючого середовища, особливо коли відповідне $k \rightarrow \infty$. Якщо ж $k = 0$, то у відповідному напрямку задані напруження, які обумовлені зовнішнім навантаженням $-q_x$ чи q_y . В загальному вигляді граничні умови мають вигляд:

При $y = -\frac{h}{2}$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^1 &= -q_y^1 - k_{yy1}(\Delta_y^1 - u_y^1) \\ \tau_{xy}^1 &= -q_x^1 - k_{xy1}(\Delta_x^1 - u_x^1) \end{aligned} \quad (14)$$

При $y = \frac{h}{2}$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^n &= q_y^n + k_{yy2}(\Delta_y^n - u_y^n) \\ \tau_{xy}^n &= q_x^n + k_{xy2}(\Delta_x^n - u_x^n) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{k_{xy}}{\mu} = k_{xy}^*$$

$$\frac{k_{yy}}{\mu} = k_{yy}^*$$

Враховуючи ці граничні умови та виключаючи σ_{yi} за допомогою співвідношення (11) отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{xi}}{dx} = \begin{bmatrix} k_{xy1}^* u_x^{*1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{xyn}^* u_x^{*n} \end{bmatrix} + b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \cdot \tau_{xy\alpha} - \begin{bmatrix} q_x^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_x^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{xy1}^* \Delta_x^{*1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k_{xyn}^* \Delta_x^{*n} \end{bmatrix} - X_i \\ \frac{d\tau_{xyi}}{dx} = \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \cdot b_{\alpha\beta} \cdot g^{\beta\gamma} \cdot v_{\gamma}^* + \begin{bmatrix} k_{yy1}^* u_y^{*1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{yyn}^* u_y^{*n} \end{bmatrix} + \\ + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \cdot \sigma_{x\alpha} - \begin{bmatrix} q_y^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_y^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{yy1}^* \Delta_y^{*1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k_{yyn}^* \Delta_y^{*n} \end{bmatrix} - Y_i \end{cases} \quad (16)$$

Система рівнянь (10), (16) є замкненою системою $4 \cdot n$ звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих моментів $u_i(x)$, $v_i(x)$, $\sigma_{xi}(x)$ та $\tau_{xyi}(x)$ ($i = \overline{1, n}$). Для знаходження її єдиного розв'язку, що відповідає конкретному напружено-деформованому стану, необхідно задати граничні умови при $x = 0$ та $x = l$.

Ці умови складемо із заданих граничних умов на торцях пластини $x = 0$ та $x = l$, $y \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$.

Також розглянемо дані умови в найбільш загальному вигляді (рис. 3)

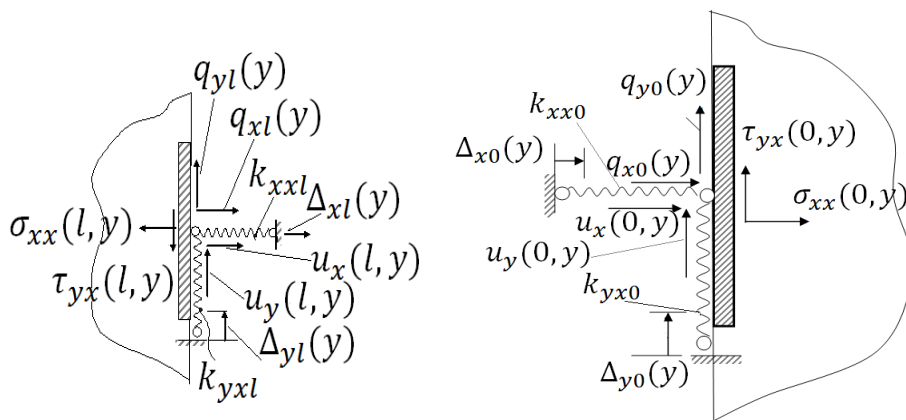


Рис. 3

Будемо мати при $x = 0$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(0, y) = -q_{x0}(y) - k_{xx0}(\Delta_{x0}(y) - u(0, y)) \\ \tau_{xy}(0, y) = -q_{y0}(y) - k_{yx0}(\Delta_{y0}(y) - v(0, y)) \end{cases} \quad (17)$$

при $x = l$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(l, y) = -q_{xl}(y) - k_{xxl}(\Delta_{xl}(y) - u(l, y)) \\ \tau_{xy}(l, y) = -q_{yl}(y) - k_{yxl}(\Delta_{yl}(y) - v(l, y)) \end{cases} \quad (18)$$

Домножуючи співвідношення (17) та (18) на $\varphi_i(y)$ ($i = \overline{1, n}$) і інтегруючи по y отримуємо необхідні граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_{xxi}(0) = -q_{x0i} - k_{xx0}(\Delta_{x0i} - u_i(0)) \\ \tau_{xyi}(0) = -q_{y0i} - k_{yx0}(\Delta_{y0i} - v_i(0)) \\ \sigma_{xxi}(l) = -q_{xli} - k_{xxl}(\Delta_{xli} - u_i(l)) \\ \tau_{xyi}(l) = -q_{yli} - k_{yxl}(\Delta_{yli} - v_i(l)) \end{cases} \quad (19)$$

Гранична задача для системи звичайних диференціальних рівнянь (19) розв'язується чисельно за допомогою метода дискретної ортогоналізації С.К.Годунова.

З метою дослідження збіжності результатів розглянуто приклад:

Задано пластину $l=1$, $h=0,1$ під дією поперечного навантаження $q_- = 1, q_+ = 1$. Пластину розбито на 3, 5, 7, 9, 20 прямих, кожену пряму відповідно на 21, 11, 21, 21, 41 точку.

Висновок

Отримані результати показали високу збіжність, що підтверджується наведеним на (рис 4, 5, 6) графіками.

Слід зазначити, що в зоні опирання, а йдеться про защемлення, як відомо, з'являються місцеві дефекти, які порушують виконання умов теорії пружності (див. рис. 5, 6).

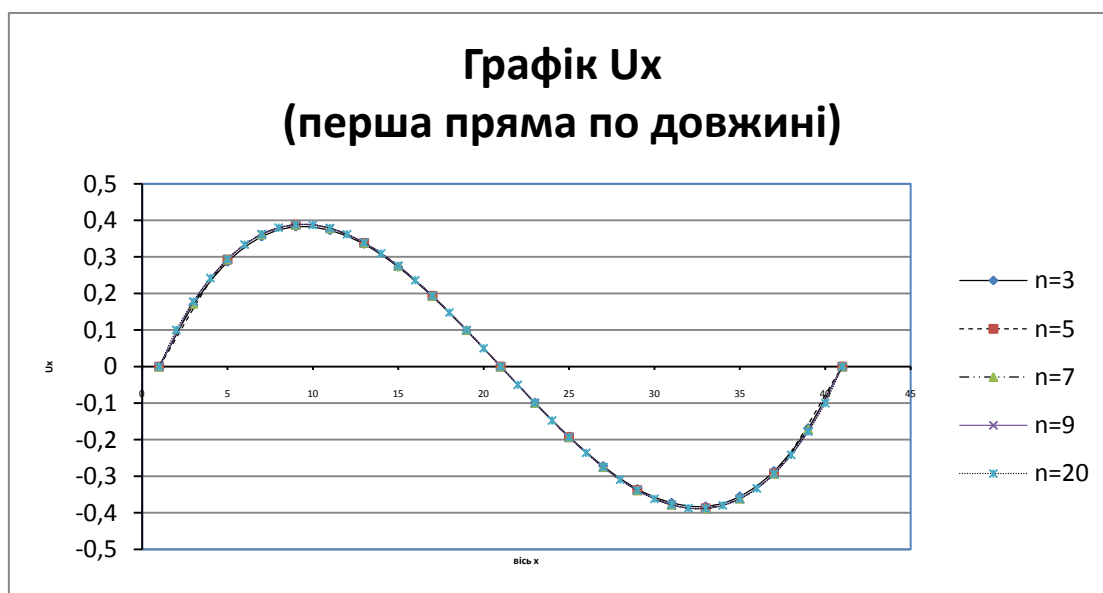


Рис. 4

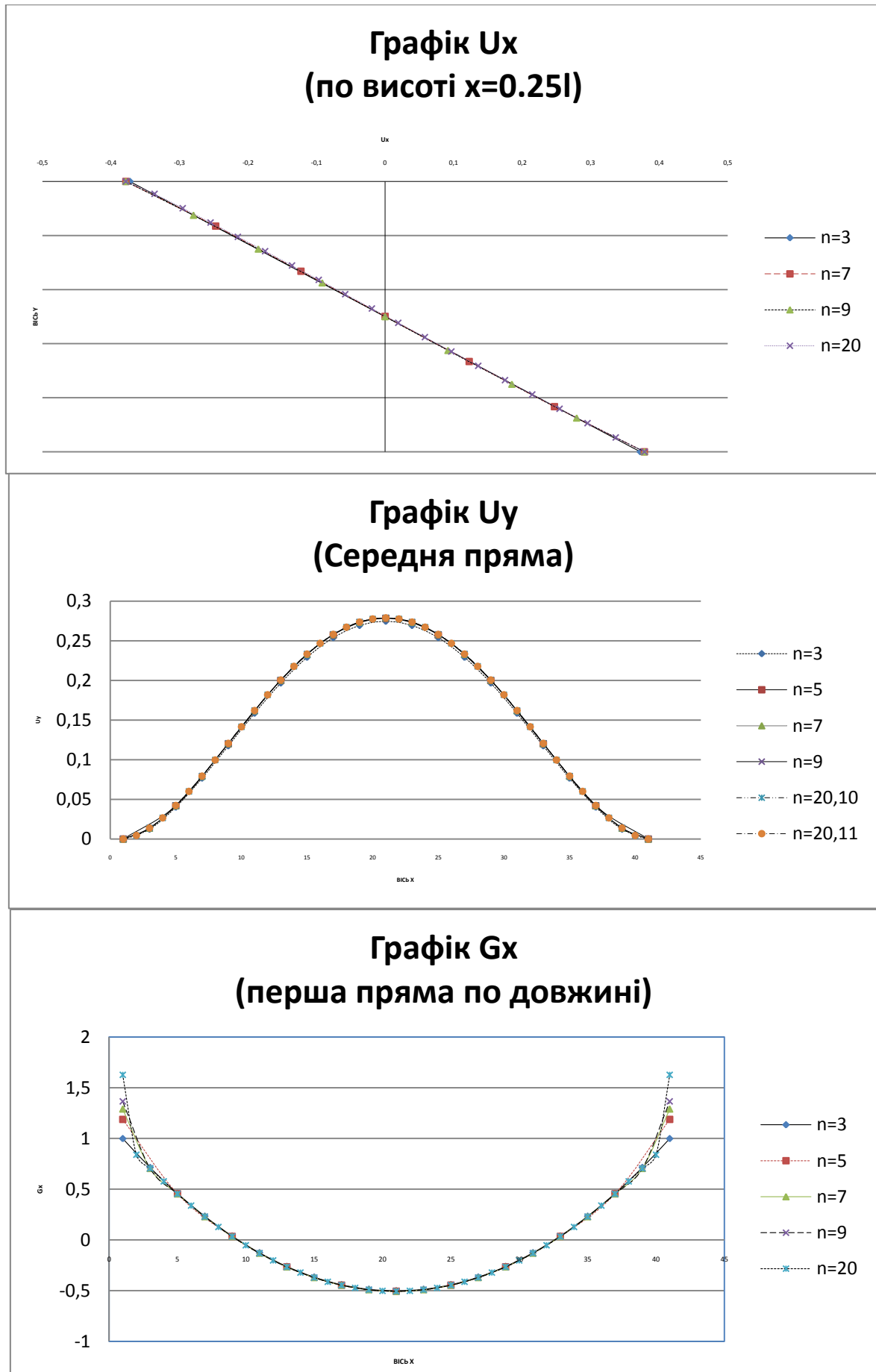
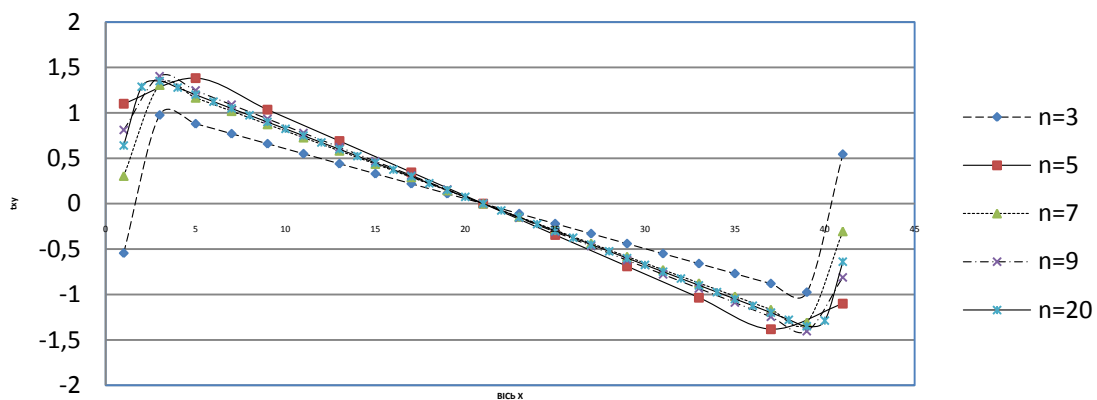
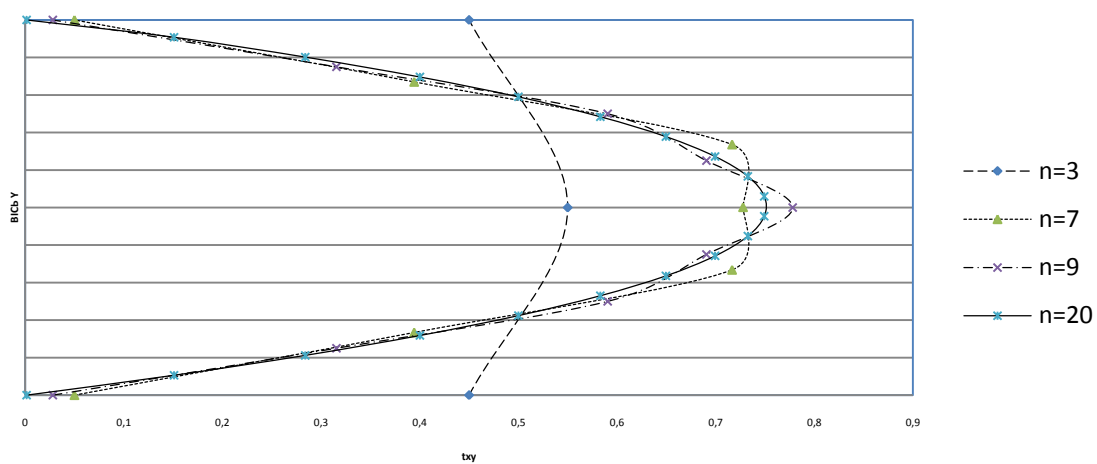


Рис.5

Графік T_{xy} (середня пряма)



Графік T_{xy} (по висоті $x=0.25l$)



Графік G_y (по висоті $x=0.25l$)

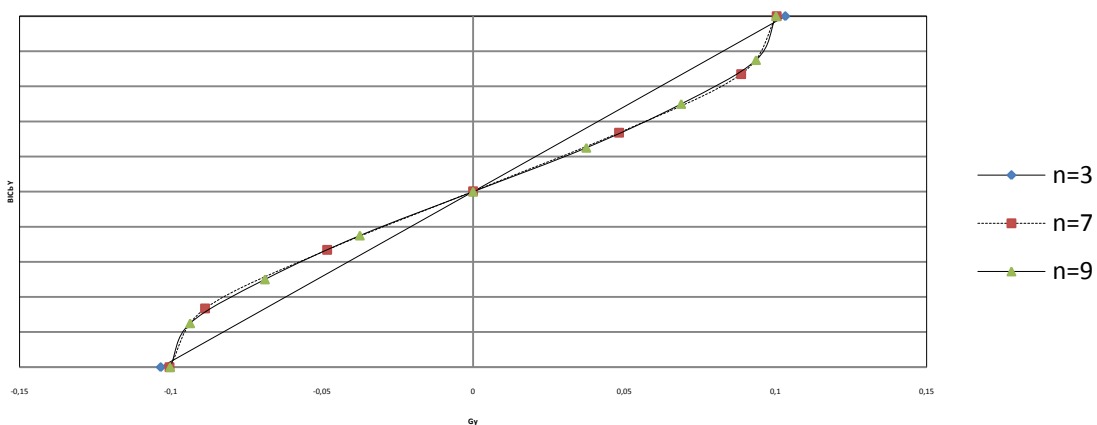


Рис 6

Література:

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171 - 174.
2. Чибіряков В.К., Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонок: Монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с: іл.
3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – 3-е изд., перераб. и доп. – М: «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы, 1979.-392 с.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. – 2-е изд., перераб. – М – 1957, 250 с.
5. Шкелев Л.Т., Станкевич А.Н., Пошивач Д.В., Корбаков А.Ф. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояния пространственных и пластинчатых конструктивных элементов: Монография. – К.: КНУСА, 2004. – 136с.

Аннотация

В данной статье рассматривается комбинированный метод для решения плоской задачи теории упругости (плоская деформация). Он включает эффективный численный метод решения краевых задач обычных дифференциальных уравнений – метод С.К.Годунова, классический вариант метода «прямых» с использованием обобщенного метода Бубнова-Галеркина для построения расчётных решений. Для наглядности возникающих при этом превращений применена индексная форма записи, которая широко используется в тензорном исчислении. Данный метод имеет большие перспективы для решения задач динамики и трехмерных задач.

Abstract

In this article the combined method is examined for the decision of flat task of theory of resiliency (flat deformation). He includes the numeral method of decision of regional tasks of ordinary differential equalizations is the method of S.K.Godunova, the classic variant of method of "lines" with the use of the generalized method of Bubnova-Galorkina for the construction of calculation decisions. For evidentness of arising up here transformations the index form of record, which used in a tensor calculation. This method has large perspective for the decision of tasks of dynamics and three-dimensional tasks.