

УДК 519.21

канд.ф-м.наук доц Філонов Ю.П.,  
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854,канд. ф-м. наук доц. Наголкіна З.І.,  
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176,

Київський національний університет будівництва і архітектури

## СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ РОБОТИ ВИТРАТНОГО РЕЗЕРВУАРУ

*Запропонована стохастична модель функціонування витратного резервуару, який забезпечує процес постачання і споживання деякого ресурсу. В основі цієї моделі лежить теорія вінеровських і напівмарковських процесів. Це дає можливість, використовуючи перехідні імовірності і властивість ергодичності системи визначити деякі її експлуатаційні і технічні характеристики.*

*Ключові слова. Витратний резервуар, випадковий процес, процеси відновлення, середнє квадратичне відхилення, вінеровський процес, напівмарковський процес, коефіцієнт варіації, нормальний розподіл, марковські моменти. ергодичні характеристики, ланцюг Маркова, ймовірності переходу, математичне сподівання, випадкове блукання, гаусівський процес.*

### **1. Вступ. Наочна модель постачання та споживання ресурсу, результати.**

В цій роботі досліджується процес забезпечення обмеженої території деяким життєво необхідним ресурсом - таким як вода, або рідке паливо, тощо. З цією метою розглядається резервуар певного об'єму, до якого надходить ресурс. Використання цього ресурсу відбувається з резервуару достатньо великою кількістю споживачів випадково у часі та об'ємах. Результати цієї роботи можна застосувати при територіальному плануванні водопостачання і енергоспоживання в залежності від площі території і кількості споживачів.

Опишемо наочно таку модель. Нехай ресурс для забезпечення потреб деякої території типу котеджного містечка, виробничої площі, тощо, розподіляється зі сховища до резервуару об'ємом  $V$ . Використання або споживання ресурсу – випадковий процес з середнім квадратичним відхиленням  $s$  за одиницю часу (година, місяць, квартал тощо). В середньому необхідний рівень споживання - обсяг  $V_1$  за період. Тому резервуар рівномірно наповнюємо з цією швидкістю, наприклад з центральної магістралі, при одночасному споживанні з тією ж середньою швидкістю.

При переповненні резервуару доступ ресурсу перекривається на час до встановлення об'єму  $V-V''$  за рахунок продовження споживання, а потім знов поновлюється надходження ресурсу. Коли ресурс в резервуарі закінчується, назвемо це «критичною ситуацією» - у сховище надходить додатковий об'єм  $V'$ , можливо і від іншого джерела (постачальника), а потім надходження і споживання ресурсу звичайним чином триває. Основний процес, що досліджується в роботі:

$v(t), t \geq 0$  - об'єм ресурсу в сховищі в момент часу  $t$ . В результаті дослідження для цієї наочної моделі побудована математична стохастична модель з використанням вінеровських та напівмарковських процесів. На фундаментальному рівні ряд стохастичних процесів роботи резервуарів розглянуто в монографії [1]. Головними математичними процесами тут є процеси з незалежними приростами [2], а також процеси теорії масового обслуговування [3][4] (полумарківські процеси, процеси відновлення). Конкретним методом в роботі є метод вкладених ланцюгів Маркова [5][6][7]. Для роботи з цією моделлю на інженерному рівні достатньо курсу [8]. Для ілюстрації можливостей цієї моделі отримано наступні результати.

**1.1.** Відношення часу, протягом якого ресурс постачається до резервуару до часу, протягом якого постачання перекрито дорівнює

$$K \sim (2 - a - b)k^{-2}, \quad (1.1)$$

(знак  $\sim$  означає асимптотичну рівність при збільшенні загального часу  $T$ ), де  $k = sV^{-0.5}V_1^{-0.5}$  - коефіцієнт варіації об'єму споживання ресурсу за плановий час  $T_n = \frac{V}{V_1}$  наповнення резервуару (див. далі формулу (2.1)).

$b = \frac{V''}{V}$ ,  $a = \frac{V'}{V}$  - долі об'ємів перекриття та додаткового наповнення сховища.

**1.2.** Кількість  $N_{кр}$  критичних ситуацій (коли закінчується ресурс в резервуарі), та загальна кількість  $N$  крайніх ситуацій в резервуарі (коли він або повний, або пустий) - знаходяться з формул

$$N_{кр} \sim \frac{T}{a(K+1)T_n} \quad (1.2)$$

$$N \sim T \frac{(a+b)}{ab(K+1)T_n} \quad (1.3)$$

Розроблену нижче стохастичну модель пропонуємо для використання як при аналізі забезпечення ресурсами старих, так і при проектуванні нових територій.

## 2. Математичне моделювання стохастичного процесу постачання та споживання ресурсу

Запишемо умови для математичного вибору процесу споживання.

Перша умова - стаціонарність приростів процесу споживання. Весь час  $T$ , узятий для дослідження, беремо таким, щоб не відбулося істотних змін на території, наприклад, істотної зміни населення містечка. Але і одиницю часу практично ми повинні брати таку, щоб були малі відхилення від стаціонарності. Для побутового споживання води треба зважати на коливання день-ніч або вихідний - робочий день. Для виробничої території часто можна брати невелику одиницю, але враховувати тільки робочий час, для виробництва з безперервним циклом можна брати весь час.

Друга умова - процес споживання гаусівський, тобто має нормальний розподіл. Відповідно до Центральної граничної теореми (ЦГТ) - це буде, наприклад, для водоспоживання, коли багато споживачів (або точок водовідбору) і немає кількох домінуючих, що мають негаусівський характер.

Третя умова- випадковий процес споживання має незалежні прирости. Процеси з незалежними приростами часто використовуються в теорії масового обслуговування (складно-пуассонівський процес, процеси Леві), а процес споживання може бути результатом багатьох подібних процесів. З практичної точки зору одиниця часу повинна бути досить великою для того, щоб виконувалася умова слабкої корельованості (умова слабкої корельованості - це наближення до нуля кореляції далеко віддалених за часом випадкових елементів), а, як відомо, некорельованість нормальних випадкових величин еквівалентна їх незалежності.

Будемо вважати, що ці три умови виконуються, тому процес споживання ресурсів вважаємо одновимірним броунівським або вінеровським процесом [8][2]. Графіки споживання ресурсу за послідовні періоди часу - це так звані часові ряди, вивченням яких займається економетрика [9]. Там в процесах є не випадкова складова - тренд, та випадкова складова, як правило - це білий шум. Наш процес споживання якраз відповідає цій ситуації. Практичну перевірку можна провести аналізом часових рядів [9]. Тренд споживання задається величиною  $V_1$  (див. п.1). Таким чином, якщо в момент  $t_0$  і протягом деякого часу після відбувається і поставка (тільки від основного постачальника), і споживання ресурсу, то для такого проміжку часу, як результат попередніх міркувань, можна написати рівність  $v(t_0 + t) = v(t_0) + w_t$ , де  $v(t)$  - об'єм ресурсу в резервуарі в момент  $t$ ,  $w_t$  - вінеровський процес з параметрами

$Mw_t = 0$ ,  $Dw_t = s^2 t$  (тренд споживання компенсується відповідним постачанням).

Плановий час наповнення резервуару дорівнює  $T_H = \frac{V}{V_1}$ . За означенням коефіцієнта варіації обчислюємо квадрат коефіцієнта варіації об'єму споживання ресурсу за плановий час наповнення резервуару:

$$k^2 = V^{-2} Dw_{T_H} = V^{-2} s^2 \frac{V}{V_1} = \frac{s^2}{VV_1},$$

$$\text{Звідки } s^2 = k^2 VV_1. \quad (2.1)$$

Моделюємо процес  $v(t)$  динаміки об'єму ресурсу в сховищі на усій осі часу. Далі будуть визначені послідовні випадкові моменти  $t_n$  часу, коли надходить додатковий ресурс (або після критичної ситуації, або відкривається доступ ресурсу в резервуар після перекриття його поставки). Тобто,  $v(t_n)$  обов'язково дорівнює відповідно  $V'$ , або  $V - V''$ . Моменти  $t_n$  - це моменти регенерації, поновлення броунівського характеру процесу  $v(t)$ . Будемо використовувати послідовність  $w(t, n)$  однаково розподілених незалежних вінеровських процесів типу  $w_t$  для рекурентного визначення моментів  $t_n$  та послідовності відрізків траєкторії процесу  $v(t)$  на проміжках  $[t_n, t_{n+1}]$  (номери  $l_n$  використаних вінеровських процесів теж визначимо рекурентно).

Запишемо такі початкові значення:  $t_0=0$ ,  $v(t_0) = V - V''$ ,  $l_0 = 0$ . Початкове значення  $v(t_0)$  процесу обране з міркувань зручності. Оскільки ми вивчатимемо ергодичні характеристики, то початкове значення є несуттєвим, воно забувається.

Позначимо  $t_B$ - час виходу процесу  $v(t + t) = v(t_n) + w(t, n)$  з інтервалу  $(0; V)$  (це і є визначення процесу  $v(\cdot)$  на проміжку  $0 < t < t_B$ ). В твердженні додатку записано середній час досягнення кордонів. Тому для часу  $t_B$  з врахуванням (1) справедливо наступне

$$m_{1B} = M\{t_B / v(t_n) = V'\} = (V - V')V's^{-2} = a(1 - a)T_H k^{-2}, \quad (2.2)$$

$$m_{2B} = M\{t_B / v(t_n) = V - V''\} = (V - V'')V''s^{-2} = b(1 - b)T_H k^{-2},$$

де  $m_{1B}, m_{2B}$ - умовні математичні сподівання часу виходу, якщо відомо стан процесу  $v(t_n)$ , де  $a = \frac{V'}{V}$ ,  $b = \frac{V''}{V}$ .

Визначаємо також випадкову величину  $I$ :  $I=0$  або  $I=1$  відповідно до згаданого тільки що виходу процесу  $v(\cdot)$  з інтервалу  $(0; V)$  через точку  $0$  або  $V$ . При перекритті поставки ресурсу (тобто коли  $I=1$ ) визначаємо час перекриття  $t_-$

як час досягнення процесом  $tV_1 + w(t, l_n + 1)$  рівня  $V''$ . Прирівнявши цей процес при  $t = t_-$  значенню  $V''$ , та переходячи в цьому рівнянні до середніх (враховуючи марковський характер  $t_-$  та рівність  $Mw_t=0$ ) - отримуємо середнє значення часу одного перекриття постачання ресурсу:

$$m_- = Mt_- = \frac{V''}{V_1} \quad (2.3)$$

яке співпадає з тим, яке було б при не випадковому споживанні.

Наближено визначаємо динаміку процесу  $v(t)$  під час перекриття надходження ресурсу в резервуар Використовуємо лінійну апроксимацію. Відхилення від лінійності несуттєві для подальшого. Таким чином

$$v(t_n + t_b + t) = V - \frac{t}{t_-} V''.$$

Пишемо необхідні умови для продовження процесу на наступний часовий проміжок

$$t_{n+1} = t_n + t_b + It_-, \quad v(t_{n+1}) = V'(1 - I) + (V - V'')I, \\ l_{n+1} = l_n + 1 + I.$$

Процес  $v(t)$  не є марковським. Визначимо супутні процеси: марковський ланцюг  $z_n, n = 0, 1, \dots$  і напівмарковський процес  $z(t), t \geq 0$ , які визначаються типом проміжку  $[t_n; t_{n+1})$ . Якщо це проміжок після спустошення резервуара і подачі додаткового ресурсу, то  $z_n = 1$ . Якщо це проміжок після перекриття подачі ресурсу, то  $z_n = 2$ . Тобто  $z_n = 1$  або  $2$ , якщо  $v(t_n)$  дорівнює відповідно  $V'$  або  $V - V''$ ,  $z(t) = z_n$  при  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ .

Моменти  $t_n$  є марковськими для процесів  $v(t)$  та  $z(t)$ , а ланцюг  $z_n$  є вкладеним ланцюгом Маркова для процесу  $z(t)$ . Усі ці твердження про марковість впливають з описаної вище рекурентної процедури побудови процесу. Ймовірності переходів вкладеного марковського ланцюга відповідають ймовірностям виходу вінеровського процесу з проміжку вправо і вліво. Запишемо ці ймовірності:

$$p_{11} = \frac{V - V'}{V}, \quad p_{12} = \frac{V'}{V}, \quad p_{21} = \frac{V''}{V}, \quad p_{22} = \frac{V - V''}{V} \quad (2.4)$$

(див. твердження математичного додатку).

Далі знайдемо цілий ряд величин використовуючи звичайну техніку марковських процесів. Розподіл стаціонарних ймовірностей  $\pi = (\pi_1, \pi_2)$  цього ланцюга знаходимо з відомих формул

$$\pi P = \pi, \pi_1 + \pi_2 = 1, \text{ де } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

матриця перехідних ймовірностей. Маємо:

$$\pi_1 = \frac{V''}{V'+V''} = \frac{b}{a+b}V, \quad \pi_2 = \frac{V'}{V'+V''} = \frac{a}{a+b} \quad (2.5)$$

Де  $b = \frac{V''}{V}$ ,  $a = \frac{V'}{V}$  – долі об'ємів перекриття та додаткового наповнення резервуару.

Час сидіння в стані процесу  $z(t)$  а, точніше, час одного кроку вкладеного ланцюга Маркова позначимо  $\tau$ . Він дорівнює  $\tau = t_{n+1} - t_n = t_B + It_-$ . Запишемо, також, середні часи одного кроку для кожного стану, враховуючи що подія  $I=1$  збігається з подією  $z_{n+1} = 2$  (ці події відбуваються при перекритті ресурсу):

$$\begin{aligned} m_1 &= M\{\tau/v(t_n) = V'\} = m_{1B} + p_{12}m_-, \\ m_2 &= M\{\tau/v(t_n) = V - V''\} = m_{2B} + p_{22}m_-. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Підставляючи (2.4) в (2.6) одержимо

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{1B} + p_{12}m_-, = a(1-a)T_H k^{-2} + abT_H \\ m_2 &= m_{2B} + p_{22}m_- = b(1-b)T_H k^{-2} + (1-b)T_H \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далі без деталізації використовуємо ергодичні властивості марковських та напівмарковських процесів.

Розглянемо  $n$  кроків вкладеного ланцюга Маркова, час  $t_n$  і, також, увесь час  $T$ . Нехай  $T_{n+}$  загальний час до моменту  $t_n$  протягом якого відбувалося постачання ресурсу від основного постачальника а  $T_+$  - час постачання вже до моменту  $T$ . Також нехай  $T_{n-}$  загальний час до моменту  $t_n$ , протягом якого постачання було перекрито, а  $T_-$  – час перекриття вже до моменту  $T$  ( $T = T_+ + T_-$ ). Позначимо  $m_{n+}$  та  $m_{n-}$  - математичні сподівання для  $T_{n+}$  та  $T_{n-}$  і, відповідно до ергодичних властивостей напівмарківських процесів, запишемо для них асимптотику при  $n \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} m_{n+} &\sim n(\pi_1 m_{1B} + \pi_2 m_{2B}) \\ m_{n-} &\sim n(\pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22})m_- = n\pi_2 m_- \end{aligned} \quad (2.8)$$

Підставляючи в (2.8) значення з (2.2-5) після спрощень отримаємо:

$$m_{n+} \sim n \frac{ab}{a+b} T_H k^{-2} (2 - a - b),$$

$$m_{n-} \sim n \frac{ab}{a+b} T_H. \quad (2.9)$$

Із співвідношення (2.9) маємо:  $m_{n+} \sim m_{n-} (2 - a - b) k^{-2}$ . Оскільки, за граничними теоремами для марковських процесів

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_+}{T_-} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+}}{T_{n-}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n+}}{m_{n-}}, \text{ то коефіцієнт}$$

$$K = (2 - a - b) k^{-2} \quad (2.10)$$

показує граничне значення відношення часу, протягом якого ресурс постачається, до часу, протягом якого постачання перекрито. Доведено твердження 1.1 цієї роботи.

Перейдемо до твердження 1.2 цієї роботи. Нехай  $N_1$ - кількість влучень у стан 1 за  $n$  кроків вкладеного ланцюга Маркова, а  $N$ - кількість кроків вкладеного ланцюга Маркова за час  $T$ . Знову використовуючи ергодичні властивості марковських та напівмарковських процесів формули (2.9), одержимо при  $T \rightarrow \infty$ :

$$T = (T_+ + T_-) \sim m_{n+} + m_{n-} \sim$$

$$\sim N \frac{ab}{a+b} T_H k^{-2} (2 - a - b + k^2) = N \frac{ab}{a+b} T_H (K + 1) \quad (2.11)$$

Таким чином із (2.11) маємо необхідний результат (1.3) вступу:

$$N \sim T \frac{(a+b)}{ab(K+1)T_H} \quad (2.12)$$

А, враховуючи, що  $N_1 \sim n\pi_1$ , і, відповідно,  $N_{кр} \sim N\pi_1$ , то з (2.12) та (2.5) одержимо останній необхідний результат (1.2) вступу:

$$N_{кр} \sim \frac{T}{a(K+1)T_H}.$$

### 3. Додаток. Дискретні та неперервні блукання на прямій.

#### Дискретне блукання.

Просте блукання Бернуллі  $V_n, n=0,1,2,\dots$  - це марківський ланцюг на множині цілих чисел з перехідними ймовірностями  $p_{i,i+1} = \frac{1}{2}$ . За формулою повної ймовірності для ймовірностей  $p_x$  виходу марковського ланцюга з початковим станом  $x$  вправо з проміжку  $(0;V)$  ( $0 < x < V$ ) справедлива рівність

$p_x = \frac{1}{2} (p_{x-1} + p_{x+1})$ ,  $p_0 = 0$ ,  $p_V = 1$ , із якої маємо розв'язок  $p_x = \frac{x}{V}$ . Аналогічно для середнього часу  $m_x$  виходу з проміжку цього марківського ланцюга справедлива рівність

$$m_x = 1 + \frac{1}{2} (m_{x-1} + m_{x+1}), m_0 = m_V = 0, \text{ із якої отримуємо } m_x = x(V - x).$$

### Неперервне блукання

Розглянемо броунівський рух, вінеровський процес, який зветься також неперервним випадковим блуканням і який є граничним процесом для звичайного простого блукання Бернуллі. Нехай є процес  $v_t^0 = s n_0^{-1/2} B_{[tn_0]}$  (зміна масштабів часу та простору для простого блукання), де  $B$  - розглянуте в вище дискретне блукання ( $B_0=0$ ), [...] - ціла частина числа. При  $n_0 \rightarrow \infty$  він слабо (за розподілом) збігається до гаусівського процесу  $w_t$  з незалежними стаціонарними приростами з середнім 0 та дисперсією  $s^2 t$ . Граничним переходом із дискретного випадку одержуємо твердження:

**Твердження.** Для процесу  $x + w_t$  середній час виходу з проміжку  $(0; V)$  ( $0 < x < V$ ) дорівнює  $x(V - x)s^{-2}$ , а ймовірність виходу вправо з цього проміжку дорівнює  $\frac{x}{V}$ .

### ЛІТЕРАТУРА

1. N.U.Prabhu STOCHASTIC STORAGE PROCESSES, Queues, Insurance Risk and Dams, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1980.
2. Скороход А.В., Случайные процессы с независимыми приращениями "Наука," Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1986 – 320 с.
3. L. Kleinrock, QUEUEING SYSTEMS VOLUME I: THEORY, University of California, Los Angeles, 1975.
4. Саати Т. Л. Элементы массового обслуживания и ее приложения ,Directmedia, 2016 ISBN 5447580110, 9785447580117. - 502с
5. Suhov Y. and Kelbert.M., Probability and Statistics by Example: Volume 2, Markov Chains, Cambridge University Press, 2008, ISBN: 978-0-521-84767-4.
6. Nummelin E., General irreducible Markov chains and nonnegative operators, Cambridge University Press, London, 1984.
7. Meyn.S and Tweedie R.L., Markov chains and stochastic stability, Springer-Verlag, New York, 1993.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Е.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: Учебное пособие/ - М.: КноРус, 2011. - 448 с.

9. Носко В.П. Эконометрика. Кн. I. Ч. 1 ,2 ; М., издательский дом "Дело", 2011.( ISBN 978-5-7749-0654-3).

канд.ф-м.наук, доцент Филонов Ю.П.,  
канд.ф-м.наук, доцент Наголкина З.И.,

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

## **СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ РАСХОДНОГО РЕЗЕРВУАРА**

Предлагается стохастическая модель функционирования расходного резервуара, который обеспечивает процесс поставки и потребления некоторого ресурса. В основе этой модели лежит теория винеровских и полумарковских процессов. Это дает возможность, используя переходные вероятности и свойства эргодичности соответствующей системы, определить некоторые эксплуатационные и технические характеристики.

Ключевые слова. Расходный резервуар, случайный процесс, процессы восстановления, среднее квадратичное отклонение, винеровский процесс, полумарковский процесс, коэффициент вариации, нормальное распределение, марковские моменты, эргодические характеристики, цепь Маркова, вероятности перехода, математическое ожидание, случайное блуждание, гаусовский процесс.

Ph.D., Associate Professor Filonove Y.P.,

Ph.D., Associate Professor Nagolkina Z.I.,

Kyiv National University of Construction and Architecture

## **STOCHASTIC MODEL OF THE OPERATION OF THE SUPPLY TANK**

A stochastic model of the functioning of the supply tank, which provides the process of supply and consumption of a certain resource, is proposed. The basis of this model is the theory of Wiener and semi-Markov processes. This makes it possible, using the transition probabilities and the ergodicity properties of the corresponding system, to determine certain operational and technical characteristics.

Keywords. Feed tank, random process, recovery processes, standard deviation, Wiener process, semi-Markov process, coefficient of variation, normal distribution, Markov moments, ergodic characteristics, Markov chain, transition probabilities, expectation, random walk, Gauss process.