

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА, АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Практикум до самостійної роботи

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 192 «Будівництво та цивільна інженерія», 193 «Геодезія та землеустрій», 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології»

Київ 2025

УДК 511+512+514+517

B55

Укладачі: Ю. П. Філонов, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
А. А. Кириченко, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
З. І. Наголкіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
О. М. Шутовський, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент: О.В. Забарило, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск Н. В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 4 від 29 листопада 2024 року.

В авторській редакції

Вища математика. Алгебра, аналітична геометрія, диференціальне
B55 числення [Електронний ресурс] : практикум до самостійної роботи /
уклад.: Ю. П. Філонов та ін. – Київ : КНУБА, 2025.– 35 с.

Містить завдання для самостійного опрацювання до курсу вищої математики.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 192 «Будівництво та цивільна інженерія», 193 «Геодезія та землеустрій», 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології».

© КНУБА, 2025

Загальні положення

Основою вивчення курсу вищої математики студентами інженерних спеціальностей є самостійна (аудиторна та домашня) праця під керівництвом викладача.

Цей практикум розрахований на постійну індивідуальну роботу вздовж першої половини курсу вищої математики (до інтегрального числення) для спеціальностей 192 «Будівництво та цивільна інженерія», 193 «Геодезія та землеустрій», 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології». Методична розробка складається з тем вищої алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу (диференціальне числення). Завдання впорядковані тематично за розділами, на початку яких сформульовані назви підтем (зміст тем та підтем є в стандартних підручниках з вищої математики та в методичних посібниках і, згідно з навчальною програмою, викладається на лекціях). Далі йдуть теоретичні питання по темі, а потім вже задачі. Кількість теоретичних питань (кількість варіантів) для кожної підтеми - 32, що, зазвичай, достатньо для студентської групи. Ці питання не завжди стандартні, направлені на виявлення рівня розуміння студентом матеріалу, і викладач пропонує їх окремо від задач, за власною системою розподілу варіантів.

Умови задач залежать від набору параметрів a, b, c, d . Цей набір називається індивідуальним шифром, кожен з параметрів дорівнює одному з чисел 1, 2, 3, 4. Кожен студент одержує власний шифр на весь учбовий рік від викладача і вказує його на початку кожної роботи, яку він здає. Умова кожної задачі переписується з заміною значень a, b, c, d на числа власного шифру. Так, якщо власний шифр є 3, 1, 2, 4, то його умова задачі 6.3.7 з кривою, яка задана рівнянням $ax + byx^{c+1} + y^{2d+1} = 1$, буде з рівнянням $3x + yx^3 + y^9 = 1$.

Таким чином для кожної задачі маємо $4^4 = 256$ варіантів кожної задачі. Задачі для кожної з робіт компонуються викладачами. Ці роботи можна давати як домашні завдання, так і для виконання їх в аудиторії (час для виконання пропонувати відповідно об'єму роботи). Цю розробку можна пропонувати студентам інших спеціальностей, а, також, компонувати з них семестрові контрольні роботи.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ВИЩОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1. Множини, числові множини. Комплексні числа, форми їх запису, дії з ними

1.1. Підтеми

1. Координати на прямій та площині.
2. Множини, операції, відношення, математичні структури, алгебри.
3. Числові множини. Числові поля. Поле комплексних чисел.
4. Алгебраїчна, тригонометрична та показникова форми комплексних чисел та дії з числами в цих формах.
5. Знаходження коренів з комплексних чисел.
6. Багаточлени (многочлени) та їх корені, ділення багаточленів, теорема Безу.
7. Основна теорема алгебри. Розклад багаточленів на множники над полем дійсних і над полем комплексних чисел.

1.2. Теоретичні питання

1. Нейтральний елемент для дії - це такий елемент, дія якого на будь-якій іншій елемент його не змінює. В елементарній математиці для дії додавання дійсних функцій (функції задані на проміжку), яка функція буде нейтральним елементом? А для множення функцій?
2. Для операції перетину множин в сукупності усіх підмножин даної множини, який елемент є нейтральним (див.1)?
3. Що таке лінійний порядок, і чи є відношення «підмножина A є підмножиною підмножини B » лінійним порядком на сукупності усіх підмножин даної множини?
4. Для множини парних цілих чисел розглядається дві операції - додавання і множення. Напишіть для них закони асоціативності, комутативності та дистрибутивності, якщо вони виконуються, та нейтральні елементи, якщо вони є.
5. Для операції об'єднання множин в сукупності усіх підмножин даної множини, який елемент є нейтральним (див.1)?

6. У структурі

$$S = \{M|*, \ll\}$$

операція $*$ асоціативна та комутативна, а знак \ll позначає лінійний порядок. Запишіть для них вказані закони операції та закони порядку (з умовою лінійності).

7. Покажіть, що відношення ділимості для натуральних чисел є порядком, але не є лінійним порядком.

8. Бінарне відношення для точок на координатній площині нехай таке: «абсциса першої точки не перевищує абсциси другої». Чи є це відношення антисиметричним? Перевірте інші аксіоми лінійного порядку. (Тут ми маємо так званий лінійний квазіпорядок. Простими словами, відношення «одна точка правіше іншої точки» для звичайної шкільної декартової площини з однією горизонтальною координатною віссю є лінійним квазіпорядком точок на площині.)

9. Чи має нейтральний елемент для дії перетину множин в сукупності всіх обмежених множин на площині (див. 1)?

10. Є тотожність з буквами, що позначають множини і діями об'єднання та перетину. Тотожність залишиться справедливою, якщо дії перетину замінити на дії об'єднання та навпаки. Проілюструйте це на прикладі законів асоціативності, комутативності та дистрибутивності.

11. Множина з асоціативною операцією, для якої є нейтральний елемент і для цієї операції є обернена операція (дізнайтеся, що таке обернена операція), називається групою відносно цієї операції. Чи є групами відносно додавання наступні множини з елементарної математики

$$Q, Z, N?$$

12. Чому дорівнює вираз з уявною одиницею

$$i + i^{27} + 1.$$

13. Показати на комплексній множині площині множину точок z з умовою

$$\bar{z}z \geq 1.$$

14. Якій геометричній зміст модуля різниці двох комплексних чисел? Проінтерпретуйте нерівність трикутника, яка відома з шкільного курсу геометрії, нерівністю з комплексними числами.

15. Чому дорівнює

$$(\cos\varphi - i\sin\varphi)e^{i\varphi}$$

16. Чому множина коренів парної степені з комплексного числа симетрична відносно початку координат?

17. Скільки всього значень на комплексній площині має вираз

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3}?$$

18. Чи є групами відносно множення наступні множини (див.11)
 $Q \setminus \{0\}, Z \setminus \{0\}, N \setminus \{0\}$?

19. Які осі симетрії на комплексній площині має множина коренів непарної степені з дійсного числа, і які осі координат є серед них?

20. Показати на комплексній множині площині множину точок z з умовою

$$\operatorname{Arg}z = \operatorname{Arg}\bar{z}.$$

21. Якщо операція в групі комутативна, то група називається абелевою. Чи є множина комплексних коренів даного ступеня з числа одиниця абелевою групою відносно множення (див.11)?

22. Які дійсні корні і якої кратності має многочлен

$$(x^2 - 4)(x^6 - 64)?$$

23. Де на комплексній множині площині знаходяться точки z з умовою

$$\operatorname{Arg}z = \pi k + \frac{\pi}{4} \left(\frac{k}{2} \in Z \right)?$$

24. Множина коренів деякого многочлена, у якого немає кратних коренів, є правильним шестикутником з центром в т. $(0,1)$ на комплексній площині. Чому дорівнює цей многочлен, якщо число нуль є серед його коренів?

25. Многочлен третьої степені ділиться на $(x^2 - 1)$ і на $(x - 1)^2$. Чому дорівнює цей многочлен?

26. Поясніть геометрично твердження, що многочлени непарної степені з дійсними коефіцієнтами обов'язково мають дійсний корінь?

27. Які числові множини називаються полями? Множина чисел виду $p + q\sqrt{2}$, де p, q раціональні числа буде полем?

28. Чому

$$\sqrt{z/\bar{z}} = \pm z/|z|?$$

29. Чи є групою відносно множення множина (без нуля) комплексних чисел з раціональними дійсними та уявними частинами (див. 11).

30. Чи є множина усіх комплексних коренів з одиниці абелевою групою відносно множення (див. 11, 21)?

31. Дві протилежні вершини правильного восьмикутника лежать у точках 1 і 3 на осі абсцис. Написати багаточлен, у якого немає кратних коренів, усі корені якого збігаються з вершинами цього восьмикутника.

32. Які числові множини називаються полями? Приведіть приклад числового поля, яке містить уявну одиницю, але не співпадає з полем комплексних чисел.

1.3. Задачі

1. Дано загальну множину Ω та її частини A, B , які задані нерівностями:

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a + c, 0 \leq y \leq d + b\},$$

$$A = \{(x, y) \in \Omega \mid x \leq c\},$$

$$B = \{(x, y) \in \Omega \mid y \leq d\}.$$

Записати за допомогою класифікатора, словами та нерівностями, множини:

$$AB, A \cup B, A \setminus B, (A \cup B)^c$$

(доповнення береться в загальній множині).

Усі множини показати на координатній площині.

2. Комплексні числа $z_1 = a + di$ та $z_2 = b - ci$ показати на комплексній площині. Виконати дії

$$cz_1 \pm z_2, z_1 z_2, z_1 / z_2$$

алгебраїчно і результати показати на комплексній площині.

3. Знайти всі корені ступеня $n = (6 - d + a) \wedge 6$ з комплексного числа $z = b + (2c - 2d + 1)i$ та показати їх на комплексній площині (дія \wedge є вибором меншого (або спільного) значення з двох значень).

4. Задане комплексне число

$$z_0 = b + ci.$$

Показати на комплексній площині множини чисел z , які задовольняють відповідні умови

- i. $0 < |z - z_0| \leq d$;
- ii. $\frac{\pi}{c+d} < \arg \left(z e^{i\frac{\pi}{a+b}} \right) \leq \frac{\pi}{c}$;
- iii. $|z - d| = |z - z_0|$;
- iv. $|z - d| : |z - z_0| = 2 + a. \quad (*)$

Які з цих множин обмежені?

5. Розділити багаточлен на багаточлен у стовпчик, написати дві форми відповіді:

- a) $(x^5 + bx^c - dx^d + a) : (x^2 + c)$;
- б) $(x^3 + ax^2 + 5bx - c) : (x + d)$.

6. Розкласти багаточлен на множники а) над полем комплексних чисел; б) над полем дійсних чисел:

$$x^3 + (2a - 2d - 2c + 1)x^2 + (b + c^2 - 2c + 4dc - 4ac)x + 2ac^2 - 2dc^2 + 2ab - 2db + c^2 + b.$$

Знайти різницю квадратів комплексних коренів багаточлена.

2. Лінійна алгебра

2.1. Підтеми

1. Точковий простір, декартова система координат, векторний простір, базис, координати. Простори $R^n, n = 1, 2, \dots$
2. Визначник, його обчислення та властивості.
3. Лінійна залежність векторів, базис та ранг системи векторів.
4. Матриці, дії з ними, зокрема, добуток матриць, обернена матриця.
5. Скалярний добуток у просторах, його властивості. Евклідовий простір, прямокутна декартова система координат.
6. Системи лінійних рівнянь, матричний запис системи, матричний метод розв'язання системи рівнянь.
7. Метод Крамера розв'язання системи лінійних рівнянь.
8. Метод Гауса розв'язання системи лінійних рівнянь.
9. Загальний розв'язок системи однорідних лінійних рівнянь і системи неоднорідних лінійних рівнянь.

2.2. Теоретичні питання

1. Скільки нерівностей трикутника записати в алгебраїчній і координатній формах у векторному та точковому просторах.
2. Яка дія з матрицями асоціативна, але не комутативна ?
3. На скільки різних одиничних матриць можна помножити не квадратну матрицю і як, що в результаті?
4. Що відбувається з доповнювальними мінорами матриці при транспонуванні?
5. Коли до матриці можна додати свою ж транспоновану?
6. Яка вимірність лінійного простору многочленів до четвертої степені включно ? Написати базис.
7. З яким лінійним простором, знайомим вам, можна взаємно 1-значно та лінійно співставити множину лінійних функцій від 2-х змінних і як?
8. Чи є лінійним простором множина многочленів степені менше ніж 5, які є парними функціями і чому? Написати базис, якщо є.
9. Чи є функції $(x + 1)^i$ в степені i , $i=0,1,2$, базисом простору квадратних виразів відносно x (степенів не вище 2) і чому?
10. Яку вимірність має лінійний простір усіх многочленів, написати базис.
11. Який результат одержимо, коли дану матрицю помножимо на транспоновану до приєднаної?
12. Чому дорівнює сума добутків елементів суми першого та другого рядочків на алгебраїчні доповнення елементів першого рядочка?
13. Що можна сказати про добуток двох верхніх трикутних матриць одного порядку?
14. Що відбудеться з визначником матриці з комплексними елементами при заміні цих елементів на комплексно спряжені ?
15. Елементи даної матриці замінили на комплексно спряжені. Як зміниться обернена матриця?
16. Для кожної з двох матриць відома транспонована до приєднаної матриці. Як знайти матрицю, приєднану до добутку цих двох матриць?
17. Якщо взяти означення визначника N -го порядку, то скільки добутків елементів визначника буде в означенні визначника четвертого порядку?

18. Що відбудеться з добутками елементів визначника третього порядку при знаходженні його за правилом Саруса, якщо два стовпчика поміняти місцями?

19. Є матриця розміром 5×10 , що можна сказати про її ранг по стовпчикам?

20. Перемножуються дві матриці. Що можна сказати про ранг добутку цих матриць, якщо відомі ранги матриць, які перемножуються?

21. Невироджена матриця четвертого порядку, множиться на матрицю розміром 4×7 , яка має ранг чотири. Чому дорівнює ранг матриці добутку і чому така відповідь?

22. Матриця системи має розміри 4×5 , що можна сказати про множину розв'язків цієї системи?

23. Перевірити формули Крамера через матричний запис лінійної системи.

24. Є два розв'язки системи з невід'ємними вільними членами і сума їх розв'язків теж розв'язок. Що можна сказати про вільні члени цієї системи і яка назва такої системи ?

25. В системі з 3-ома невідомими сума коефіцієнтів при невідомих в кожному рівнянні дорівнює вільному члену, що можна сказати про розв'язки цієї системи?

26. Методом Гауса система з вісьмома невідомими зведена до трапецеїдального вигляду, у якому сім рядочків. Яка вимірність простору розв'язків?

27. Методом Гауса матриця системи зведена до трикутного вигляду, скільки розв'язків має система?

28. Вектор-стовпчик вільних членів системи ненульовий та ортогональний до вектор-стовпчиків коефіцієнтів при невідомих. Яка множина розв'язків цієї системи?

29. Матриця системи з трьома невідомими (які інтерпретуються як координати точок у просторі) складається з п'яти рядочків і має ранг 1. Що геометрично представляє з себе множина розв'язків?

30. Квадратна матриця горизонтальною та вертикальною лініями розбита на чотири матриці, з яких друга та третя - нульові, а перша та четверта - квадратні (зліва направо перша друга і нижче третя четверта). Як зв'язані визначники трьох ненульових матриць? Пояснити.

31. Чи можна при розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гауса різними способами одержати різну кількість довільних сталих і чому?

32. В трьохвимірному просторі задана неортонормована система координат (є матриця попарних скалярних добутків векторів базису). Як по координатах двох векторів записати їх скалярний добуток у матричному вигляді?

2.3. Задачі

1. Задано два вектори:

$\vec{m} = (2, a, -a, -a, \sqrt{2})$, $\vec{n} = (-ab, b, -b, \sqrt{2}b, ba)$. Знайти довжини векторів \vec{m}, \vec{n} , скалярний добуток векторів \vec{m}, \vec{n} , знайти кут між векторами \vec{v} та \vec{m} , де $\vec{v} = \sqrt{2}b\vec{m} + \sqrt{3}\vec{n}$.

2. Дано матриці M та K

$$\begin{pmatrix} c & -b & c+b \\ 5-c & 5+b & -b-c \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = M,$$

$$\begin{pmatrix} a+c & a & a \\ b & b & -b \\ 2b & 2b & d-2b \end{pmatrix} = K.$$

i. Знайти визначник матриці M за правилом Саруса і розкладом за третім стовпчиком (безпосередньо та з попереднім спрощенням елементарними діями з рядками).

ii. Те ж саме для матриці K , але узяти третій рядок.

iii. Знайти суму $M+3K$, добутки MK , KM цих матриць, визначники добутків та перевірити комутативність множення матриць та теорему про визначник добутку матриць.

iv. Дано ще дві точки

$$A(a-d, -b-d, c+d), B(a, -b, c)$$

Знайти вектор \overline{AB} – записати в координатах рядком та у транспонованому вигляді – стовпчиком, та знайти добутки на матрицю M у відповідному порядку

3. Перевірити що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис. Розкласти вектор

$$\vec{f} = (d+1, a+4, d+5)$$

за базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= (3, b - 5, b), \\ \bar{e}_2 &= (2d - 1, 2a + 13, 2d + 10), \\ \bar{e}_3 &= (3, -c - 5, -c).\end{aligned}$$

Записати у матричному вигляді заміну координат векторів при переході до нового базису

4. Розв'язати систему за правилом Крамера

$$\begin{cases} ax + by + cz - 2dt = 1 \\ -bx + ay - 2dz - ct = 2 \\ -cx + 2dy + az + bt = 3 \\ 2dx + cy - bz + at = 4 \end{cases}$$

та методом Гауса (послідовного виключення невідомих), зробити перевірку.

5. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} m + dm & m & m \\ m & m + dm & m \\ m & m & m + dm \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c + a & c + 2a \\ c + 2a & c & c + a \\ c + a & c + 2a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & n \\ n & n & n \\ n & n & n \end{pmatrix},$$

де

$$m = \frac{b}{d(3+d)}, n = 9a(a + c).$$

6. Записати у векторній формі загальний розв'язок неоднорідної системи та загальний розв'язок відповідної однорідної системи.

$$\begin{cases} x - \frac{u}{d} - \frac{v}{c} = -1 \\ cdx - cu - dv + 2ay = b \end{cases}.$$

3. Аналітична геометрія на площині

3.1. Підтеми

1. Координати точок та векторів на площині, їх зв'язок, дії з векторами в координатній та геометричній формі.
2. Модуль вектора, відстань між точками, ділення відрізка в даному відношенні.
3. Рівняння та їх графіки
4. Пряма на площині: рівняння з кутовим коефіцієнтом, параметричне рівняння, через дві точки, канонічне рівняння, загальне рівняння, рівняння в відрізках на осях.
5. Кут між прямими, умови паралельності та перпендикулярності прямих.
6. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.
7. Перехід до іншої декартової системи координат – точковий та векторний простір, координатна, матрична форма.
8. Поворот осей координат, зсув осей координат, симетрія відносно центру симетрії та відносно осі симетрії, перетворення подібності.
9. Криві другого порядку, загальне рівняння, квадратична форма, типи кривих другого порядку, інваріанти, вироджені випадки.
10. Геометричне означення ліній другого порядку, полярне рівняння ліній другого порядку.
11. Коло, еліпс, гіпербола, парабола їх властивості та канонічні рівняння.
12. Лінії другого порядку як конічні перерізи (перерізи поверхонь другого порядку). Оптичні властивості ліній другого порядку.

3.2. Теоретичні питання

1. Якщо базисні вектори ортонормованої системи координат на площині змінили свої довжини відповідно в три та п'ять разів, то яка буде площа паралелограма побудованого на векторах $(2, 2)$ та $(3, 1)$ (координати в новій системі координат) як на сторонах?
2. Запишіть векторно умову того, що два вектори намальовані з одної точки, є гіпотенузою і катетом прямокутного трикутника?

3. Якщо базисні вектори на площині одиничні та мають між собою кут 60° , то як записуються скалярний квадрат та модуль вектора в координатах вектора?

4. Які прямі на площині не можна записати рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом?

5. Що можна сказати про систему загальних рівнянь чотирьох прямих на площині, якщо всі прямі перетинаються в єдиній спільній точці перших двох прямих?

6. Написати формули заміни координат векторів евклідової площини, коли базисні вектори замінюються відповідно на вектори одиничні, направлені відповідно по бісектрисам четвертого та третього координатних кутів.

7. Що можна сказати про систему загальних рівнянь трьох прямих, якщо дві з них паралельні, але не співпадають, а третя перетинає першу пряму в одній точці?

8. Ранг розширеної матриці системи з двох загальних рівнянь двох прямих дорівнює 2, що це означає геометрично?

9. Записати умову на коефіцієнти загальних рівнянь трьох прямих, за якою прямі обмежують рівносторонній трикутник.

10. Написати формули заміни ортонормованого базису декартової площини, коли базисні орти направляються відповідно по бісектрисам другого та третього координатних кутів.

11. Написати формули заміни координат на евклідовій площині, коли базисні вектори змінюють свої довжини відповідно в два та три рази та міняють свій напрям.

12. Написати формули переходу від звичайної декартової до полярної системи координат, коли полярна вісь направлена з початку системи координат вздовж осі ординат, а додатні значення полярного кута відраховується у напрямі за рухом годинникової стрілки.

13. Що можна сказати про матриці переходу до нових координат при повороті осей координат на деякий кут та при повороті на такий же кут в протилежному напрямі?

14. Для першого з двох базисів на площині перший базисний вектор переходить в другий базисний вектор при повороті на гострий кут проти годинникової стрілки, а для другого базису за годинниковою стрілкою. Що

можна сказати про визначник матриці заміни координат при переході від одного базису до іншого?

15. При заміні координат координатний паралелограм змінює свою площу в два рази. Що можна сказати про визначник довільної квадратичної форми?

16. Чи може визначник квадратичної форми при переході до нової системи координат помножитись на -2 ?

17. Є визначник матриці переходу від першого базису до другого та визначник матриці переходу від другого базису до третього. Що можна сказати про визначник матриці переходу від третього базису до першого?

18. Написати конкретне рівняння лінії другої порядку, графік якої є пуста множина. Написати її тип.

19. Написати конкретне рівняння лінії другої порядку, графік якої є прямі $y = x$ та $y = 2x$. Написати її тип.

20. Написати конкретне рівняння лінії другої порядку, графік якої є точка $(2,3)$. Написати її тип.

21. Написати конкретне рівняння лінії другої порядку, графік якої є дві паралельні прямі. Написати її тип.

22. Довести, що графік оберненої пропорційності є лінією другого порядку та написати її канонічне рівняння.

23. Є канонічне рівняння еліпса, написати полярне рівняння цього еліпса, якщо полярна вісь виходить з правого фокуса цього еліпса у напрямку осі абсцис.

24. Який вигляд має рівняння рівнобічної гіперболи, вісь симетрії якої, що не містить фокусів, співпадає з бісектрисою 1-ого координатного кута.

25. Є канонічне рівняння еліпса, написати рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться в вершинах еліпса, а вершини в фокусах еліпса.

26. Є канонічне рівняння гіперболи, написати рівняння еліпса, який має ті ж осі симетрії та дві спільні вершини, і фокуси якого з фокусами гіперболи утворюють квадрат.

27. Великий діаметр еліпса в два рази менше відстані між директрисами, чому дорівнює ексцентриситет еліпса?

28. Дійсні діаметри гіперболи та спряженої гіперболи однакові, чому дорівнює ексцентриситет гіперболи?

29. Відстань між фокусами дорівнює малій осі еліпса, чому дорівнює ексцентриситет?

30. Написати канонічне рівняння еліпса, у якого кінці малого діаметра та один з фокусів утворюють рівносторонній трикутник.

31. Написати канонічне рівняння еліпса, у якого дві вершини та два фокуса утворюють квадрат.

32. Написати канонічне рівняння гіперболи, у якої директриси ділять відстань між фокусами на рівні частини.

3.3. Задачі

1. За координатами вершин трикутника ABC :

$$A(c-d, -d), B(b+7, a), C(-d, a+2).$$

Знайти:

- i. рівняння сторін BC , AC , кут C ;
- ii. рівняння висоти BH , де точка H – це основа висоти та відстань від точки B до прямої AC , тобто довжину висоти BH ;
- iii. площу трикутника ABC ;
- iv. центр мас трикутника ABC ;
- v. основу бісектриси кута C .

2. Задано рівняння прямих

$$\begin{cases} ax + ty + 2 = 0 \\ x + ty + b = 0 \\ cx + dy + t = 0 \end{cases}$$

Для яких t ці прямі паралельні або перетинаються в одній точці?

3. Задано рівняння еліпса:

$$\frac{d^2x^2}{16(a+c)^2} + \frac{b^2y^2}{c^2} = 1.$$

- i. Знайти ексцентриситет, показати фокуси, написати рівняння директрис, побудувати графіки еліпса, директрис,
- ii. Записати параметричні рівняння еліпса.
- iii. Написати рівняння еліпса повернутого на 90° .

4. Задано рівняння гіперболи:

$$b^2x^2 - c^2y^2 = a^2d^2.$$

- i. Знайти ексцентриситет, показати фокуси, написати рівняння директрис, асимптот, побудувати графіки гіперболи, директрис, асимптот.
- ii. Записати рівняння спряженої гіперболи та зробити для неї те ж саме, що і для початкової гіперболи.

iii. Написати рівняння гіперболи, яка симетрична початковій щодо бісектриси першого та третього координатних кутів.

5. Задано рівняння параболи:

$$x^2 - 2bx + ay + b^2 + cd = 0.$$

i. Знайти ексцентриситет, показати фокус, написати рівняння директриси, побудувати графіки параболи та директриси.

ii. Записати полярне рівняння параболи, якщо напрям полярної осі збігається з віссю параболи, а початок цієї осі знаходиться в фокусі.

iii. Написати рівняння осей координат, для яких рівняння нашої параболи буде канонічним.

6. Записати рівняння однієї директриси та координати одного фокуса кривої, заданої рівнянням

$$a^2 + d^2y^2 = 2bdx + 2ady + (c^2 - d^2)x^2;$$

криву та вказані її елементи зобразити на малюнку (яка це крива, де ще є, якщо є, одноіменні елементи, знайти ексцентриситет).

4. Аналітична геометрія та вектори у просторі R^3

4.1. Підтеми

1. Векторний добуток, його властивості, обчислення. Застосування - площі паралелограма, трикутника, кутова та лінійна швидкість, моменти сил.

2. Змішаний добуток трьох векторів, його властивості, обчислення, застосування: об'єм паралелепіпеда, тетраедра, компланарність трьох векторів.

3. Пряма у просторі, її рівняння - параметричне, векторне, канонічне та загальне. Кут між прямими, умови паралельності та перпендикулярності прямих.

4. Площина у просторі, типи рівнянь: векторне, загальне, через три точки, у відрізках на осях.

5. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини.

6. Кути між прямою та площиною, умови паралельності та перпендикулярності.

7. Поверхні у просторі, параметричні та неявні рівняння, циліндричні поверхні, циліндричні поверхні з твірною паралельною осі координат, конічні поверхні.
8. Поверхні другого порядку, приведення до головних осей.
9. Еліпсоїди, параболоїди, гіперболоїди.
10. Межеві випадки поверхонь другого порядку; циліндри, конуси та інше.

4.2. Теоретичні питання

1. Як через векторний добуток записати умови того, що даний вектор є перпендикулярним до двох інших векторів?.
2. Як через скалярний та векторний добуток записати умову компланарності для 4-х заданих векторів у просторі?
3. Є координати чотирьох точок А, В, С, D у просторі. Як через векторний добуток записати умову того, що це вершини трапеції з основою AD?
4. Напишіть у векторній формі, що відстань між двома точками в просторі не перевищує довжини будь-якої ламаної, яка з'єднує ці точки.
5. Як виглядає рівняння площини, яка перпендикулярна бісектрисі кута між осями абсцис та ординат?
6. Як виглядає рівняння площини, яка паралельна бісектриси кута між осями ординат та аплікат?
7. Якщо змінити напрям осі ординат звичайної правої системи координат, то як зміниться означення знаходження векторного добутку двох векторів через координати?
8. Три вектори множаться між собою векторно. Чи виконується асоціативний закон?
9. Що буде, якщо векторний добуток двох векторів помножити скалярно на векторний добуток деякого третього вектора на згаданий векторний добуток двох векторів?
10. Як зміниться векторний добуток двох векторів, якщо до першого множника додати подвоєний другий?
11. Якщо поміняти місцями дві осі звичайної декартової системи координат, то як зміниться означення знаходження векторного добутку двох векторів через координати?

12. Як виглядає канонічне рівняння прямої у просторі, якщо пряма перпендикулярна осі ординат?

13. Як виглядає загальне рівняння площини, яка перпендикулярна осі абсцис?

14. Що можна сказати про пряму, у якої напрямний вектор пропорційний координатам якоїсь точки через яку проходить пряма?

15. Що відбувається з площиною при множенні коефіцієнтів при невідомих в загальному рівнянні на одне і те ж число?

16. Для яких рівнянь прямої можна писати нулі в знаменниках?

17. Яка єдина умова на коефіцієнти при змінних координатах в загальному рівнянні площини у просторі?

18. Напишіть рівняння геометричного місця точок, які знаходяться на однаковій відстані від точок $(0,0,0)$ та $(2,2,2)$.

19. Напишіть рівняння двопорожнинного гіперболоїда, якщо вісь ординат є його віссю симетрії?

20. Відносно яких площин є симетричним однопорожнинний гіперболоїд записаний канонічним рівнянням?

21. Є рівняння площини, написати рівняння двох площин, які знаходяться від даної площини на рівних відстанях з 2-ох сторін.

22. Що відбудеться з еліпсоїдом, якщо в канонічному рівнянні одиницю в правій частині замінити на п'ять?

23. Є канонічне рівняння гіперболоїда. Що відбудеться, якщо там, де два знаки при квадратах змінних однакові, зробити їх різними?

24. Сторони координатного паралелепіпеда дорівнюють $2a$, $2b$, $2c$. Напишіть рівняння вписаного еліпсоїда.

25. Є загальне рівняння площини. Напишіть рівняння площини, яка проходить симетрично даній площині відносно початку координат.

26. Є загальне рівняння площини. Напишіть рівняння площини, відстань від якої до початку координат вдвічі більша.

27. Знайти геометричне місце точок, для яких відстань від точки $(0,0,1)$ вдвічі менша ніж відстань до точки $(0,0,4)$.

28. Написати рівняння конуса з вершиною в початку координат, який проходить через перетин циліндра $x^2 + y^2 = 4$ та площини $Z = 1$.

29. Чи можна дві площини, що перетинаються, вважати конічною поверхнею в загальному означенні?

30. Є канонічне рівняння гіперболоїда, в якому одиницю міняють на нуль. Що це за нова поверхня, і що буде геометрично в перетині площини, яка проходить через вісь гіперболоїда цими двома поверхнями?

31. Чи можна дві площини, що перетинаються вважати циліндричною поверхнею в загальному означенні?

32. Написати рівняння конуса, який проходить через коло $x^2 + y^2 = 1$ на площині та точку $(0,0,4)$.

4.3. Задачі

1. Задано три вектори:

$$\bar{a} = (2, a, -a), \bar{b} = (-ab, b, -b), \bar{c} = (0, cd, cd).$$

i. Знайти векторний добуток векторів \bar{a}, \bar{b} , площу паралелограма, побудованого на векторах \bar{a} і \bar{b} як на сторонах, площу трикутника, побудованого на векторах \bar{a}, \bar{b} як на сторонах;

ii. Знайти змішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ як на сторонах, об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ як на сторонах.

2. Задано дві площини і точка:

$$\begin{cases} c dx + dy - cz = cd(a - b) \\ c dx - dy + cz = cd(a + b) \end{cases} \\ A(a + 2, c, d + bd)$$

Знайти:

i. Двограний кут між площинами.
ii. Канонічне рівняння прямої l перетину площин.
iii. Рівняння площини, яка проходить через перетин наших площин і точку A .

iv. Рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно лінії перетину заданих двох площин.

v. Відстань від точки A до прямої l перетину площин.

3. Задані вершини тетраедра:

$$A(-1, -1, a + d); B(b, 2c, a - d);$$

$$C(2b + 1, c + 1, a); D(b + d, c - (b + 1)d, a - (b + 1)c)$$

Знайти:

i. Рівняння ребра AD .
ii. Площу S грані (ABC) .

- iii. Об'єм V тетраедра.
- iv. Рівняння грані (ABC) .
- v. Кут між ребром AD та гранню (ABC) .
- vi. Відстань h вершини D від грані (ABC) .
- vii. Рівняння висоти DE тетраедра.
- viii. Координати точки D' , яка є симетричною точці D відносно площини (ABC) .
- ix. Кут ψ між медіанами трикутника ABC проведеними з вершин A та B .
- x. Знайти центр ваги тетраедра.
- xi. Написати рівняння площини, яка проходить через центр мас тетраедра паралельно ребрам AB та CD .
- xii. Нехай в вершинах A, B, C, D тетраедра знаходяться маси відповідно $5a, b, c, d$. Які будуть координати центра мас системи.

4. Задано рівняння поверхні другого порядку

$$\frac{x^2}{2a - 2b + 1} + \frac{y^2}{c} + (d - 2)z^2 + 2z(d - 1) = 0.$$

Визначити тип поверхні, знайти, якщо існують, центр поверхні, її вершини, сідлову точку, осі симетрії, показати схематично розташування поверхні.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

5. Границі. Функції одного дійсного аргументу

5.1. Підтеми

1. Множини, декартові координати.
2. Функції, відношення та їх графічне зображення.
3. Границя функції (послідовності), основні твердження, важливі приклади :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

4. Порівняння нескінченно малих (нескінченно великих) величин.
5. Неперервність функцій в точці та на проміжку, основні твердження.
6. Правила Лопіталя. Асимптоти.

5.2. Теоретичні питання

1. У запису конкретної границі функції (дійсні змінні), чи змінить значення функції в одній точці істинність запису?
2. При наближенні аргументу до яких значень функція косинуса кореня з аргументу є нескінченно малою?
3. В околі яких значень x функція $xctgx$ є нескінченно великою?
4. Коли до нескінченно малої величини додається пропорційна їй величина, чи можна стверджувати, що вона буде нескінченно малою? Коли можна стверджувати, що ми одержимо нескінченну малу величину того ж порядку?
5. Коли до нескінченно великої величини додається пропорційна їй величина, чи можна стверджувати, що ми одержимо нескінченно велику величину? Коли можна стверджувати, що це буде нескінченна велика величина того ж порядку?
6. Є лінійна комбінація різних степенів змінної і ця змінна прямує до нуля. Коли можна стверджувати, що це буде нескінченно мала величина, і який буде її порядок відносно змінної?
7. Є лінійна комбінація різних степенів змінної, і ця змінна прямує до нескінченності. Коли можна стверджувати, що це буде нескінченно велика величина, і який буде її порядок відносно змінної?
8. Коли степінь строго зростаючої додатної величини є зростаюча величина? Коли вона є монотонна величина? Строго монотонна?
9. Наведіть приклад зростаючої асимптоти функції, яка наближається до цієї асимптоти коливаючись навколо неї, тобто, приймаючи нескінченну кількість разів як значення більші ніж на асимптоті так і менші
10. Покажіть на площині бінарне відношення $Z > x^2$.
11. Покажіть на площині відношення $1 < x^2 + y^2 \leq 3$.
12. Покажіть графічно на площині відношення $0 \leq -z^2 - y^2 \leq 0$. Чи можна вважати це відношення функцією?
13. Напишіть відношення, яке є об'єднанням рівно трьох різних функцій, непостійних заданих на одному інтервалі.

14. Покажіть графік відношення: абсолютна величина різниці x та y не перевищує 1.
15. Покажіть графічно відношення: $x^2y^2=1$.
16. Покажіть графічно відношення: $x^2 < y^2$.
17. Покажіть графічно відношення: $1 < x^2 - y^2$.
18. Намалюйте графік відношення: 'X менше Y' для натуральних чисел що не перевищують трьох.
19. Що геометрично на координатній площині представляє собою відношення $tg(0.25xy)=1$?
20. Покажіть схематично графік функції $Y = \sin(\pi\sqrt{x})$
21. Чи є монотонною функція $x + \sin x$?
22. Позначення $[x]$ означає цілу частину дійсного числа x (найбільше ціле число, яке його не перевищує x). Чи є ця функція монотонна? Чи є ця функція строго монотонна?
23. Побудуйте схематично графік функції $[x]$ (див. 22), дослідіть на неперервність.
24. Наведіть приклад основної елементарної функції з нескінченною кількістю розривів другого роду.
25. Позначення $\{x\} = x - [x]$ означає дробову частину числа (справа в дужках позначення цілої частини числа (див. 22)). Чому ця функція є періодичною і який її період?
26. Які розриви має функція $\{x\}$ та які її граничні значення зліва та справа в точках розриву (див.25,23)?
27. Намалювати графік функції модуль від $\sin x$.
28. Напишіть рівняння функції, у якої нескінченна, але зчисленна область визначення.
29. Напишіть рівняння функції з рівно трьома точками розриву другого роду.
30. Наведіть приклад функції з двома різними (не горизонтальними та не паралельними) асимптотами, коли x прямує до нескінченностей різних знаків.
31. Наведіть приклад функції, яка має тільки точки розриву другого роду, для яких точка 0 є граничною.

32. Наведіть приклад функції з двома різними паралельними непостійними асимптотами.

5.3. Задачі

1. Довести рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an - b}{cn + d} = \frac{a}{c};$$

- вказати вказати номер, починаючи з якого

$$|g_n - g| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

2. Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{2a} + n^{2b} + 1}(n^d + n + 1)}{(dn^c + 3)n^b}.$$

3. Знайти границю не користуючись правилом Лопітала (розкладаючи чисельник та знаменник на множники):

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{x^3 + (b-d)x^2 - (d^2 + 2db)x + d^2(b+d)}{x^3 + (ac-d)x^2 - d(d+2ac)x + d^2(ac+d)}.$$

Перевірити результат за правилом Лопітала.

4. Довести неперервність функції

$$f(x) = bx^2 + dx$$

в точці $x_0 = c$ – знайти $\delta(\varepsilon)$ з означення неперервності, для $\varepsilon = a10^{-3}$ вказати конкретне δ .

5. Дослідити на неперервність функцію

$$y = (-1)^a \left(\frac{2d}{5}\right)^{(2b-5)(x-d)^{-c}}.$$

Зробити схематичний малюнок в околі точок розриву

6. Знайти границю ($x \rightarrow 0$)

$$\frac{f_c \left(\sqrt[2d]{(1 + \sin 2bx)^{2b+1}} - 1 \right)}{f_b(2b \arctg(2ax))}.$$

використовуючи такий набір функцій

$$f_1(x) = e^x - 1, f_2(x) = \ln(1+x), f_3(x) = \operatorname{tg} x, f_4(x) = \operatorname{arcsin} x.$$

6. Похідна функції одного дійсного аргументу.

Дослідження функцій за допомогою похідних

6.1. Підтеми

1. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст, диференціал. Таблиця похідних, правила диференціювання.
2. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.
3. Диференціювання параметричних, неявних функцій.
4. Теорема Роля, Лагранжа, Коші, правила Лопітала, умови зростання, спадання функцій, екстремуми функцій.
5. Кратні похідні, опуклість.
6. Найменше та найбільше значення функції на проміжку.
7. Повне дослідження дійсної функції дійсного аргументу.

6.2. Теоретичні питання

1. Напишіть конкретну лінійну функцію аргументу x , який тангенс кута нахилу цієї функції до осі абсцис? Чи є він похідною оберненої функції?
2. Яка буде парність похідної парної функції, чому?
3. Яка буде парність похідної непарної функції, чому?
4. Приведіть приклад, коли похідна неперіодичної функції періодична.
5. Пряма $y = 2x$ перетинає графік диференційовної функції $f(x)$ на відрізку в двох точках. Яке конкретне числове значення похідної функції $f'(x)$ можете назвати точно і чому?
6. Сформулювати означення нескінченної похідної у внутрішній точці ОДЗ, записати рівняння дотичної та нормалі у цій точці.
7. Диференційовна функція перетинає вісь абсцис в п'яти точках. Скільки коренів щонайменше має похідна цієї функції?
8. Многочлен має дійсний корінь кратності 5, що щонайменше можна сказати про корені похідної? Пояснити.
9. Відомі похідні двох функцій в точці перетину їх графіків, як знайти кут перетину графіків?
10. Під яким кутом графік диференційовної функції перетинає вісь oy ?
11. Скільки проміжків опуклості у функції модуль синус x на періоді?

12. Скільки проміжків опуклості і точок перегину у функції тангенс x на проміжку $(0; 5)$?

13. Скільки проміжків опуклості у функції корінь четвертої степені з ікса в квадраті, та які це опуклості?

14. Диференційовна функція має рівно п'ять строгих максимумів, скільки вона може мати строгих мінімумів?

15. Функція $f(x)$ має похилу, не горизонтальну асимптоту, коли x прямує до плюс нескінченності, чи має асимптоту функція $f(x^2)$?

16. Диференційовна усюди функція $f(x)$ в нескінченності еквівалентна $1/x$, що можна сказати про похідну в нулі функції $f(1/x)$ (після усунення розриву)?

17. Диференційовна усюди функція $f(x)$ еквівалентна $1/x$ в нулі, що можна сказати про похилі асимптоти $f(1/x)$, якщо вони існують?

18. Якщо в означенні похідної брати односторонні границі, то у нас будуть відповідно означення правої та лівої похідної (тобто односторонніх похідних, правої та лівої). Сформулюйте умову диференційованості функції в внутрішній точці ОДЗ через односторонні похідні.

19. Дати означення кутової точки графіка та написати як знаходиться цей кут.

20. Намалювати графік похідної дробової частини числа (див. 22,25 з 5.2).

21. Намалювати графік похідної цілої частини числа x (див. 22 з 5.2).

22. Привести приклад неперервної на замкненому обмеженому проміжку функції, яка диференційовна тільки у внутрішніх точках проміжку визначення.

23. Записати стаціонарні точки функції модуль косинус x .

24. Записати критичні точки функції модуль синус x .

25. Записати мінімуми і максимуми функції модуль від $x^2 - x$

26. Знайти точки мінімуму та максимуму функції тангенс куб синуса x .

27. Знайти найбільші та найменші значення функції арккотангенс косинуса x .

28. Знайти точки екстремумів (строгих та нестрогих) функції $|x-1| + |x+1|$ на проміжку $[-2;2]$.

29. Знайти проміжки опуклості та точки перегину функції експонента від $-(x-\mu)^2/2\sigma^2$.

30. Знайти кути 2-кутника, обмеженого лініями $12-x^2$ та $2x^2$.

31. Привести приклад непостійної ні на одному інтервалі функції, усі стаціонарні точки якої належать одній прямій.

32. Що можна сказати про множину абсцис точок нестрогих екстремумів функції ціла частина x (див. 22 з 5.2)?

6.3. Задачі

У цих задачах використовуються функції:

$$f_1(x) = e^x - 1, f_2(x) = \ln(1 + x), f_3(x) = \operatorname{tg} x, f_4(x) = \operatorname{arcsin} x.$$

1. Написати перший та другий диференціали функції $y = f_b(c + ax^{d+1})$.

2. Знайти першу та другу похідні від функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} y = f_{5-b}(a + t^{2c}) \\ x = \operatorname{arctg}(dt) \end{cases}.$$

3. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої заданої рівнянням

$$y = f_d\left(\frac{ax - c}{12 + b}\right)$$

у точці $x_0 = c$.

4. Дано параболу

$$x^2 - 2bx + ay + b^2 + cd = 0.$$

У точці, в якій фокальний радіус є перпендикулярним до осі параболу, написати рівняння нормалі (вибрати точку, для якої кутовий коефіцієнт нормалі від'ємний).

5. Задана лінія

$$\frac{d^2x^2}{100(a+c)^2} + \frac{b^2y^2}{c^2} = 1.$$

У точці

$$\left(\frac{30(a+c)}{5d}; \frac{4c}{5b}\right)$$

написати рівняння бісектриси кута між фокальними радіусами точки, використовуючи оптичні властивості еліпса та знаходження похідної неявної функції.

6. Задана лінія

$$b^2x^2 - c^2y^2 = a^2d^2.$$

У точці

$$\left(\frac{5ad}{4b}; \frac{3ad}{4c}\right)$$

написати рівняння бісектриси кута між фокальними радіусами точки, використовуючи оптичні властивості гіперболи та знаходження похідної неявної функції.

7. Написати рівняння нормалі та дотичної до кривої заданої рівнянням

$$ax + byx^{c+1} + y^{2d+1} = 1$$

в точці $(0; y_0)$, що належить кривій.

8. Запишемо наступний набір функцій

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = \ln(4 + x), f_3(x) = \operatorname{arctg}x, f_4(x) = \operatorname{arccos}x.$$

Написати три члени (плюс залишок) формули Тейлора в точці $x=b$ для функції $f_c(ax - bad)$, залишок взяти у формі Пеано (Лагранжа).

9. Є функція

$$y = (-1)^b(x - c)^2(x + d) + ab.$$

Дослідити по пунктам:

1) ОДЗ (область допустимих значень), неперервність, поведінка на кінцях проміжків ОДЗ, асимптоти, спеціальні властивості: періодичність, парність та непарність;

2) знайти проміжки монотонності та екстремуми функції;

3) знайти проміжки опуклості та точки перегину функції;

4) знайти характерні точки, побудувати графік функції використовуючи знайдені характерні точки;

5) знайти найбільше та найменше значення функції на відріжку $[c-1; c+b]$.

10. Є функція

$$y = (x - b)^{-1}(2 dx^2 + (5b - 2 db + a)x + 5 - ab - 2c - 5x^2).$$

Зробити дослідження по пунктам 1-4 попереднього прикладу і побудувати графік.

7. Функції кількох дійсних аргументів

Границі, неперервність, диференціювання

7.1. Підтеми

1. Множини, відкритість, замкненість та зв'язність множин. Області та їх межі. Область визначення, область допустимих значень функції.
2. Границі та неперервність функції кількох аргументів.
3. Диференціювання, частині похідні та повний диференціал, геометричної зміст.
4. Похідні складної функції, похідні неявної функції.
5. Дотична площина та нормаль до поверхні.
6. Похідні вищих порядків, теорема про змішані похідні, диференціали вищих порядків, формула Тейлора.
7. Екстремуми - максимуми та мінімуми - та сідлові точки.
8. Найбільші та найменші значення в області.

7.2. Теоретичні питання

1. Чим геометрично є відношення $Z < x^2 - y^2$ у просторі?
2. Чим геометрично є відношення $1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ у просторі?
3. Напишіть формулу функції з аргументами x, y , яка не є парною ні по одному з них, графік якої є симетричним відносно осі значень.
4. Покажіть графічно відношення $x^2 < y^2$ у трьохвимірному просторі.
5. Напишіть формулу функції з аргументами x, y , коли область визначення функції є обмеженою замкненою областю.
6. Напишіть формулу функції двох змінних, у якої ОДЗ складається з 4 зв'язних відкритих компонент.
7. Вкажіть необмежену множину на площині, у якої межа обмежена.
8. Привести приклади дійсних функцій двох змінних, реально від них залежних, які відповідно: необмежена тільки знизу, необмежена тільки зверху, необмежена знизу і зверху.
9. Напишіть формулу неперервної необмеженої функції двох змінних, яка задана в ОДЗ, що є обмеженою відкритою областю.

10. Напишіть формулу обмеженої функції двох змінних з обмеженою ОДЗ, яка не досягає в ній верхньої своєї межі. Подивіться поняття супремума і інфімуму.

11. Що можна сказати про необмежену функцію, задану на обмеженій замкнутій множині?

12. Напишіть елементарну функцію двох змінних, у якої ОДЗ одна точка.

13. Де геометрично знаходяться точки розриву функції $z = \operatorname{tg}x \operatorname{ctg}y$?

14. Приведіть приклад функції двох змінних і точки для неї, в якій існує дотична площина, а функція в цій точці не диференційовна.

15. Напишіть елементарну функцію двох змінних, у якої ОДЗ геометрично є прямою $0 = x + 2y$.

16. Напишіть формулу функції з двома аргументами, графік якої не є площиною, а є симетричним відносно площин $x = 1$ та $y = 2$.

17. Напишіть формулу функції з двома аргументами, у якій перші часткові похідні існують, а другі ні.

18. Напишіть елементарну функцію двох змінних, у якої ОДЗ геометрично - це дві паралельні прямі непаралельні осям.

19. Напишіть формулою відношення, яке є об'єднанням двох функцій двох змінних, реально від них залежних, заданих на всій площині.

20. Напишіть функцію двох змінних, яка має в точці обидві часткові похідні, але не диференційовна в цій точці.

21. Як визначити кут, під яким перетинаються дві поверхні

$F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ в точці?

22. Функція записується многочленом другої степені відносно двох змінних. Що в цьому запису є першим диференціалом і половиною другого диференціала і в якій точці?

23. Яким терміном можна охарактеризувати поверхню, яка знаходиться вище будь-якої своєї дотичної площини?

24. Привести приклад поверхні, у якої усі точки перетину нормалей утворюють одну пряму.

25. Напишіть формулу функції двох змінних, у якої межа ОДЗ складається з двох простих замкнених неперервних ліній: одна лінія - це максимуми, друга лінія - це мінімуми.

26. Функція двох змінних записується квадратичною формою. Що можна сказати про перші три члена формули Маклорена та залишок формули.

27. Напишіть формулу обмеженої функції двох змінних, яка в ОДЗ має одну стаціонарну точку.

28. Напишіть формулу функції двох змінних, у якої точки екстремумів утворюють систему паралельних прямих на площині непаралельних осей координат.

29. Яку можете назвати поверхню що, є графіком функції двох змінних, у якої всі точки максимумів утворюють коло?

30. Напишіть диференційовну функцію двох змінних з відкритою ОДЗ, у якої нормалі осі перетинаються в одній точці.

31. Напишіть рівняння поверхні та дотичної площини до неї, яка перетинає цю поверхню по двом прямим, які перетинаються в одній точці.

32. Напишіть формулу функції двох змінних, задану на всій площині, яка має одну критичну точку $(1,3)$, яка не є стаціонарною.

7.3. Задачі

1. Дві множини A, B на площині задані нерівностями:

$$A: 5bx - 2cy - 5ab \leq 2dc,$$

$$B: 2cx + 5by + 5bd > 2ac.$$

Показати на координатній площині множини:

$$A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, (A \cup B)^c, A \cup B \setminus AB.$$

Записати, які з цих множин є відкритими, а які - замкненими, для останньої множини записати нерівностями зв'язні компоненти.

2. На площині є обмежена область, яка обмежена лініями :

$$l_1: -2abcy = x - x^2 + c^2 + c(2d + 1), l_2: 0 = x + c + d + aby,$$

та функція z

$$z = \ln(p + dx - abcy)$$

З'ясувати, для яких p функція z відповідно: визначена в цій області; неперервна в цій області; обмежена в цій області; не визначена в жодній точці верхньої межі цієї області.

3. Запишемо такий набір функцій

$$f_1(x) = \sqrt[2d]{(1+x)^{2b+1}}, f_2(x) = \sin x, f_3(x) = e^{cx}, f_4(x) = \cos 2x.$$

Знайти:

i. Похідні z'_x, z'_y та записати перший диференціал для функції
 $z = f_c(x^{b+1} + ay) + f_{5-c}(dy)$.

ii. Похідні F'_x, F'_y , (за формулою складної функції), де
 $F = \frac{f_d(u)}{f_{5-d}(v)}$, $u = ax - y^{b+c}$, $v = x^2 + by$.

iii. Другі похідні для функції z з підпункту i. (та перевірити теорему про змішані похідні), записати другий диференціал цієї функції.

4. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$\frac{z}{b} - xy^{c+1} + cy - xa = 0$$

у точці $(d, 0, z_0)$ поверхні.

5. Знайти екстремуми функції

$$Z = (2c-5)x^2 + 2dxy + 5(2c-5)y^2 + (4c-10)(ax+5by) + 2d(bx+ay).$$

6. Знайти екстремуми функції

$$Z = \exp((5-2d)x^2 + 2cxy + 5(5-2d)y^2 + (10-4d)(ax+5by) + 2c(bx+ay)).$$

та найбільше та найменше значення цієї функції у замкненій області, яка обмежена лініями

$$x = -a-1; \quad y = -b-1 \quad y+x+a+b = 1.$$

8. Диференціальні оператори. Диференціальне числення векторних та матричних функцій скалярного аргументу

8.1. Підтеми

1. Скалярне поле. Похідна за напрямом, градієнт поля, їхній зв'язок та властивості, оператор набла.

2. Оператор Лапласа, зв'язок з оператором набла, гармонічна функція.

3. Векторне поле, дивергенція (функція джерела, розбіжність), соленоїдальне поле.

4. Векторне поле, ротор (вихор, крутіння), поле градієнта – потенціальне поле.

5. Векторна функція скалярного аргументу, неперервність, диференціювання, фізичний зміст першої та другої похідної.

6. Дотична пряма та нормальна площина до просторової кривої (нормаль до кривої на площині).

7. Матричні функції скалярного аргументу, границі, неперервність та диференціювання. Похідна визначника.

8.2. Теоретичні питання

1. Знайдіть три приклади конкретних скалярних полів з різних напрямів вашого навчального процесу чи знайомих вам явищ.

2. Чи є операція взяття градієнта лінійним оператором на просторі скалярних полів заданих у деякій області?

3. Напишіть, використовуючи дії з векторами, умову дотику в точці, в деякий момент, траєкторій руху двох матеріальних точок заданих вектор-функціями часу (дві лінії дотикаються в точці, якщо вони у цій точці мають спільну дотичну).

4. Чи є операція взяття дивергенції лінійним оператором на просторі векторних полів заданих у деякій області?

5. Знайдіть три вирази з фізики, механіки тощо з оператором Лапласа.

6. Знайдіть три приклади конкретних векторних полів з фізики, механіки, інших напрямів вашого навчального процесу чи знайомих вам явищ.

7. Чи є операція узяття ротора лінійним оператором на просторі векторних полів, заданих у деякій області?

8. Чому дорівнює дивергенція ротора векторного поля?

9. Приведіть приклади потенціальних полів з трьох різних сфер фізики, механіки, інших напрямів вашого навчального процесу чи знайомих вам явищ.

10. Отримайте компактну формулу дивергенції добутку векторного поля на скалярне поле.

11. Де в фізиці чи інших сферах зустрічаються соленоїдальні поля?

12. Чому дорівнює ротор градієнта скалярного поля?

13. Напишіть умову дотику кривої, яка задана вектор-функцією до лінії рівня скалярного поля на площині.

14. Отримайте формулу для похідної змішаного добутку вектор-функцій скалярного аргументу.

15. Приведіть три приклади градієнта з фізики, механіки, інших напрямів вашого навчального процесу чи знайомих вам явищ.

16. Напишіть формулу кута між двома графіками вектор-функцій скалярного аргументу в точці перетину графіків.

17. Знайдіть (у літературі, в інтернеті), як визначається коло кривини плоскої кривої.

18. Розкрийте фізичний зміст проекції другої похідної вектор-функції в точці на дотичну до кривої в цій точці.

19. Як знайти кут, під яким крива, задана вектор-функцією скалярного аргументу, перетинає площину XU , якщо перетин відбувається при значенні аргументу нуль.

20. Графік вектор-функції скалярного аргументу перетинає поверхню рівня скалярного поля. Знайти кут, під яким відбувається перетин.

21. Знайдіть у літературі, в інтернеті, що таке стична площина кривої. Як записати її рівняння за допомогою похідних вектор-функції, яка задає криву?

22. Отримайте формулу для похідної скалярного добутку вектор-функцій скалярного аргументу.

23. Знайдіть у літературі, в інтернеті, що таке стичне коло (коло кривини) кривої за змістом та що таке кривина та радіус кривини кривої.

24. Як записується рівняння головної нормалі кривої за допомогою похідних вектор-функції, яка задає криву?

25. Пряму, задану канонічними рівняннями, розглянути як графік такої вектор-функції скалярного аргументу, щоб швидкість руху по прямій була змінною, якщо аргумент інтерпретувати як час.

26. Знайдіть що таке бінормаль кривої за змістом, та як записати її рівняння за допомогою похідних вектор-функції, яка задає криву?

27. Отримайте компактну формулу ротора добутку скалярного поля на векторне поле.

28. Напишіть похідну добутку матричних функцій скалярного аргументу.

29. Знайдіть, що таке спрямна площина кривої та як записати її рівняння за допомогою похідних вектор-функції, яка задає криву?

30. Отримайте компактну формулу для градієнта добутку скалярних полів.

31. Отримайте компактну формулу кута між кривою заданою вектор-функцією скалярного аргументу та лінією рівня скалярного поля на площині.

32. Отримайте формулу для похідної векторного добутку вектор-функцій скалярного аргументу.

8.3. Задачі

У цих задачах використовуються функції

$$f_1(t) = e^t, f_2(t) = \ln(1+t), f_3(t) = \sin t, f_4(t) = \cos t.$$

1. У просторі задане скалярне поле

$$u = f_c(ax + 2yb + z^{d+1}).$$

Записати векторне поле градієнта скалярного поля u , знайти максимум похідних за напрямом у точці $M_0 = O(0,0,0)$, знайти похідну функції u у точці M_0 за напрямом вектора $l = (c, d, a - b)$.

2. Нехай є поле $\vec{F} = (x^c(1 + y^d z^{a+b}); dx^{1+c}y^{d-1}z^{a+b}; 3x^{c+1}y^{a+c})$

Знайти $\operatorname{rot} \vec{F}$, з'ясувати потенціальність цього поля в околі довільної точки.

3. Знайти функцію джерела поля з пункту 2. Чи є це поле соленоїдальним?

4. Знайти значення оператора Лапласа від функції $f_a(cx + 2yb + z^{d+1})$. Чи є ця функція гармонічною?

5. Траєкторія руху матеріальної точки задано рівнянням

$$\vec{r}(t): \begin{cases} x = 2ct \\ y = f_b(2at - 2a) \\ z = t^{2d} \end{cases}$$

Знайти вектори швидкості та прискорення в довільний момент часу.

Знайти положення тіла в момент часу $t=1$ та абсолютні значення швидкості та прискорення в цей момент часу.

Написати рівняння дотичної прямої та нормальної площини до траєкторії руху тіла в цей момент часу.

6. Перевірити формулу похідної визначника, (за бажанням вибрати варіант з рядками чи стовпчиками) для визначника

$$\begin{vmatrix} 0 & d & t \\ f_{5-b}(3t) & a & 0 \\ c & 0 & f_b(ct) \end{vmatrix}.$$

7. Запишемо матриці та вектори $A = \begin{pmatrix} af_c(4t) & t^{2b} \\ 0 & dt \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} 5a & d \\ ct & t^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{a} = (f_d(ct); c; a)$$

$$\bar{b} = (f_{5-d}(bt); 0; t^{2a}).$$

Перевірити формули диференціювання добутку для матричних та векторних функцій (нагадуємо, що у матричному та векторному добутку не можна змінювати порядок множників):

$$(AB)' = A'B + AB'$$

$$(\bar{a} \times \bar{b})' = \bar{a}' \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{b}'$$

$$(\bar{a}\bar{b})' = \bar{a}'\bar{b} + \bar{a}\bar{b}'.$$

Список літератури

1. Денисюк В.П. Вища математика: навч. посіб.: У 4 ч. / В.П. Денисюк, В.К. Репета, К.А. Гаєва, Н.О. Клешня. – Ч. 2. – Київ : Книжкове видавництво НАУ, 2005. – 276 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик – Київ : Вища школа, 1993. – 648 с.
3. Дубовик В.П. Вища математика: збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик – Київ : «А.С.К.», 2005. – 480 с.
4. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підручник. У 2 ч. Ч. 1. – К: Либідь, 1994. – 304 с.

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА, АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Практикум до самостійної роботи

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 192 «Будівництво та цивільна інженерія», 193 «Геодезія та землеустрій», 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології»

Укладачі: **Філонов** Юрій Петрович,
Кириченко Анатолій Анатолійович,
Наголкіна Зоя Іванівна,
Шутовський Олег Михайлович

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. арк. 2,25
Електронний документ. Вид № 13/V-25.

Виконавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03680

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р