УДК 539.3

М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук,
О.М. Тробюк

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ТИПУ ТИМОШЕНКА В ГАМІЛЬТОНОВІЙ ФОРМІ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ПЕРІОДИЧНО-НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН

Побудовано розв'язок рівнянь типу Тимошенка гармонічних коливань періодично-неоднорідних пластин, представлених в гамільтоновій формі по просторовій координаті. На основі теореми Ляпунова-Пуанкаре встановленні властивості характеристичного рівняння і структура загального розв'язку для необмежених і півобмежених областей.

Ця стаття є продовженням робіт [2-4] і присвячена побудові розв'язку рівнянь типу Тимошенка в гамільтоновій формі гармонічних коливань періодично-неоднорідних пластин. Користуючись теоремою Ляпунова-Пуанкаре [5-8], встановленні властивості характеристичного рівняння і структура загального розв'язку для необмежених і півобмежених областей.

Розглянемо пластину, серединна відлікова площина $z=0$, якої віднесена до прямокутної декартової системи координат x_1, x_2, z. В теорії типу Тимошенка коливань пластин згинальні M_{11}, M_{22} та крутильні $M_{12}=M_{21}$ моменти, перерізуючі сили Q_1, Q_2, прогин w і тимошенківські функції зсуву ψ_1, ψ_2 зв'язані рівняннями:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}-Q_1=-\rho I_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-Q_2=-\rho I_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1)$$

та матеріальними співвідношеннями:

$$M_{11}=-D\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right),\quad M_{22}=-D\left(\nu\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right),$$
$$M_{12}=-\frac{1-\nu}{2}D\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right),$$

$$Q_1 = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1\right), \quad Q_2 = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right). \qquad (2)$$

В формулах (1), (2) використовуються загальноприйняті позначення [4 та ін.].

Система рівнянь (1), (2) в статті [4] представлена в операторній нормальній формі Коші по просторовій координаті x_1, відносно функцій $M_{11}, \psi_2, w, \psi_1, M_{12}, Q_1$, які при досконалому механічному контакті залишаться неперервними на перерізах $x_1 = const$.

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + Q_1,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{2}{(1-\nu) D} M_{12},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \psi_1 + \frac{Q_1}{B_3},$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = -\frac{M_{11}}{D} - \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = -\nu \frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} + \left(1-\nu^2\right) D \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - B_3 \psi_2 + B_3 \frac{\partial w}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = B_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (3)$$

Після визначення $M_{11}, \psi_2, w, \psi_1, M_{12}, Q_1$ з решти рівнянь знаходимо функції M_{22}, Q_2 через розв'язувальні функції M_{11}, ψ_2, w

$$M_{22} = \nu M_{11} - \left(1-\nu^2\right) D \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2},$$

$$Q_2 = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right).$$

При перетворенні рівнянь коливань (1), (2) до системи (3) приймалося, що коефіцієнти системи (3), а значить і рівнянь (1), (2), можуть бути довільними функціями координати x_1 з розривами першого роду.

Система (3) є операторною гамільтоновою системою по просторовій координаті x_1

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial q_i}$$

з операторною функцією Гамільтона $\widehat{H}=\frac{1}{2}\widehat{P}_{ij}q_i q_j+\frac{1}{2}\widehat{Q}_{ij}p_i p_j$. Ненульові операторні коефіцієнти симетричних матриць $\widehat{\mathbf{Q}}$, $\widehat{\mathbf{P}}$ дорівнюють

$$\widehat{Q}_{11}=-\rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2},\quad \widehat{Q}_{12}=\widehat{Q}_{21}=-\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\widehat{Q}_{13}=\widehat{Q}_{31}=1,\quad \widehat{Q}_{22}=-\frac{2}{(1-\nu)D},\quad \widehat{Q}_{33}=\frac{1}{B_2},$$

$$-\widehat{P}_{11}=-\frac{1}{D},\quad -\widehat{P}_{12}=-\widehat{P}_{21}=-\nu\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$-\widehat{P}_{22}=\left(1-\nu^2\right)D\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}-B_3,\quad -\widehat{P}_{23}=-\widehat{P}_{32}=B_3\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$-\widehat{P}_{33}=-B_3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \qquad (4)$$

Розв’язок системи (3) беремо у вигляді біжучих хвиль

$$\{M_{11},\psi_2,w,\psi_1,M_{12},Q_1\}=$$
$$=\mathrm{Re}\left\{D_{00}l_{00}^{-1}q_1(\xi),-iq_2(\xi),l_{00}q_3(\xi),p_1(\xi),-D_{00}l_{00}^{-1}ip_2(\xi),D_{00}l_{00}^{-2}p_3(\xi)\right\}\times$$
$$\times\exp i\left(k_2x_2-\omega t\right). \qquad (5)$$

Підставивши (5) в систему (3) з урахуванням (4) отримаємо систему звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{\partial q_1}{\partial\xi}=\bar\rho\bar I_1\bar\omega^2 p_1-\bar k_2 p_2+p_3;$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial\xi}=-\bar k_2 p_1+\frac{2}{(1-\nu)\bar D}p_2;$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial\xi_1}=p_1+\frac{1}{\bar B_3}p_3;$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial\xi}=-\frac{1}{\bar D}q_1-\nu\bar k_2q_2;$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial\xi}=-v\bar k_2q_1+\left[\left(1-v^2\right)\bar D\bar k_2^2-\bar\rho\bar I_1\bar\omega^2+\bar B_3\right]q_2+\bar B_3\bar k_2q_3;$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial\xi}=\bar B_3\bar k_2q_2+\left[\bar B_3\bar k_2^2-\bar\rho\bar h\bar\omega^2\right]q_3. \qquad (6)$$

Безрозмірні величини вводимо наступним чином:

$$\bar{D}=\frac{D}{D_{00}},\ \bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_{00}},\ \bar{B}_3=\frac{B_3}{D_{00}l_{00}^{-2}},\ \bar{k}_2=k_2 l_{00},$$

$$\bar{h}=\frac{h}{l_{00}},\ \bar{I}_3=\frac{I_3}{l_{00}^3},\ \bar{\omega}^2=\omega^2\frac{\rho_{00}l_{00}^5}{D_{00}}.$$

Безрозмірна координата $\xi=x_1/l_{00}$, нормуючі параметри l_{00},ρ_{00},D_{00} мають розмірність відповідно $м,\ кг/м^3,\ Н\cdot м$.

Систему (6) відносно амплітудних функцій $q=[q_1,q_2,q_3]^T$, $p=[p_1,p_2,p_3]^T$ запишемо в матричній формі

$$q_i'=Q_{ij}(\xi)\,p_j;\quad p_i'=-P_{ij}(\xi)\,q_j, \tag{7}$$

з ненульовими елементами симетричних матриць $\mathbf{Q}(\xi)$, $\mathbf{P}(\xi)$

$$Q_{11}=\bar{\rho}\bar{I}_1\bar{\omega}^2;\quad Q_{12}=-\bar{k}_2;\quad Q_{13}=1;\quad Q_{22}=\frac{2}{(1-\nu)\bar{D}};\quad Q_{33}=\frac{1}{\bar{B}_3};$$

$$-P_{11}=-\frac{1}{\bar{D}};\quad -P_{12}=-\nu\bar{k}_2;\quad -P_{22}=\left(1-\nu^2\right)\bar{D}\bar{k}_2^2-\bar{\rho}\bar{I}_1\bar{\omega}^2+\bar{B}_3;$$

$$-P_{23}=\bar{B}_3\bar{k}_2;\quad -P_{33}=\bar{B}_3\bar{k}_2^2-\bar{\rho}\bar{h}\bar{\omega}^2.$$

Коефіцієнти матриць $\mathbf{Q}(\xi)$, $\mathbf{P}(\xi)$ залежать від функцій $\bar{\rho}(\xi),\ \bar{D}(\xi)$ і не містять їх похідних.

Для періодично змінних механічних та геометричних параметрів матриця системи (7) буде періодичною з періодом ξ_{00}. Позначимо через $U(\xi,0)$ матрицант системи (7), що задовольняє умови $U(0,0)=I_6$ (I_6 – одинична матриця шостого порядку). Згідно з теоремою Ляпунова-Пуанкаре [5-8] характеристичне рівняння матриці монодромії $U(\xi_{00},0)$ періодичної гамільтонової системи (7) буде зворотним

$$\rho^6-a_1\rho^5+a_2\rho^4-a_3\rho^3+a_2\rho^2-a_1\rho+1=0, \tag{8}$$

та має три пари ненульових взаємно обернених коренів $\rho_j,\ \rho_{j+3}=1/\rho_{j+3}$, $j=1,2,3.$

Матрицант $U(\xi,0)$ системи (7) на одному (основному) періоді можна найти одним із чисельних методів, розв’язуючи шість задач Коші для системи (7) з лінійно незалежними одиничними початковими векторами. Характеристичне рівняння (8) шостого порядку заміною $\rho+1/\rho=2b$ зводиться до трьох квадратних рівнянь $\rho^2-2b_j\rho+1=0$, коефіцієнти яких визначаються з кубічного рівняння $8b^3-4a_1b^2+(2a_2-6)b-a_3+2a_1=0.$

Якщо ввести заміну $\rho = \exp(\pm ish)$, то алгебраїчні квадратні рівняння $\rho^2 - 2b_j\rho + 1 = 0$ перейдуть в тригонометричні $\cos sh = b_j$. При дійсних $|b_j| \le 1$ однозначний розв'язок цих рівнянь потрібно вибирати згідно правилу відбору мод [5-8]

$$sh = (-1)^{N_j - 1} \arccos b_j + 2\pi\left[N_j/2\right],$$

де $\arccos b_j$ – головне значення оберненої тригонометричної функції із інтервалу $(0,\pi)$; N_j – порядковий номер появи нерівності $|b_j| < 1$ при зростанні частоти від нуля; $\left[N_j/2\right]$ – ціла частина числа $N_j/2$.

Позначимо відповідні власні вектори матриці монодромії $U(\xi_{00}, 0)$ через $\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_6$, приймаючи, що характеристичні числа (мультиплікатори матриці монодромії) пронумеровані так, що $|\rho_j| \le 1,\ j = 1, 2, 3$. При нерівних мультиплікаторах або існуванні лінійно незалежних векторів для рівних мультиплікаторів загальний розв'язок системи (4) при довільному ξ із інтервалу періодичності $(n-1)\xi_{00} < \xi < n\xi_{00}$ (n – ціле) можна записати у вигляді суперпозиції

$$col\left[q(\xi), p(\xi)\right] = \sum_{m=1}^{6} K_m \rho_m^{n-1} U\left(\xi - (n-1)\xi_{00}, \xi_{00}(n-1)\right) d_m, \tag{9}$$

з довільними постійними K_m. Формула (9) безпосередньо випливає із теореми Флоке для рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

Формула (9) дає можливість проаналізувати структуру розв'язків основних типів хвильових задач для періодично-неоднорідної пластини. Перш за все зауважимо, що при $-\infty < \xi < +\infty$ (об'ємні хвилі в необмеженій області) частотні зони існування об'ємних хвиль визначаються існуванням всіх одночасно рівних по модулю одиниці мультиплікаторів (мультиплікатори повинні лежати на одиничному колі та не співпадати між собою). До зон пропускання хвиль можна віднести і випадки, коли хоч би одна взаємно обернена пара мультиплікаторів лежала на одиничному колі, якщо під фізично розумним розв'язком для необмеженого середовища будемо розуміти суперпозицію відповідних цій парі доданків у розв'язку (9). Для напівобмеженої області $0 \le \xi < +\infty$ із (9), перш за все, маємо $col\left[q(0), p(0)\right] = \sum_{m=1}^{6} K_m d_m$. Оскільки при $\xi = 0$ фізично можливими є тільки три умови, то на розв'язок (9) потрібно накласти умову обмеженості при $\xi \to +\infty$. Для поверхневих хвиль розв'язок повинен затухати при $\xi \to +\infty$ і його слід шукати в частотній області, де $|\rho_j| < 1$, вважаючи $K_4 = K_5 = K_6 = 0$. У випадку, коли розв'язок повинен задовільняти тільки умову обмеженості при $\xi \to +\infty$, мультиплікатори потрібно вибирати згідно з правилом відбору мод [5-8]. В таких випадках хвилі не будуть тільки поверхневими, оскільки буде відбуватися відтік енергії від границі $\xi = 0$. У випадку обмеженої області $0 < \xi < L_1 \equiv \xi_{00} n_*$, ($n_*$ – фіксоване ціле число) необхідно скористатися формулами

$$col\left[q(0), p(0)\right] = \sum_{m=1}^{6} K_m d_m; \quad col\left[q(L_1), p(L_1)\right] = \sum_{m=1}^{6} K_m \rho_m^{n_*-1} d_m,$$

в яких всі шість сталих K_m визначаються із граничних умов при $\xi = 0$ (три умови) і $\xi = L_1$ (три умови).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
2. *Шульга О.М.* Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – с. 105 – 111.
3. *Шульга М.О.* О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин. – Теор. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – с. 3 – 7.
4. *Шульга М.О., Тробюк О.М.* Про змішану систему рівнянь типу Тимошенка коливань неоднорідних пластин. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 87. – с. 158-163.
5. *Shul'ga N.A.* Propagation of Elastic Waves in Periodically Inhomogeneous Media // Int. Appl. Mech. – 2003. 39, N 7. – P. 763-796.
6. *Shul'ga N.A.* Propagation of Coupled Waves in Layered-Periodic Continua for Interaction with an Electromagnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2003. 39, N 10. – P. 1146-1172.
7. *Shul'ga N.A.* Theory of Dynamical Processes in Mechanical Systems and Materials of Regular Structures // Int. Appl. Mech. – 2009. 45, N 12. – P. 1301-1330.
8. *Shul'ga N.A.* On Certain Mixed System of Equations of Theory of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. 46, N 3. – P. 247-251.

Стаття надійшла до редакції 22.10.2012 р.

Шульга М.О., Тробюк О.М.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ТИМОШЕНКО В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

Построено решение уравнений типа Тимошенко гармонических колебаний периодически-неоднородных пластин, представленных в гамильтоновой форме по пространственной координате. На основании теоремы Ляпунова-Пуанкаре установлены свойства характеристического уравнения и структура общего решения для неограниченных и полуограниченных областей.

Shul'ga M.O., Trobiuk O.M.

FORMATION OF EQUATIONS SOLUTIONS OF TYMOSHENKO TYPE IN THE HAMILTONIAN FORM OF HARMONIC VIBRATIONS OF PERIODICALLY HETEROGENEOUS PLATES

It was formed the solution of the equations of Timoshenko type of harmonic vibrations of periodically heterogeneous plates, that was presented in the Hamiltonian form of the spatial coordinate. Based on Lyapunov-Poincare theorem the properties of the characteristic equation and the structure of the general solution for the unlimited and semi limited areas were established.