

ТЕОРІЯ ТА ІСТОРІЯ АРХІТЕКТУРИ

УДК 515.2

С. М. Ковальов

*доктор технічних наук, професор
завідувач кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки
Київського національного університету будівництва і архітектури*

С. І. Ботвіновська

*кандидат технічних наук, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної
графіки КНУБА*

О. В. Мостовенко

*кандидат технічних наук, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної
графіки КНУБА*

АНАЛІЗ ДИСКРЕТНИХ КАРКАСІВ ПАРАБОЛОЇДІВ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З АФІННО ПЕРЕТВОРЕНОЮ СІТКОЮ У ПЛАНІ

Анотація. в статті проаналізовано вплив параметрів дискретної сітки в плані при формуванні каркасів поверхонь параболоїдів другого порядку статико-геометричним методом на величину зовнішнього формоутворюючого зусилля, що прикладається до вузлів сітки, якщо розподіл зовнішнього навантаження рівномірний.

Ключові слова: дискретний каркас; статико-геометричний метод; врівноважені сітки; зовнішнє навантаження; параболоїд

Вступ. Врівноважені сітки дискретних каркасів поверхонь, що формуються за допомогою статико геометричного методу (СГМ) [1] є основою ескізного проектування криволінійних покриттів будівель та споруд [3]. СГМ є наочною інтерпретацією методу скінчених різниць, тому дозволяє створити врівноважені сітки на довільному опорному контурі. При цьому, комірки сітки, яку топологічно задано у плані, можуть приймати різну форму. Як було зазначено в роботі [2], використання алгебраїчних поверхонь параболічного типу, дискретними аналогами яких будуть врівноважені сітки, дозволить розширити можливості СГМ.

Мета статті та постановка задачі. Основна мета роботи – виявити зв'язок між зовнішнім формоутворюючим навантаженням на вузли дискретної сітки при

формуванні каркасів поверхонь параболоїдів другого порядку та параметрами форми сітки у плані, комірки якої можна отримати афінним перетворенням квадрату.

Аналіз основних досліджень і публікацій. В роботі [3] на вузли дискретної сітки з квадратними в плані комірками під дією дійсного навантаження

$$kP = \frac{h^2(p_2 \pm p_1)}{p_2 \cdot p_1}$$

на кожний вузол сітки, що точно належить поверхні еліптичного або гіперболічного параболоїда

$$z = \frac{x^2}{2p_1} \pm \frac{y^2}{2p_2} \quad (1)$$

де p_1, p_2 – параметри відповідно твірної та напрямної парабол параболоїду;

k – коефіцієнти пропорційності;

h – шаг сітки в плані.

Аплікати вузлів сітки визначаються при розв'язанні системи рівнянь управління рівновагою вузлів:

$$z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j+1} + z_{i,j-1} - 4z_{i,j} + kP = 0 \quad (2)$$

де i, j – нумерація вузлів сітки.

В роботі [4] доведено, що навантаження kP на кожний вузол дискретної сітки параболоїду (1) з квадратними клітинами у плані, прямо пропорційне площі клітини у плані. В роботі [5] показано, що афінне перетворення врівноваженої сітки не порушує її рівноваги.

У відомих публікаціях не проводився аналіз впливу параметрів сітки у план на величину зовнішнього формоутворюючого зусилля kP , прикладеного до кожного вузла врівноваженої сітки.

Основна частина. Для більшої наочності параметри p_1 та p_2 у рівнянні (1) параболоїду замінено параметрами $p_1 = \frac{c}{2a^2}$ та $p_2 = \frac{d}{2b^2}$, які зображено на рис. 2, 3. У такому випадку рівняння еліптичного та гіперболічного параболоїдів відповідно прийматиме вигляд:

$$z = \frac{cx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} \quad (3)$$

$$z = \frac{cx^2}{a^2} - \frac{dy^2}{b^2} \quad (4)$$

або

$$z = \frac{cx^2}{a^2} \pm \frac{dy^2}{b^2} \quad (5)$$

Розглянемо довільну регулярну дискретну сітку в плані з клітинами у вигляді однакових паралелограмів із сторонами s та t . Лінії сітки нахилено під кутами відповідно α та β до осі OX (рис.1).

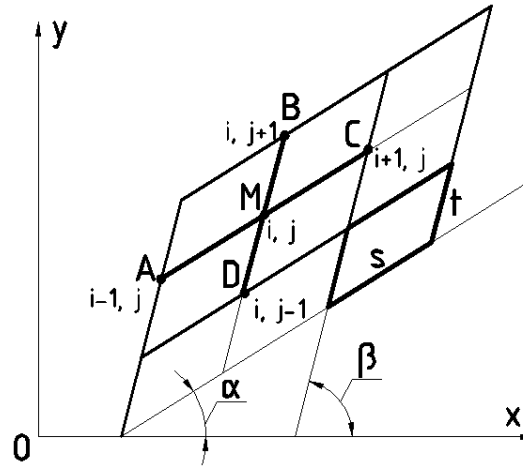


Рис. 1. Сітка в плані з клітинами у вигляді паралелограмів

Виберемо довільний вузол M ($X=X_{ij}$; $Y=Y_{ij}$). Абсциси та ординати вузлів A , B , C і D які суміжні з вузлом M , відповідно мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_{i-1,j} &= x_{i,j} - s \cdot \cos \alpha & y_{i-1,j} &= y_{i,j} - s \cdot \sin \alpha \\ x_{i+1,j} &= x_{i,j} + s \cdot \cos \alpha & y_{i-1,j} &= y_{i,j} + s \cdot \sin \alpha \\ x_{i,j-1} &= x_{i,j} - t \cdot \cos \beta & y_{i-1,j} &= y_{i,j} - t \cdot \sin \beta \\ x_{i,j+1} &= x_{i,j} + t \cdot \cos \beta & y_{i-1,j} &= y_{i,j} + t \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (6)$$

Після підстановки (6) у (5) можна буде визначити аплікати п'яти суміжних вузлів зірки сітки:

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= \frac{cx_{i,j}^2}{a^2} \pm \frac{dy_{i,j}^2}{b^2} \\ z_{i-1,j} &= \frac{c(x_{i,j} - s \cdot \cos \alpha)^2}{a^2} \pm \frac{d(y_{i,j} + s \cdot \sin \alpha)^2}{b^2} \\ z_{i+1,j} &= \frac{c(x_{i,j} + s \cdot \cos \alpha)^2}{a^2} \pm \frac{d(y_{i,j} + s \cdot \sin \alpha)^2}{b^2} \\ z_{i,j-1} &= \frac{c(x_{i,j} - t \cdot \cos \beta)^2}{a^2} \pm \frac{d(y_{i,j} - t \cdot \sin \beta)^2}{b^2} \\ z_{i,j+1} &= \frac{c(x_{i,j} + t \cdot \cos \beta)^2}{a^2} \pm \frac{d(y_{i,j} + t \cdot \sin \beta)^2}{b^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Зовнішнє зусилля kP рівномірно розподіленого навантаження на вузли визначається після підстановки (7) у рівняння (2) рівноваги вузла сітки:

$$kP = \frac{2c(s^2 \cos^2 \alpha + t^2 \cos^2 \beta)}{a^2} \pm \frac{2d(s^2 \sin^2 \alpha + t^2 \sin^2 \beta)}{b^2} \quad (8)$$

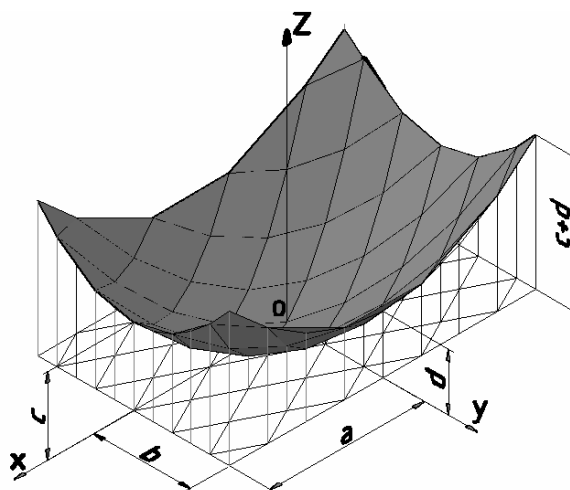


Рис. 2. Еліптичний параболоїд на ромбічній в плані сітці

Афінним перетворенням як сітки у плані, так і поверхонь (3) та (4) можемо отримати різні окремі випадки, яким відповідають різні зовнішні зусилля kP рівномірно розподіленого навантаження:

1. Комірка сітки у плані приймає форму ромба ($t = s$):

$$kP = 4s^2 \left[\frac{c(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}{a^2} \pm \frac{d(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)}{b^2} \right] \quad (9)$$

Якщо діагоналі ромба паралельні координатним осям відповідно OX та OY (рис.2), то формула (9) спрощується:

$$kP = 8s^2 \left[\frac{c \cdot \cos^2 \alpha}{a^2} \pm \frac{d \cdot \sin^2 \alpha}{b^2} \right] \quad (10)$$

2. Комірка сітки у плані приймає форму прямокутника ($\sin \beta = \cos \alpha$; $\cos \beta = -\sin \alpha$):

$$kP = \frac{2(b^2 \cdot c \cdot t \pm a^2 \cdot d \cdot s)}{a^2 b^2} \quad (11)$$

3. Комірка сітки у плані приймає форму квадрату, коли маємо ($\sin \beta = \cos \alpha$; $\cos \beta = -\sin \alpha$; $s=t$):

$$kP = \frac{2 \cdot s^2 (b^2 \cdot c \pm a^2 \cdot d)}{a^2 b^2} \quad (12)$$

Якщо параметри твірної та напрямної парабол однакові, то еліптичний параболоїд (3) перетворюється у параболоїд обертання:

$$z = \frac{c \cdot (x^2 + y^2)}{a^2} \quad (13)$$

А рівняння (4) гіперболічного параболоїду прийматиме вигляд:

$$z = \frac{c \cdot (x^2 - y^2)}{a^2} \quad (14)$$

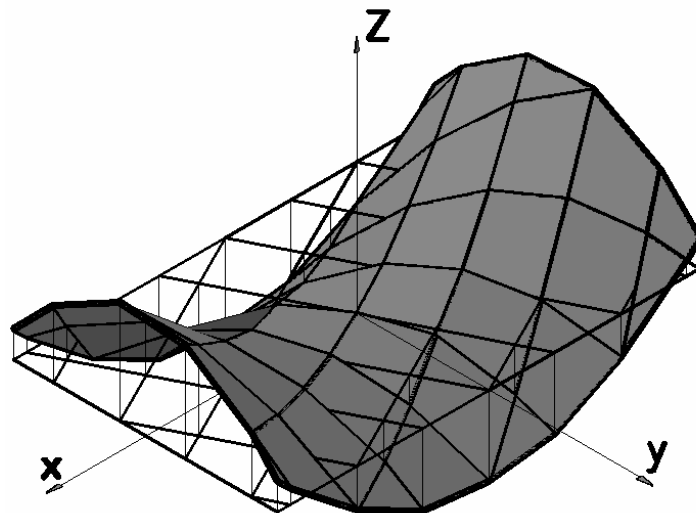


Рис. 3. Гіперболічний параболоїд на квадратній в плані сітці

Для поверхонь (13) та (14) формули (8 – 12) спрощуються.

4. Комірка сітки у плані приймає форму паралелограму:
а) для поверхні (13):

$$kP = \frac{2c \cdot (s^2 + t^2)}{a^2} \quad (15)$$

б) для поверхні (14) отримуємо формулу:

$$kP = \frac{2c \left[s^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + t^2 (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \right]}{a^2} \quad (16)$$

5. Комірка сітки має форму ромба:

а) для поверхні (13):

$$kP = \frac{8c \cdot s^2}{a^2} \quad (17)$$

б) для поверхні (14) маємо формулу (18):

$$kP = \frac{4 \cdot c \cdot s^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta)}{a^2} \quad (18)$$

в) якщо діагоналі ромба паралельні координатним осям, формула (18) прийматиме вигляд:

$$kP = \frac{8c \cdot s^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{a^2} \quad (19)$$

6. Комірка сітки має форму прямокутника:

$$kP = \frac{2c \cdot (s^2 \pm t^2)}{a^2} \quad (20)$$

7. Комірка сітки має форму квадрату:

а) для поверхні (13)

$$kP = \frac{4c \cdot s^2}{a^2} \quad (21)$$

б) для поверхні (14)

$$kP = 0 \quad (22)$$

Висновки

У результаті аналізу розглянутих випадків організації дискретної сітки у плані, яку можна отримати афінним перетворенням сітки із квадратними клітинами, у процесі формування поверхонь параболоїдів (5) можна зробити наступні висновки:

1. На будь-якій із розглянутих сіток характер розподілу зовнішнього навантаження залишається рівномірним, оскільки у формулах (9) – (12) та (15) – (22) відсутні дискретні параметри i та j .

2. Величина зовнішнього навантаження kP у загальному випадку залежить як від параметрів форми сітки у плані, так і від параметрів її положення.

3. Незалежно від параметрів поверхонь (3) та (4) їх дискретні каркаси на квадратній у плані сітці довільної орієнтації формуються під дією навантаження kP на кожний вузол, величина якого прямо пропорційна площі комірки у плані.

4. Зовнішнє зусилля kP на вузли прямокутної сітки у плані (11) та (20) не залежить від орієнтації сітки відносно поверхні.

5. При формуванні дискретного каркасу поверхні гіперболічного параболоїду (14) на квадратній у плані сітці незалежно від орієнтації сітки та її кроку, зовнішнє навантаження на вузли дорівнює нулю.

Література

1. Ковалев, С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций / С.Н.Ковалев// Дисс. ...докт. техн. наук: 05.01.01.- М.: МАИ, 1986. – 320 с.
2. Ковальов, С.М. Властивості деяких параболоїдів n -го порядку / С.М. Ковальов, С.І.Ботвіновська, О.В.Мостовенко// Управління розвитком складних систем. – 2015. - № 22. С. 114 – 118.
3. Ковальов, С.М. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. [Текст] / С.М. Ковальов, М.С.Гумен, С.І.Пустюльга, В.Є.Михайленко, І.Н.Бурчак// – Луцьк: Редакційно видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256 с.
4. Золотова, А.В. Дискретна кускова інтерполяція точок при формуванні поверхонь в архітектурі / А.В.Золотова// дис...кандидата технічних наук: 05.01.01 / Золотова Алла Василівна. – Київ: КНУБА, 2015. – 142.
5. Самчук, П.В. Керування формою дискретно заданих поверхонь в задачах проектування оболонки / П.В. Самчук //дис...кандидата технічних наук: 05.01.01 / Самчук П.В. – Київ: КІБІ, 1991. – 154.

Аннотация

В статье проведен анализ влияния параметров дискретной сети в плане при формировании каркасов поверхностей параболоидов второго порядка статико-геометрическим методом на величину внешнего формообразующего усилия, приложенного к узлу сети при равномерном распределении внешней нагрузки.

Ключевые слова: дискретный каркас; статико-геометрический метод; уравновешенные сетки; внешняя нагрузка; поверхность параболоида.

Annotation

In this article, it analyzed of the influence of the parameters of a discrete network in terms of when forming framework of surfaces of paraboloids the second regularity. The surface of paraboloid is designed with a help static-geometric method. Examined the influence of parameters on the size of forces that are applied to the nodes of the network and influence on a size of the external shape-generating effort. An external load is evenly distributed. Key words: digital frame of surface; static-geometric method; balanced grid; external load; surface of paraboloid.