

ОГЛЯД ДЕЯКИХ МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЇ РЕЛЬЄФУ

Розглянуто деякі методи апроксимації цифрових моделей рельєфу аналітичними функціями і статистичні методи.

Ключові слова: цифрова модель рельєфу, геоінформаційні системи, апроксимація поверхні, інтерполяція, алгебраїчні поліноми, мультиквадриковий метод, метод середнього вагового, метод вагових функцій, статистичні методи, коваріаційні матриці.

Стан проблеми, її актуальність.

Сучасні методи комп'ютерного опрацювання інформації базуються на створенні цифрових моделей рельєфу, які слугують основою для ГІС. Цифрова модель рельєфу визначена як цифрове і математичне представлення рельєфу місцевості на основі дискретної сукупності вихідних точок, які дозволяють з заданою точністю відтворити реальну поверхню та її структуру. Цифрові моделі рельєфу (ЦМР) мають самостійне значення для вирішення низки прикладних задач інженерного типу. Їх можна також використовувати як основу при створенні сукупної інформаційної моделі місцевості. Основними методами отримання вихідної інформації для побудови ЦМР є геодезичний, фотограмметричний та картографічний методи, оброблення інформації, її перетворення з метою отримання результатів, їх оптимізацію, подальше зберігання ЦМР здійснюють на комп'ютері. За отриманими даними створюють ЦМР для великих територій, навіть для цілих держав. Отже, питання точності побудови ЦМР на основі сканованих з карт ізоліній залишається актуальним.

Наступною проблемою створення ЦМР є математичний опис рельєфу, тобто створення математичної моделі рельєфу.

Розрізняють інтерполяцію та апроксимацію рельєфу. Інтерполяція передбачає використання певної, наперед заданої функції, значення якої відоме в деяких точках поверхні і отримання значення функції у будь-яких проміжних точках. Апроксимація - заміна реальної поверхні математичною, описаною певними функціями під заданими умовами. Невідому функцію апроксимування підбирають, виходячи із цих умов.

Апроксимація, як наближення поверхні - функцією - поняття ширше, і інтерполяцію можна розглядати як частковий випадок апроксимації.

Постановка проблеми.

Від методів апроксимування поверхні залежить точність побудови цифрових моделей рельєфу. Тому, виходячи із способів завдання вихідної інформації про рельєф, в результаті математичного моделювання поверхні рельєфу необхідно забезпечити мінімальні відхилення математичної моделі і реальної земної поверхні не лише в точках, що задають рельєф (вузько вихідної інформації), але й між ними. Використовується також класифікація, за якою методи поділяють на глобальні, якщо до апроксимації (інтерполяції) залучають всі дані і кусочні, які передбачають використання найближчих точок до визначуваної.

Аналіз предметної сфери дослідження.

Суперечливими моментами побудови ЦМР можна вважати: неадекватність вибору математичної моделі для побудови ЦМР за певним типом рельєфу; зосередженість на загальних характеристиках точності апроксимації рельєфу без аналізу локальних особливостей; неврахування особливостей побудови ЦМР через нерівномірний розподіл вихідної інформації. Аналіз спеціальної літератури дає підстави основні методи апроксимації розділити на принципово відмінні групи: перша передбачає для моделювання рельєфу використовувати аналітичні функції, друга базується на використанні статистичної функції, що враховують статистичні характеристики рельєфу.

До першої групи методів відносять методи, базовані на застосуванні:

- ортогональних поліномів;
- рядів Фур'є;
- мультіквадриків;
- сплайнів.
- метод середнього вагового;
- метод вагових функцій;

До статистичних методів відносять:

- метод випадкових функцій;
- метод середньої квадратичної коллокації;
- метод Крайгінга.

Однак, найкращі результати моделювання можна досягти на основі комбінування двох підходів: вилучення систематичної складової за допомогою поліномів і додаткове визначення поправок на основі статистичного аналізу рельєфу.

Очевидно, що у зв'язку зі складністю проблеми, представлено дослідження не може претендувати на повноту і вичерпність

Виклад основного матеріалу.**Апроксимація алгебраїчними поліномами.**

Метод поліномів зручний для апроксимації рельєфу тим, що наблизити поверхню можна, використовуючи поліном вузького степеню за невеликої кількості вихідних точок, що є суттєвим чинником під час польових методів отримання вихідної інформації, легко проводити оцінку точності апроксимації.

Метод з використанням степеневих поліномів полягає в заміні вихідної функції поліномами $P_k(x, y)$ степеня k :

$$Z_i = \sum_{r,s} a_{rs} x_i^r y_i^s, \quad (1)$$

$$r, s = 0, 1, \dots, m;$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

Коефіцієнт a_{rs} визначають із рішення системи:

$$AX - L = V, \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \dots & x_1^r y_1^s \\ 1 & x_2 & y_2 & \dots & x_2^r y_2^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & \dots & x_n^r y_n^s \end{bmatrix}$$

де

$$X^T = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{rs}]$$

$$L^T = [z_1, z_2, z_3, \dots, z_n]$$

Якщо кількість вихідних точок перевищує кількість відомих ars , то вони визначаються методом найменших квадратів із умови

$$\sum_{i=1}^n [z_i - \sum a_{rs} x_i^r y_i^s]^2 = \min \quad (3)$$

Для знаходження відмітки k -ої точки невідомі ars підставляють в рівняння типу (1) для k -ої точки.

Залежно від величини відстаней між точкою, що визначається, і вихідною в процесі розв'язку системи рівнянь можуть враховуватися ваги. Для визначення ваг [1, 2] запропоновано наступні формули:

$$\begin{aligned} p &= \frac{(1-r^2)}{r^2} & p &= \frac{1}{r^2} \\ p &= (1-0.9r^2) & p &= \exp(ar^2) \\ p &= \frac{(1-r^2)}{r} & p &= 0.9 \cdot (1-r^2) \end{aligned} \quad (4)$$

Як аргумент у формулах (4) використовують:

$$r = R_k / R_0$$

де R_k - радіус до спірної точки; R_0 - радіус зони пошуку.

Вибір степеня апроксимаційного поліному є проблемою складною. В більшості задач використовують поліноми 2-3 степеню. За використання поліномів вищих степенів на краях функція посилює і помилки апроксимації між інтерполяційними точками можуть досягати значних величин. Використовуючи поліноми у способі блукаючої поверхні отримують значні розходження в оцінці результатів апроксимації суміжних ділянок.

В сучасних апроксимаційних методах поліноми використовують найчастіше для визначення тренда із додатковим наближенням поверхні за іншою апроксимаційною функцією.

Мультиквадрикний метод.

Суть цього методу полягає у сумуванні поверхонь і топографічна поверхня апроксимується сумою часткових квадрик:

$$z_i = \sum_{j=1}^n c_j q(x_j, y_j, x_i, y_i) \quad (5)$$

де i - деяка точка топографічної поверхні;

c_j - коефіцієнт, що характеризують властивості поверхні;

$q(x_j, y_j, x, y)$ - квадрика точки.

Якщо як апроксимуючу поверхню вибирають гіперболоїд, тоді квадрика має вигляд:

$$q(x_j, y_j, x_i, y_i) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + B} \quad (6)$$

де B - невідомий параметр, значення якого залежать від розмірів ділянки і геоморфологічних особливостей рельєфу, його можна підбирати на основі статистичних досліджень.

Параметр B часто визначають за формулою:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]}{n(n+1)} \quad (7)$$

де n - кількість опорних точок.

В логарифмічному мультиквадрику квадратики запишеться:

$$q(x_j, y_j, x_i, y_i) = \ln \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (8)$$

Для визначення мультиквадрикової поверхні необхідно знайти коефіцієнти C_j . Для цього використовують координати (x_j, y_j, z_j) опорних точок. У результаті отримують систему з n рівнянь і n невідомими C_j .

$$z = Q \cdot c \quad (9)$$

де z - вектор n відміток вихідних точок;

Q - матриця розміром $n \times n$, елементами якої є квадрати опорних точок;

c - вектор невідомих.

$$c = Q^{-1} z \quad (10)$$

Тоді вектор c визначуваних відміток точок z' запишемо:

$$z' = Q' Q^{-1} z \quad (11)$$

де Q' - матриця розміру $k \times n$, елементами якої є квадрати між опорними та визначуваними точками.

Предметом дослідження є вид квадратики відповідно до типу апроксимованої поверхні.

Метод середнього вагового.

За цим методом відмітку k -ої точки поля, на якому задані n вихідних точок з відповідними відмітками z_i , $i=1, 2, \dots, n$, знаходять із залежності:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{S_{ik}^p}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{S_{ik}^p}}, \quad (12)$$

де S_{ik} - відстань між вихідною і визначуваними точками (рис. 1).

p – показник степеня, залежить від типу рельєфу, як правило p приймають рівним одиниці.

Із літератури [3] відомо, що цей метод використовують як найпростіший, який не вимагає значних обчислювальних зусиль.

Метод не позбавлений недоліків, а саме: він може приводити до двозначних розв'язків, якщо невідомі характеристики поверхні і на результати сильно впливає нерівномірний розподіл даних.

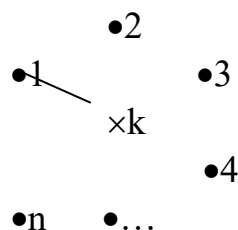


Рис. 1. Принцип знаходження відміток точок за методом середнього вагового

Метод вагових функцій.

У цьому методі відмітки визначуваної точки на основі відміток вихідних точок отримуємо за співвідношенням:

$$z_i = W_1 z_1 + W_2 z_2 + \dots + W_n z_n, \quad (13)$$

де $W_1, W_2, \dots, W_n$ - ваги, з якими відмітки кожної вихідної точки діють на відмітку визначуваної точки;

$z_1, z_2, \dots, z_n$ - відмітки вихідних точок.

Рівняння (13) можна записати у вигляді:

$$z_i = f^T Bz, \quad (14)$$

де z - n -мірний вектор вихідних відміток;

B - матриця розміром $n \times n$, елементи якої залежать від координат x, y вихідних точок;

f - h -мірний вектор, елементи якого залежать від координат вихідних та визначуваної точок.

Вагову функцію можна представити у вигляді:

$$W_j = f^T B e_j, \quad (15)$$

де e_j - стандартне значення вагових функцій. Для точки, що визначається, стандартне значення дорівнює 1, для всіх інших точок стандартне значення дорівнює нулям.

Якщо всі функції проходять через їх відповідні стандартні значення, то апроксимуюча поверхня точно проходить через всі ці точки.

Загальна теорія статистичних методів, вивід основної формули.

Уявимо собі, що ми маємо дві множини випадкових величин “вимірів” $l_1, l_2, \dots, l_q$, що утворюють q -мірний вектор

$$l = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_q]^T, \quad (16)$$

і множину “сигналів” тобто прогнозованих величин $s_1, s_2, \dots, s_m$, що утворюють m -мірний вектор

$$s = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_m]^T, \quad (17)$$

Припускається, що кожна з цих величин мають математичне сподівання рівне нулю, тобто

$$E\{l\} = 0, \quad E\{s\} = 0, \quad (18)$$

де $E\{\}$ означає усереднення в контексті теорії ймовірності. Величини, що мають нульове усереднене значення називають центрованими.

Розглянемо також коваріаційні матриці

$$C_{ll} = \text{cov}(l, l), \quad (19)$$

$$C_{sl} = \text{cov}(s, l), \quad (20)$$

$$C_{ss} = \text{cov}(s, s), \quad (21)$$

де C_{ll} і C_{ss} – автоковаріаційні матриці векторів l і s відповідно; C_{sl} – матриця взаємних коваріацій між l і s . Елементи $q \times q$ матриці C_{ll} є середні добутки

$$E\{l_i l_j\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, q; \quad (22)$$

елементи $m \times q$ матриці C_{sl} рівні

$$E\{s_k l_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (23)$$

а елементами $m \times m$ матриці C_{ss} служать величини

$$E\{s_k s_h\}, \quad k, h = 1, 2, \dots, m; \quad (24)$$

Вказані співвідношення вірні, оскільки наші випадкові величини центровані.

В векторному позначенні можна записати

$$C_{ll} = E\{ll^T\}, \quad (25)$$

$$C_{sl} = E\{sl^T\}, \quad (26)$$

$$C_{ss} = E\{ss^T\}, \quad (27)$$

Припускається, що ці коваріаційні і інші матриці мають повний ранг, тобто $m \times q$ матриця A має повний ранг, якщо ранг (A) дорівнює меншому з чисел m і q , і що вектор вимірів l відомий, а вектор s невідомий. Зв'язок між l і s дається не через функціональні співвідношення, а через коваріаційні матриці (25)–(27).

Лінійна оцінка вектора s має вигляд

$$\hat{s} = Hl, \quad (28)$$

де H – деяка матриця $m \times q$, тобто кожна компонента вектора s апроксимується лінійною комбінацією даних l .

Вектор помилок ε визначається співвідношенням

$$\varepsilon = \hat{s} - s, \quad (29)$$

а його коваріаційну матрицю

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = \text{cov}(\varepsilon, \varepsilon) = E\{\varepsilon\varepsilon^T\} = E\{(\hat{s} - s) \cdot (\hat{s} - s)^T\} \quad (30)$$

називають коваріаційною матрицею помилок. Діагональні елементи цієї матриці – дисперсії помилок σ_k^2 оцінюваних сигналів s_k , які є компонентами вектора s ,

$$\sigma_k^2 = E\{\varepsilon_k^2\} = E\{(\hat{s} - s)^2\} \quad (31)$$

Згідно загальної теорії статистичної оцінки, ми визначаємо найкращу лінійну оцінку s за l як незміщену лінійну оцінку з мінімальною дисперсією.

Усереднюючи (28) та враховуючи вираз (22), отримаємо

$$E\{\hat{s}\} = HE\{l\} = 0 = E\{s\}; \quad (32)$$

в цьому і полягає фактична умова незміщеності оцінки. Тому оцінка (32) є незміщеною при будь-якій матриці H .

Визначимо H так, щоб дисперсії помилок (31) були мінімальні. Знайдемо коваріаційну матрицю помилок (30) для довільної матриці H .

З допомогою формул (28) і (29) одержимо

$$\begin{aligned} \varepsilon\varepsilon^T &= (Hl - s) \cdot (Hl - s)^T = (Hl - s) \cdot (H^T l^T - s^T) = \\ &= Hl^T H^T - sl^T H^T - Hls^T + ss^T. \end{aligned} \quad (33)$$

Усереднення цього виразу дає коваріаційну матрицю помилок (30). Маємо

$$E\{\varepsilon\varepsilon^T\} = HE\{l^T\}H^T - E\{sl^T\}H^T - HE\{ls^T\} + E\{ss^T\}$$

або згідно з виразами (22)–(27) і (30),

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = HC_{ll}H^T - C_{sl}H^T - HC_{ls} + C_{ss} \quad (34)$$

Вираз (34) еквівалентний наступному

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = C_{ss} - C_{sl}C_{ll}^{-1}C_{ls} + (H - C_{sl}C_{ll}^{-1})C_{ll}(H - C_{sl}C_{ll}^{-1})^T \quad (35)$$

Це легко перевіряється перемноженням, перегрупуванням і використанням того, що $C_{ll}^{-1}C_{ll} = I$ (I – одинична матриця). Обернена матриця C_{ll}^{-1} існує оскільки, як було сказано вище всі коваріаційні матриці мають повний ранг.

Матриця (35) є сумою двох матриць

$$\begin{aligned} A &= C_{ss} - C_{sl}C_{ll}^{-1}C_{ls} \\ B &= (H - C_{sl}C_{ll}^{-1})C_{ll}(H - C_{sl}C_{ll}^{-1})^T \end{aligned} \quad (36)$$

Матриця A не залежить від H тому є постійною для всіх можливих лінійних оцінок (28). Матрицю B можна зробити нульовою, приймаючи

$$H = C_{sl}C_{ll}^{-1}. \quad (37)$$

Отже оцінка з мінімальною дисперсією відповідає випадку $B=0$ і матриці H . Підстановка цієї формули в (28) дає наступний вираз

$$\hat{s} = C_{sl}C_{ll}^{-1}l, \quad (38)$$

що і забезпечує найліпшу (незміщену з мінімальною дисперсією) лінійну оцінку вектора s в функції вектора вихідних даних l . При оптимальній оцінці (2.43) $B=0$, і тому формула (35) перетвориться до вигляду

$$\sigma^2 = C_{ss} - C_{sl} C_{ll}^{-1} C_{sl}^T. \quad (39)$$

і означає коваріаційну матрицю помилок прогнозування s (оцінка точності).

У разі коли вихідні містять в собі помилки вимірів формули (38) і (39) запишуться у такому вигляді

$$\bar{s} = C_{sl} (C_{ll} + D)^{-1} l, \quad (40)$$

$$\sigma^2 = C_{ss} - C_{sl} (C_{ll} + D) C_{sl}^T. \quad (41)$$

де D – діагональна матриця, що містить в собі квадрати середніх квадратичних похибок вимірів.

Нині існує багато модельних коваріаційних функцій для апроксимації емпіричних значень коваріаційних функцій. В частковому випадку найчастіше використовуються такі:

$$\begin{aligned} C(R) &= C_0 - kR^m \\ C(R) &= C_0 \cdot e^{-kR^m} \\ C(R) &= \frac{C_0}{(1 + k^2 R^2)^m} \\ C(R) &= \frac{C_0}{m} \cdot \ln \left(\frac{2e^m}{1 + \sqrt{1 + k^2 R^2}} \right) \end{aligned}$$

Де C_0 – дисперсія поля (локального або глобального в залежності від задачі);

k – певні коефіцієнти, які визначаються згідно способу найменших квадратів,

m – коефіцієнт, який задається апріорно.

При виборі тої чи іншої модельної функції необхідно вирішити питання про те, які і скільки параметрів будуть характеризувати її найбільш важливі властивості, а також встановити фізичний зміст цих параметрів (локальні параметри коваріаційної функції зображені на рис. 2). Розглянемо три основні параметри коваріаційної функції: дисперсію поля C_0 , довжину кореляції ξ і параметр кривини χ .

Дисперсія поля C_0 – це значення коваріаційної функції $C(R)$ при $R=0$. Довжина кореляції ξ – таке значення аргументу коваріаційної функції $C(R)$, для якого має місце рівність

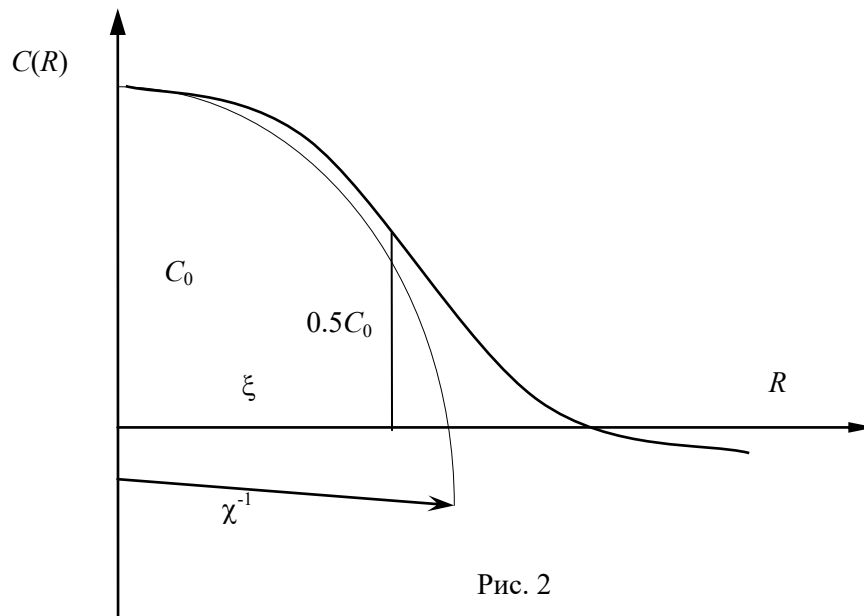
$$C(\xi) = \frac{1}{2}C_0;$$

Параметр кривини χ – безрозмірна величина, яка пов'язана з кривиною коваріаційної функції в точці $R=0$ співвідношенням:

$$\chi = k \cdot \xi^2 / C_0;$$

де

$$k = \frac{C''(0)}{(1 + (C'(0))^2)^{1.5}} \quad (42)$$



Висновки та рекомендації

Розглянуто деякі методи апроксимації рельєфу для побудови цифрових моделей рельєфу. Для розглянутих статичних методів встановлено, що вищеописані параметри: дисперсія поля, довжина кореляції і параметр кривини, дуже добре описують поведінку коваріаційної функції на малих та середніх відстанях R . Дві різні модельні коваріаційні функції, що мають однакові чисельні значення C_0 , ξ , χ будуть давати приблизно однакові помилки інтерполяції і прогнозу значення висоти для точок з невідомими відмітками висот. При цьому C_0 відіграє роль масштабного фактору помилок інтерполяції;

параметр кривини характеризує поведінку коваріації на малих R , а довжина кореляції описує коваріації на відстанях $R=\xi$.

Звідси випливає, що неврахування при виборі модельної функції параметру кривини призведе до того, що будуть суттєво спотворені результати прогнозу на малих відстанях R . Це пов'язано з тим, що в формулу (42) входить кривина коваріаційної функції в точці $R=0$, яка в фізичному розумінні представляє собою дисперсію горизонтального градієнту перевищень.

Слід зазначити, що в цих вищеприведених функціях знаходиться коефіцієнт k , а значення коефіцієнта m задається апіорно. Цей підхід дає змогу отримати широкий спектр апроксимуючих функцій при мінімальній кількості базових функцій. На базі цих функцій можна проводити дослідження, і розроблювати рекомендації для вибору коефіцієнта m для характерних типів рельєфу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бурштинська Х.В. Порівняльний аналіз побудови цифрових моделей рельєфу з використанням апроксимаційних функцій // Геодезія, картографія і аерофотознімання. -2001. – Вип.61. – С.137-148.
2. Журкин И.Г, Нейман Ю.С. Методы вычисления в геодезии.-М.: Недра, 1988. – 303 с.
- 3.БурштинськаХ.В. Теоретичні та методологічні основи цифрового моделювання рельєфу за фотограмметричними та картографічними даними: дис... д-ра техн. наук: 05.24.02 / Бурштинська Христина Василівна. – Львів, 2003.- 226 с.
- 4.Зазуляк П.М., Гавриш В.Г., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: Навчальний посібник. – Львів: Видавництво «Растр - 7», 2007. – 408 с.
5. Пряха Б.Г., Білецький Я.В. Про точність геодезичних вимірювань // Вісник геодезії та картографії. -2003. -№ 3 (30). –С. 43-49.
6. К.Айерлэнд, М.Роузен Классическое введение в современную теорию чисел - М.:Мир,1987.- 416 с.
7. Бурштинська Х.В., Заяць О.С. Дослідження точності побудови цифрових моделей рельєфу на основі картографічних даних // Вісник геодезії і картографії. – 2002.- № 2. – С. 26-31.
8. Бурштинська Х.В., Заяць О.С. Теоретичні основи та експериментальні дослідження математичних функцій для побудови цифрових моделей рельєфу // Вісник геодезії і картографії. – 2002.- № 4. – С. 32-37.
9. Бурштынская Х.В., Неманежина Т.А., Петракова В.Н. Анализ методов аппроксимации при построении цифровых моделей рельефа // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1988. - №47. – С. 102-105.

10. Романовский А.С., Казаркина В.И. Использование случайных функций для цифрового моделирования рельефа// Геодезия и картография. – 1988. - № 7. – С. 29-31.

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрены некоторые методы аппроксимации цифровых моделей рельефа аналитическими функциями и статистические методы.

Ключевые слова: цифровая модель рельефа, информационные системы, аппроксимация поверхности, интерполяция, алгебраические полиномы, мультиквадрик метод, метод среднего весового, метод весовых функций, статистические методы, ковариационные матрицы.

SUMMARY

The article discusses some methods of approximation DEM analytic functions and statistical methods.

Key words: digital model relefa, geographic information systems, surface approximation, interpolation, algebraic polynomials, multiquadrics method, the average weight method of weight functions, statistical methods, covariance matrices.