$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi} = \theta_2 - \theta_1; \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau} = \theta_1 - \theta_2,$$

розв'я зання яких розглянуто в роботі [2].

Література

1. *Кононенко Г. М.* Аналитические и численные решения одно- и двумерных краевых задач конвективного теплопереноса: Препринт 81.4. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. – 64 с.

2. *Кононенко Г. М., Вознюк Л. Ф.* Приближенные методы исследования тепло- и массопереноса в системах извлечения тепла Земли. – К.: Наукова думка, 1975. – 139 с.

3. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М.: Гостоптехиздат, 1949. – 625 с.

УДК 556.34+556.072+518.5

Г. М. Кононенко, *канд. техн. наук*
Київський національний університет
будівництва і архітектури

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОЇ ТЕЧІЇ ПІДЗЕМНИХ ВОД ПРИ КОНВЕКТИВНОМУ ТЕПЛООБМІНІ

Відомо, що найбільші труднощі при розв'язанні задач планової неізотермічної фільтрації постають при реалізації крайової задачі для рівняння поширення тепла тому, що процес теплопереносу відбувається за допомогою кількох механізмів [1]: зміна температури за рахунок теплопровідності та міжфазового теплообміну, а також конвективний перенос досягнутих значень температури, причому теплоперенос ковекцією відбувається в напрямі градієнта напору (тиску), тобто в напрямі нормалі до ізобари в певній точці пласта. Таким чином різницева апроксимація такої задачі має порівняно однаково описувати два по суті різних фізичних процеси. Така схема, яка будується на основі методу розщеплення рівняння на фізичні процеси, була використана нами в працях $[2]$ і $[3]$.

Розглянемо прямокутний елемент нескінченного пласта $(-a \le x \le a;\ -b \le y \le b)$ з двома різнойменними свердловинами в протилежних вершинах. Зважаючи на осесиметричність як гідродинамічного, так і теплового полів, розглядається область $D = (0 \le x \le a; 0 \le y \le b)$. Вважається, що для фільтраційного потоку рідини справджується закон Дарсі. Тоді рівняння нерозривності можна записати у вигляді

$$div\left(\frac{k\rho_p}{\mu_p} gradP\right) = n\frac{\partial \rho_p}{\partial t}\ , \qquad (1)$$

де $\rho_p = \rho_p(T, P)$ – густина і $\mu_p = \mu_p(T, P)$ – в'язкість рідини; n – пористість; k – коефіцієнт фільтрації; P – тиск; t – час, причому $0 \le t \le t_m$; T – температура.

Нехай на нагнітальній і експлуатаційній свердловинах підтримуються забійні тиски, тоді крайові умови для рівняння (1) мають вигляд:

$$P(0,0,t) = P_н(t), \quad 0 \le t \le t_m\ , \qquad (2)$$

$$P(a,b,t)=P_e(t), \qquad 0\le t\le t_m \ , \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad 0<y\le b, \ \ 0\le t\le t_m \ , \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=a}=0, \quad 0\le y\le b, \quad 0\le t\le t_m \ , \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad 0<x\le a, \ \ 0\le t\le t_m \ , \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=b}=0, \quad 0\le x\le a\,, \quad 0\le t\le t_m \,. \tag{7}$$

Рівняння збереження енергії має вигляд:

$$div(\lambda\, gradT)+grad\left(C_{\mathrm{p}}\rho_p\vec{v}\,T\right)=\frac{\partial}{\partial t}(C\rho\,T), \tag{8}$$

де $\lambda=\lambda(T)$– коефіцієнт теплопровідності пласта, причому $\lambda=n\lambda_p+$ $+(1-n)\lambda_n$; $C_p=C_p(T)$ – теплоємність рідини; $C\rho=nC_p\rho_p+$ $+\ (1-n)C_n\rho_n$ – теплоємність пласта; C_n – теплоємність і ρ_n – густина скелету пласта; v – швидкість фільтрації. Розв'язок рівняння (8) має задовольняти наступним крайовим умовам:

$$T(x,y,0)=T^+(x,y), \ \ 0\le x\le a, \ \ 0\le y\le b, \tag{9}$$

$$T(0,0,t)=T_n(t), \ \ 0\le t\le t_m, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \ \ 0<y\le b, \ \ 0\le t\le t_m, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=a}=0, \ \ 0<y\le b, \ \ 0\le t\le t_m, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \ \ 0<x\le a, \ \ 0\le t\le t_m, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=b}=0,\ \ 0<x\le a,\ \ 0\le t\le t_m. \tag{14}$$

Для розв'язання поставленої задачі в області D вводиться різницева сітка $\Omega=\omega_h\times\omega_\tau$, причому

$$\omega_h=\left\{x_i=ih_1;\ y_j=jh_2;\ i=0,1,..,N_1;\ j=0,1,..,N_2;\ \ N_1=\frac{a}{h_1},\ \ N_2=\frac{b}{h_2}\right\},$$

де h_1 і h_2 – кроки сітки за просторовими координатами x і y; N_1 та N_2– число кроків за відповідними координатами;

$$\omega_\tau=\{t_l;\ t_0=0,t_1,t_2,..,t_l,..,t_{N3}\};$$

$\tau_l=t_l-t_{l-1}$ – крок сітки за часом; N_3 – число кроків за часом.

Рівняння (1) на сітці Ω апроксимується звичайним різницевим рівнянням з похибкою $O\left(h_1^2+h_2^2\right)$. Крайові умови (2) – (7) також апроксимуються з такою ж похибкою, при цьому припускається, що на межі області D крім крайових умов справджується і рівняння (1).

Через те що коефіцієнти рівняння (1) залежать від температури і тиску, для розв'язання одержаної системи нелінійних різницевих рівнянь організується ітераційний процес, причому на кожній ітерації крім розв'язання різницевого аналогу задачі (1) – (7) розв'язується і різницева задача, що відповідає диференціальній задачі (9) – (14). Вихідні значення T^+ і P_0, необхідні для організації ітерацій, приймаються з попереднього часового шару (зовнішня ітерація). На кожній зовнішній ітерації розв'язується система лінійних різницевих алгебраїчних рівнянь, які апроксимують на кожній ітерації задачу (1) – (7). Для розв'язання вказаної системи рівнянь використовується швидкозбіжний ітераційний метод верхньої релаксації [4], який можна подати у вигляді (внутрішня ітерація)

$$a_{ij}P_{i+1,j.}^{(r+1/2)}-(c_{ij}+\gamma_{ij})P_{ij}^{(r+1/2)}+b_{ij}P_{i-1,j}^{(r+1/2)}=$$

$$=f_{ij}-\alpha_{ij}P_{i,j+1}^{(r)}-\beta_{ij}P_{i,j-1}^{(r+1)}, \tag{*}$$

$$P_{ij}^{(r+1)}=P_{ij}^{(r)}+\chi\left(P_{ij}^{(r+1/2)}-P_{ij}^{(r)}\right),\quad i=0,1,...,N_1;\quad j=0,1,...,N_2,$$

де $r = 0, 1, \dots$ – номер внутрішньої ітерації; χ – параметр прискорення, який визначається за формулою

$$\chi = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda_1}};$$

λ_1 – максимальне власне значення ітераційної матриці методу Зейделя [4].

Крім того введені такі позначення:

$$a_{i\,j} = \frac{\tau_{l+1} d_{i+1/2,j}}{n h_1^2}; \quad b_{i\,j} = \frac{\tau_{l+1} d_{i-1/2,j}}{n h_1^2}; \quad c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j},$$

$$\alpha_{i\,j} = \frac{\tau_{l+1} d_{i,j+1/2}}{n h_2^2}; \quad \beta_{i\,j} = \frac{\tau_{l+1} d_{i,j-1/2}}{n h_2^2}; \quad \gamma_{i\,j} = \alpha_{i\,j} + \beta_{i\,j};$$

$$d_{i+1/2,j} = \begin{cases} \dfrac{k\rho_{i+1/2,j}}{\mu_{i+1/2,j}}, & i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \\ \dfrac{2k\rho_{1/2,j}}{\mu_{1/2,j}}, & i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \\ 0, & i = N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \end{cases}$$

$$d_{i-1/2,j} = \begin{cases} \dfrac{k\rho i_{i-1/2,j}}{\mu_{i-1/2,j}}, & i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, \mathrm{N}_2 - 1, \\ \dfrac{2k\rho_{N_1-1/2,j}}{\mu_{N_1-1/2,j}}, & i = N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ 0, & i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \end{cases}$$

$$d_{i,j+1/2}=\begin{cases}\dfrac{k\rho_{i,j+1/2}}{\mu_{i,j+1/2}}, & i=1,2,\ldots,N_1-1, \quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\\ \dfrac{2k\rho_{i,1/2}}{\mu_{i,1/2}}, & i=1,2,\ldots,N_1, \quad j=0,\\ 0, & i=0,1,\ldots,N_1-1, \quad j=N_2,\end{cases}$$

$$d_{i,j-1/2}=\begin{cases}\dfrac{k\rho_{i,j-1/2}}{\mu_{i,j-1/2}}, & i=1,2,\ldots,N_1-1, \quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\\ \dfrac{2k\rho_{i,N_2-1/2}}{\mu_{i,N_2-1/2}}, & i=0,1,\ldots,N_1-1, \quad j=N_2,\\ 0, & i=1,2,\ldots,N_1, \quad j=0.\end{cases}$$

Розв'язання рівняння (*) здійснюється методом прогонки вздовж y_j – рядків. При виконанні умови

$$\max_{\omega_h}\left|P_{i,j}^{r+1}-P_{i,j}^{r}\right|<\varepsilon_1,$$

де ε_1 – точність збіжності внутрішніх ітерацій, переходимо до розв'язання різницевого аналогу задачі (8) – (14). Для цього використовується метод розбиття на фізичні процеси, який полягає в наступному. Нехай відомий розподіл температури на момент часу $t=t_k$. Перехід на момент часу $t_{k+1}=t_k+\tau_{k+1}$ здійснюється в два етапи. На першому етапі, використовуючи значення T^k як початкові, знаходимо значення $\widetilde{T}$ як розв'язок рівняння теплопровідності

$$\gamma_1\frac{\partial}{\partial t}C\rho T=div(\lambda gradT) \tag{а}$$

з крайовими умовами (10) – (14). На другому етапі одержані значення температури $\widetilde{T}$ відіграють роль початкових при визначенні T^{k+1} з рівняння

$$\gamma_2\frac{\partial}{\partial t}C\rho T=gradC_p\rho_p\vec{v}T. \tag{б}$$

Коефіцієнти γ_1 і γ_2 обчислюються за формулами

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}; \quad \gamma_2 = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2},$$

де τ_1, τ_2 – кроки за часом відповідно на першому та другому етапах.

Диференціальне рівняння (а) є двовимірним рівнянням параболічного типу і тому при його чисельній реалізації використовується економічна локально-одновимірна схема. Рівняння (б) – одновимірне диференціальне рівнянням тому, що напрям градієнта збігається з напрямом нормалі до ізобари в заданій точці гідродинамічного поля, яка є дотичною до лінії течії в заданій точці. Розв'язання рівняння (б) здійснюється за явною схемою:

$$\overline{T}_{i\,j}^{l+1} = \widetilde{T}_{i\,j} + \frac{\widetilde{T}_{i\,j} - T_{c;i\,j}}{\Delta n_{i\,j} C\rho}\left(\frac{C_p \rho_p k}{\mu_p} . \frac{P_{c;i\,j}^{l+1} - P_{i\,j}^{l+1}}{\Delta n_{i\,j}} . \overline{\tau}\right), \tag{в}$$

де $T_{c;i\,j}, P_{c;i\,j}^{l+1}$ – температура з проміжного шару і тиск в точці перетину нормалі з найближчою до даного вузла лінією сітки в напрямі протилежному додатному напряму нормалі; $\Delta n_{i\,j}$ – відстань між даним вузлом і вказаною точкою на нормалі. Алгоритм розв'язання рівняння (б) за схемою (в) стійкий при виконанні умови

$$\overline{\tau} < \frac{C\rho\mu_p}{C_p \rho_p k} \max_{i\,j}\left(\frac{\Delta n_{i\,j}^2}{P_{c;i\,j}^{l+1} - P_{i\,j}^{l+1}}\right).$$

При розв'язанні рівняння (в) часовий інтервал $(t_l + \tau_1, \tau_{l+1})$ розбивається на відрізки довжиною $\overline{\tau}$, на яких шукається розв'язок рівняння (б) за формулою (в); при цьому на момент часу $t_l + \tau_1 + s\overline{\tau}$ шукаються значення $\overline{T}$, причому за вихідні значення температури $\widetilde{T}$ приймаються значення, одержані за формулою (в) на момент часу $t_k + \tau_1 + (s-1)\overline{\tau}$.

Зовнішні ітерації закінчуються при виконанні умов

$$\max_{\omega_h}\left|P_{i\,j}^{n+1,k+1} - P_{i\,j}^{n,k+1}\right| < \varepsilon_2, \quad \max_{\omega_h}\left|T_{i\,j}^{n+1,k+1} - T_{i\,j}^{n,k+1}\right| < \varepsilon_3,$$

де $n = 0,1,2,\ldots$ – номер зовнішньої ітерації; $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ – точність збіжності ітерацій.

Реалізація запропонованого алгоритму на ЕОМ дозволяє дослідити взаємодію гідродинамічного і теплового полів при неізотермічній фільтрації рідини, викликаної нагнітанням в пласт холодного або нагрітого теплоносія.

Література

1. *Кононенко Г. М.* Комбинированные модели тепло- и массопереноса: принципы построения, структура, алгоритмы и методы их реализации. – К., 1985. – 64 с. (НАН України. Ін-т математики; препринт 85–95).

2. *Кононенко Г. М., Фомичова Т. Г.* Тепло- и массоперенос при двумерном течении жидкости и его исследование расщеплением уравнений по физическим процессам // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике: Материалы 2-й всесоюзн.конф. (Киев 9-11 сентября 1985г.). – К.: ИМ НАНУ, 1985. – С. 125–127.

3. *Кононенко Г. М., Кириченко А. М., Фомичова Т. Г.* Применение численных алгоритмов к решению задач тепло- и массопереноса и геохимической гидродинамики // Нестационарные задачи дифузии и фильтрации. – К.: ИМ НАНУ, 1986. – С. 16–39.

4. *Вазов В., Форсайт Дж.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: ИЛ, 1963. – 487 с.