УДК. 539.3

Соловйов І.Л., канд. техн. наук

КРИТИЧНІ СТАНИ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ З ПЛАТФОРМОЮ ПРИ ПРОСТОМУ І СКЛАДНОМУ ОБЕРТАННЯХ

Велике впровадження оболонкових конструкцій у багатьох галузях промисловості призводить до виникнення проблем щодо їх тривалої й надійної експлуатації. Конструкції роторів турбінних установок сучасних транспортних засобів, як правило, включають тонкостінні пружні тіла. У випадках зміни просторової орієнтації осі обертання ротора, наприклад, при маневруванні літака або корабля, елементи цих тіл знаходяться у стані складного руху, що включає два види обертань і пружні коливання. Гіроскопічні взаємодії між цими видами рухів призводять до виникнення сил інерції дуже складної структури, під дією яких у пружному тілі породжуються поля додаткових статичних і динамічних напружень. Проте особливу небезпеку для пружних тіл можуть мати критичні стани обертання, пов'язані з втратою стійкості їхньої пружної рівноваги [1-3, 5-8, 11-12] або переходом у режим резонансних прецесійних коливань [1, 4, 5, 10-12]. Для встановлення загальних закономірностей появи критичних станів доцільно розглянути особливості статичної і динамічної поведінки еквівалентних твердих тіл. З цією метою проведемо аналіз власних коливань і стійкості жорстких оболонок шарнірно, пружно або жорстко з'єднаних з носієм, який обертається. Вивчимо випадки їх простого і складного обертань.

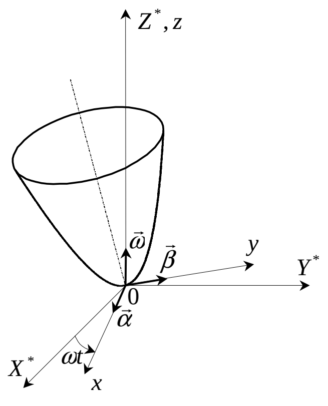

Рис. 1. Розрахункова схема

Дослідження простого і складного обертань жорсткої оболонки проводиться з використанням інерціальної системи координат $OX^*Y^*Z^*$ (рис. 1). Нехай центром своєї меншої основи оболонка приєднана за допомогою пружного шарніра в точці O із основою, що обертається з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі OZ^*. Зв'яжемо з основою систему координат $Oxyz$ з ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, так щоб вісь Oz співпала з віссю OZ^*. Припустимо, що тіло може повертатися щодо осей *Ox* і *Oy* на малі кути $\vec{\alpha}$ і $\vec{\beta}$, але не може повертатися в системі *Oxyz* щодо осі *Oz*. У вихідному стані вісь кругової симетрії тіла збігається з віссю *Oz* і $\vec{\alpha}=0$, $\vec{\beta}=0$.

Розглянемо обумовлені кутами α і β малі вільні коливання і стійкість рівноваги тіла в системі координат *Oxyz*. При повороті на ці кути на тіло діє пружний момент $\vec{M}^{пр}=M_x^{пр}\vec{i}+M_y^{пр}\vec{j}$, компоненти якого обчислюються за формулами

$$M_x^{пр}=-k\alpha\,,\ M_y^{пр}=-k\beta\,, \tag{1}$$

де k - коефіцієнт пружності.

Крім цього моменту при $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$ на тіло діє момент сил інерції $\vec{M}^{ін}=M_x^{ін}\vec{i}+M_y^{ін}\vec{j}$. Відповідно до принципу Даламбера

$$\vec{M}^{ін}+\vec{M}^{пр}=0\,. \tag{2}$$

Для обчислення $\vec{M}^{ін}$ виділимо в тілі малий елемент масою Δm і підрахуємо діючу на нього силу інерції $\Delta\vec{p}=-\Delta m\cdot\vec{a}$, де $\vec{a}$ - абсолютне прискорення елемента, що підраховується в системі *Oxyz* за формулою [9]

$$\vec{a}=\vec{a}^e+\vec{a}^r+\vec{a}^c\,,\ \vec{a}^e=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}),\ \vec{a}^r=d^2\vec{\rho}/dt^2\,,\ \vec{a}^c=2\vec{\omega}\times\vec{v}^r\,, \tag{3}$$

де $\vec{\rho}=(x+z\beta)\vec{i}+(y-z\alpha)\vec{j}+(z+y\alpha-x\beta)\vec{k}$ - радіус-вектор елемента, $\vec{v}^r=d\vec{\rho}/dt$ - відносна швидкість в збуреному стані при малих α і β.

Після виконання відповідних операцій у (3), отримуємо

$$\vec{v}^r=z\dot{\beta}\vec{i}-z\dot{\alpha}\vec{j}+(y\dot{\alpha}-x\dot{\beta})\vec{k}\,,\ \ \vec{a}^e=-\omega^2(x+z\beta)\vec{i}-\omega^2(y-z\alpha)\vec{j}\,,$$
$$\vec{a}^r=z\ddot{\beta}\vec{i}-z\ddot{\alpha}\vec{j}+(y\ddot{\alpha}-x\ddot{\beta})\vec{k}\,,\quad \vec{a}^c=2\omega z\dot{\alpha}\vec{i}+2\omega z\dot{\beta}\vec{j}\,. \tag{4}$$

За допомогою цих рівностей обчислимо складові моменту сил інерції

$$M_x^{ін}=\gamma\iiint\limits_{(V)}\left(-z\ddot{\alpha}+2\omega z\dot{\beta}-\omega^2y+\omega^2z\alpha\right)(z+y\alpha-x\beta)dxdydz-$$
$$-\gamma\iiint\limits_{(V)}(y\ddot{\alpha}-x\ddot{\beta})(y-z\alpha)dxdydz\,,$$

$$M_y^{ін} = -\gamma \iiint\limits_{(V)} \left(z\ddot{\beta} + 2\omega z\dot{\alpha} - \omega^2 x - \omega^2 z\beta\right)\left(z + y\alpha - x\beta\right)dxdydz + \\ + \gamma \iiint\limits_{(V)} \left(y\ddot{\alpha} - x\ddot{\beta}\right)\left(x + z\beta\right)dxdydz \,. \tag{5}$$

Тут γ- густина матеріалу тіла; інтегрування виконується по об'єму тіла V.

Нехтуючи в (5) добутками малих величин і виконуючи операції інтегрування, отримаємо

$$\begin{aligned} M_x^{ін} &= \left(-\ddot{\alpha} + 2\omega\dot{\beta} + \omega^2\alpha\right)\left(I_0 - I_z\right) - \left(\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha\right)\left(I_0 - I_x\right), \\ M_y^{ін} &= \left(-\ddot{\beta} - 2\omega\dot{\alpha} + \omega^2\beta\right)\left(I_0 - I_z\right) - \left(\ddot{\beta} + \omega^2\beta\right)\left(I_0 - I_x\right). \end{aligned} \tag{6}$$

З (2), (6) одержимо рівняння вільних коливань тіла в обертовій системі координат

$$\begin{aligned} I_x\ddot{\alpha} - 2\omega\left(I_0 - I_z\right)\dot{\beta} + \left[\omega^2\left(I_z - I_x\right) + k\right]\,\alpha = 0, \\ I_x\ddot{\beta} + 2\omega\left(I_0 - I_z\right)\dot{\alpha} + \left[\omega^2\left(I_z - I_x\right) + k\right]\,\beta = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

За їх допомогою можна досліджувати стійкість стану динамічної рівноваги α=β=0 і знаходити частоти і форми вільних коливань. У першому випадку $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$, $\ddot{\alpha} = \ddot{\beta} = 0$ і умова стійкості полягає в позитивності коефіцієнтів $\left[\omega^2\left(I_z - I_x\right) + k\right]$ при α і β. Тоді критичний стан наступає при

$$\omega^2\left(I_z - I_x\right) + k = 0 \tag{8}$$

і критичне значення кутової швидкості дорівнює

$$\omega_{кр} = \pm\sqrt{-k/\left(I_z - I_x\right)}\,. \tag{9}$$

Ця рівність свідчить, що при $I_z - I_x$ >0 розглянутий гіроскоп взагалі стійкості не втрачає і для того, щоб він міг втратити стійкість при деякому ω, необхідно виконання умови $I_x>I_z$. Важливо відзначити також, що якщо k=0, то гіроскоп стійкий при $I_z>I_x$ і нестійкий при $I_z<I_x$ незалежно від значення ω.

Особливість вільних коливань, що описуються рівняннями (7), пов'язана з наявністю в них гіроскопічних членів. Тому вони допускають розв’язок у формі прецесійних рухів

$$\alpha = A\sin ct, \quad \beta = B\cos ct\,. \tag{10}$$

Розглянемо спочатку випадок A=B. Тоді

$$c_{1,2} = \omega\left(I_0 - I_z\right)/I_x \pm \sqrt{\omega^2\left(I_0 - I_x\right)^2 / I_x{}^2 + k/I_x}\ . \qquad (11)$$

Якщо c_1>0, c_2>0, то відповідно до (10) вісь гіроскопа рухається в обертовій системі координат з обома частотами по конічній поверхні проти напрямку обертання (обернена регулярна кругова прецесія). Коли одна з частот приймає від'ємне значення, то їй відповідає рух (10) у формі прямої регулярної кругової прецесії.

При k=0 із рівності (11) одержимо

$$c_1 = \omega, \quad c_2 = \omega\left(I_x - I_z\right)/I_x\ . \qquad (12)$$

Звернемося тепер до випадку A= -B. Тоді

$$c_{1,2} = -\omega\left(I_0 - I_z\right)/I_x \pm \sqrt{\omega^2\left(I_0 - I_x\right)^2 / I_x{}^2 + k/I_x}\ . \qquad (13)$$

Якщо k=0: $$c_1 = -\omega, \quad c_2 = -\omega\left(I_x - I_z\right)/I_x\ , \qquad (14)$$

і знову для I_x>I_z має місце обернена прецесія по обох частотах, а для I_x<I_z по частоті c_2 реалізується пряма прецесія.

Значення ω, за яких ці криві перетинають вісь ординат, є критичними, оскільки при них стани статичної рівноваги тіла в обертовій системі координат стають нестійкими. Дійсно, прирівнюючи до нуля праву частину рівності (12), отримаємо, що частоти дорівнюють нулю при

$$\omega = \pm\sqrt{-k/\left(I_z - I_x\right)}\ , \qquad (15)$$

що збігається з умовою (9).

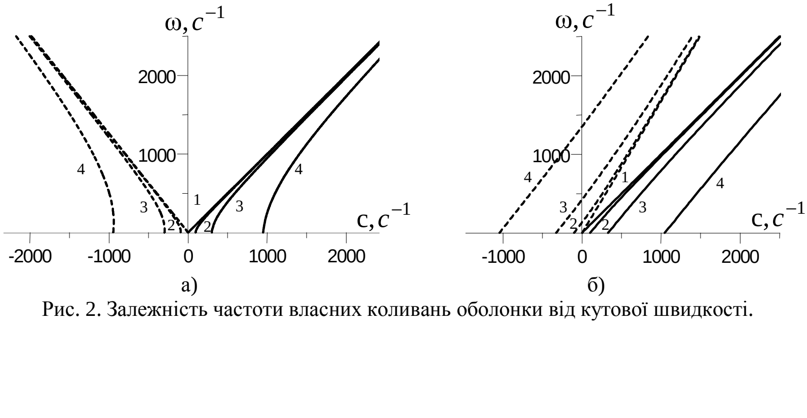

Рис. 2. Залежність частоти власних коливань оболонки від кутової швидкості.

На рис. 2 для різних значень k показані залежності (11) частот c_1 (пунктирні криві) і c_2 (безперервні криві) від ω для тонкостінних конічних тіл товщиною h=1мм, густиною γ=7800 кг/м^3, із довжиною твірної L=0,6м і діаметром меншої основи d=0,1м, що вимірюється по серединній поверхні. Криві пронумеровані в порядку збільшення коефіцієнта k для значень k=0, 10^4, 10^5, 10^6 Нм. Можна зауважити, що при k=0 залежності $c_i(\omega)$ прямолінійні, із збільшенням k їхні скривлення стають більш помітними. Рис. 2,*а* відповідає тілу з кутом розкриття 2α=150º ($I_z>I_x$), рис.2,б - тілу з кутом розкриття 2α=30º ($I_z<I_x$).

Розглянемо тепер випадок складного обертання тіла. Приймемо, що вісь Oz обертової системи координат $Oxyz$, із якою зв'язане тіло, робить додатковий примусовий поворот із постійною швидкістю $\omega_0<<\omega$ у площині X^*OZ^*. Введемо систему координат $OXYZ$, нерухома вісь OY якої збігається з віссю OY^*, а вісь OZ, що повертається, - із віссю Oz. В результаті взаємодії двох обертальних рухів на тіло буде діяти гіроскопічний момент $\vec{M}^{гір} = I_z \vec{\omega} \times \vec{\omega}_0$, що залишається сталим у системі $OXYZ$ і представляється обертовим із кутовою швидкістю $-\omega$ у системі $Oxyz$. Тому в цій системі він має компоненти

$$M_x^{гір} = -I_z \omega\omega_0 \cos\omega t, \quad M_y^{гір} = I_z \omega\omega_0 \sin\omega t, \quad M_z^{гір} = 0 . \tag{16}$$

Підставляючи моменти $M_x^{гір}$, $M_y^{гір}$ в праві частини рівнянь (7), одержимо

$$\begin{aligned} &I_x \ddot{\alpha} - 2\omega(I_0 - I_z)\dot{\beta} + \left[\omega^2 (I_z - I_x) + k\right] \alpha = -I_z \omega\omega_0 \cos\omega t, \\ &I_x \ddot{\beta} + 2\omega(I_0 - I_z)\dot{\alpha} + \left[\omega^2 (I_z - I_x) + k\right] \beta = I_z \omega\omega_0 \sin\omega t. \end{aligned} \tag{17}$$

Розв'язок цієї системи має вид

$$\alpha = \left(-I_z \omega\omega_0 / k\right)\cos\omega t, \quad \beta = \left(I_z \omega\omega_0 / k\right)\sin\omega t . \tag{18}$$

Він свідчить про те, що в системі координат $Oxyz$ тіло робить рух у формі оберненої прецесії з кутовою швидкістю ω, але оскільки сама система обертається зі швидкістю ω, то в системі $OXYZ$ цей рух представляється у формі стаціонарного стану, у якому вісь Oz залишається відхиленої на кут $I_z \omega\omega_0 / k$ у площині YOZ. При цьому критичні стани рівноваги в системі $OXYZ$, яка повертається, або резонансні прецесійні коливання (18) в системі *Oxyz*, яка обертається, не виникають, оскільки кругова частота ω моментів (16) ніколи не стає рівною власним частотам (11).

Методика дослідження пружного деформування тонких оболонок, що обертаються, без обраховування можливого повороту на кути α і β у пружних опорах викладена в [1, 2, 4-6, 10-12]. Вона заснована на використанні рівнянь динаміки оболонок у загальному виді

$$\nabla_\alpha \vec{\mathrm{T}}^\alpha + \vec{p} = 0, \quad \nabla_\alpha \vec{\mathrm{M}}^\alpha + (e_\alpha \times \vec{\mathrm{T}}^\alpha)\sqrt{a_{11}a_{22}} = 0, \qquad (\alpha = 1, 2) \qquad (19)$$

записаних у криволінійній ортогональній системі координат $ox^1x^2x^3$ з базисними векторами $\vec{e}_\alpha$ на поверхні.

У загальному випадку прискорення підраховується по формулах (3), (4), у яких вектори $\vec{\omega}$, $\vec{v}^r$, $\vec{\rho}$ повинні бути представлені з урахуванням усіх видів пружних рухів оболонки і її повороту на кути α, β. Для цього прискорення $\vec{a}^e, \vec{a}^r, \vec{a}^c$ (4), підраховані для абсолютно твердої оболонки в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, представимо в локальному базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ пружної оболонки

$$\begin{aligned} a^1 = \Big[&\left(-z\sin x^2 \sin\varphi + r\sin x^2 \cos\varphi\right)\ddot{\alpha} + \left(z\cos x^2 \sin\varphi - r\cos x^2 \cos\varphi\right)\ddot{\beta} + \\ &+ 2\omega z\cos x^2 \sin\varphi\,\dot{\alpha} + 2\omega z\sin x^2 \sin\varphi\,\dot{\beta} + \omega^2 z\sin x^2 \sin\varphi\,\alpha - \\ &- \omega^2 z\cos x^2 \sin\varphi\,\beta\Big] \Big/ \sqrt{a_{11}}\,, \\ a^2 = \Big(&-z\cos x^2\ddot{\alpha} - z\sin x^2 \ddot{\beta} - 2\omega z\sin x^2 \dot{\alpha} + 2\omega z\cos x^2 \dot{\beta} + \\ &+ \omega^2 z\cos x^2\,\alpha + \omega^2 z\sin x^2\,\beta\Big) \Big/ \sqrt{a_{22}}\,, \\ a^3 = &\left(z\sin x^2 \cos\varphi + r\sin x^2 \sin\varphi\right)\ddot{\alpha} + \left(-z\cos x^2 \cos\varphi - r\cos x^2 \sin\varphi\right)\ddot{\beta} - \\ &- 2\omega z\cos x^2 \cos\varphi\,\dot{\alpha} - 2\omega z\sin x^2 \cos\varphi\,\dot{\beta} - \omega^2 z\sin x^2 \cos\varphi\,\alpha + \\ &+ \omega^2 z\cos x^2 \cos\varphi\,\beta \end{aligned}$$

і складемо їх з відповідними контраваріантними компонентами прискорень пружної оболонки при складному обертанні [1, 4-5, 10-12].

Лінеаризуємо рівняння (19) в околі стану простого обертання із кутовою швидкістю ω. При цьому врахуємо, що оболонка попередньо напружена мембранними силами T^{11}, T^{22}; радіус *r*, кут φ і параметри другої квадратичної форми b_{ii} одержують збільшення Δr, $\Delta\varphi = \Delta\vartheta_1$, Δb_{ii}

відповідно, а деформації ε_{ij} визначаються нелінійними співвідношеннями [1-6, 10-12].

До рівнянь теорії оболонок додаються додаткові рівняння на краю $x^1 = 0$

$$\vec{M}^{\,пр}_{об} + \vec{M}^{\,пр} = 0 \qquad \text{або} \qquad \vec{M}^{\,пр}_{об} - k\left(\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j}\right) = 0\,, \tag{21}$$

де $\vec{M}^{\,пр}_{об}$ - результуючий момент внутрішніх пружних сил в оболонці на краю $x^1 = 0$.

Для аналізу загальних закономірностей виникнення критичних станів конічних оболонок, які обертаються, побудовані діаграми залежності частот їхніх вільних коливань від кутової швидкості ω для двох оболонок, геометричні й інерційні властивості яких збігаються з властивостями абсолютно твердих оболонок, розглянутих вище.

На рис. 3,а для різних значень k показано характер зміни частот c від ω для випадку $I_z > I_x$, на рис.3,б для випадку $I_z < I_x$ при $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, ν=0.3. Для відповідної абсолютно твердої оболонки така діаграма показана на рис.2,а ($I_z > I_x$), та рис.2,б ($I_z < I_x$). На відміну від твердого тіла пружна оболонка характеризується тим, що вона може коливатися навіть при її жорсткому закріпленні до платформи, що обертається.

На рис.3 жирними безперервними лініями показана залежність c від ω для випадку жорсткого закріплення пружних оболонок до платформи (k=∞), тонкими безперервними лініями показані частотні криві для пружних оболонок із пружним закріпленням до платформі при значеннях k=10^4, 10^5 Нм (рис.3,а), та для k=10^4, 10^5, 10^6 Нм (рис. 3,б).

Для кривої, яка відповідає жорсткому закріпленню оболонки до платформи, встановлені значення $\omega_{кр} = 1660{,}3\,c^{-1}$ (перетин з віссю ординат) і $\omega_{рез} = 1011{,}2\,c^{-1}$ (перетин з променем $\omega = c$) критичних станів оболонки при простому і складному обертаннях (рис. 3,а), та $\omega_{кр} = 1063{,}9\,c^{-1}$, $\omega_{рез} = 2627{,}1\,c^{-1}$ (рис. 3,б). Обчислення показали, що незалежно від k усі криві перетинають промінь при тому самому значенні.

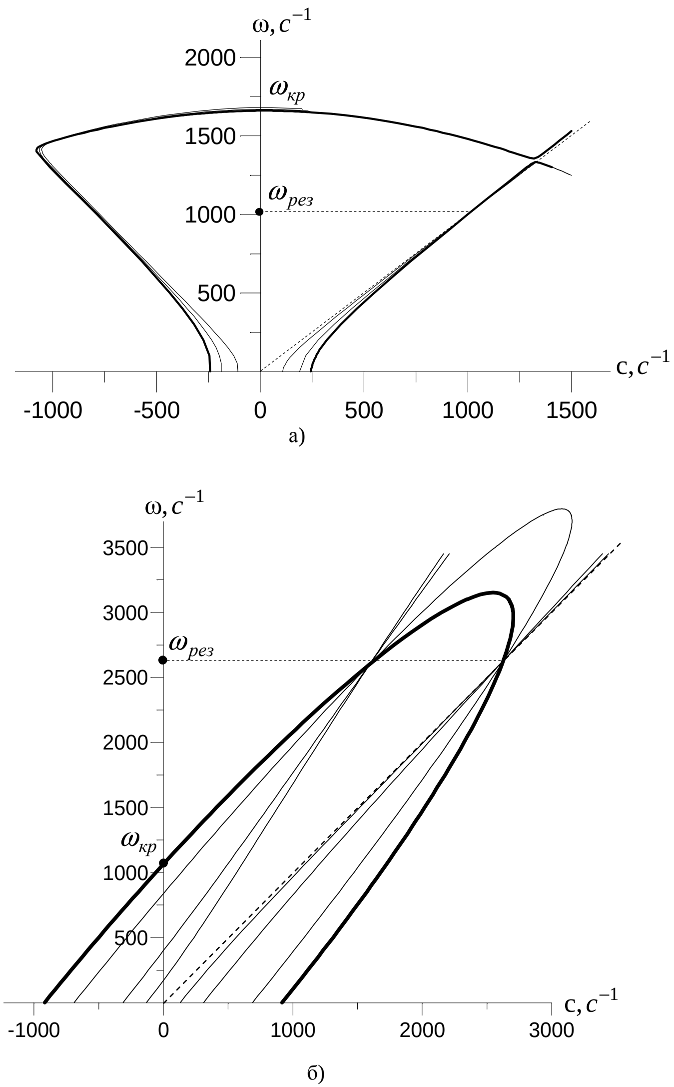

Рис. 3. Залежність частоти власних коливань оболонки від кутової швидкості.

Цей факт свідчить про те, що при складному обертанні резонансне значення кутової швидкості ω не залежить від пружної піддатливості приєднання оболонки до платформи.

1. *Белова М.А., Гуляев В.И., Соловьев И.Л.* Статические и динамические критические состояния параболических оболочек при простом и сложном вращениях. // Механика твердого тела. – 2004. – № 3. – С. 152-163.
2. *Гайдайчук В.В., Соловйов І.Л., Бєлова М.О.* Стійкість стаціонарного обертання тонких сферичних оболонок. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2001, вип. 69. – С. 25-30.
3. *Григоренко Я.М., Гуляев В.И.* Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор). // Прикладная механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 3 –23.
4. *Гуляев В.И., Гром А.А., Снежко Н.А.* Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // Механика твердого тела. – 1999. № 2. – С. 156-163.
5. *Гуляев В.И., Соловьев И.Л., Белова М.А.* О связи критических состояний конических оболочек при простом и сложном вращениях с частотами собственных прецессионных колебаний. // Проблемы прочности. – 2004. – № 2. – С. 52-66.
6. *Гуляев В.И., Соловьев И.Л., Белова М.А.* Устойчивость равновесия стационарного вращения тонких упругих конических оболочек. // Доповіді НАН України. – 2001, № 12. – С. 46-51.
7. *Егармин Н.Е.* О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки. // Механика твердого тела. – 1986. – 21, № 3. – С. 142-148.
8. *Смирнов А.Л., Товстик П.Е.* Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения. // Современные проблемы механики и авиации. – М.: Машиностроение, 1982. – С. 280-290.
9. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – С. 192.
10. *Gulyayev V.I, Solovjov I.L., Lugovyy P.Z.* Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation. // Journal of Sound and Vibration. –2001. V. 246., № 3, – pp. 491-504.
11. *Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A.* Critical states of thin ellipsoidal shells in simple and compound rotations. // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – Vol. 270. – P. 323-339.
12. *Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A.* Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies. // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 3565-3583.

Матеріал надійшов до редакції 28.09.04.